Adaptation de maillages pour la modélisation numérique des avalanches et des laves torrentielles par des équations moyennées dans l'épaisseur

CLAIRE LAUVERNET

sous la direction de
PIERRE SARAMITO
dans le cadre du
projet IDOPT

Soutenance le 26 juin 2001

École doctorale de mathématiques
et d'informatique de Grenoble
Université Joseph Fourier

Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Pierre Saramito pour tout le temps qu'il m'a consacré, sa patience et sa compréhension devant mes lacunes (fatales en programmation...) ; sans lui ce stage m'aurait paru insurmontable.

Je remercie également Dominique Laigle du Gemagref pour ses explications sur les laves torrentielles, et sur l'événement du Pousset, Emil Hopfinger du LEGI, Marie-Paule Cani et Fabrice Neyret de l'INRIA pour avoir agrémenté les réunions de leur culture et de leurs différentes façons de travailler et d'aborder le sujet des avalanches, permettant de sortir des mathématiques et de sentir la présence concrète de ce phénomène passionant dans mon stage.

Merci à mes collègues du laboratoire LMC, pour la vie qu'ils y apportaient et leur aide très précieuse.

Enfin je remercie tous mes proches, pour m'avoir soutenue, écoutée et relue, découvrant avec moi les monde des mathématiques appliquées, et ma grand-tante Charlotte pour ce sourire inoubliable qui vient de disparaître et à qui je dédie ce mémoire.

Introduction

Les avalanches et les laves torrentielles sont deux phénomènes semblables, par leur côté à la fois imprévisible, excessivement impressionant et destructeur. Comme toutes les catastrophes naturelles, il n'est pas envisageable d'empêcher leur déclenchement, en particulier dans le cas des laves torrentielles, dont le mécanisme de création reste encore assez difficile à comprendre.

De fait, le meilleur moyen de limiter leurs conséquences est d'améliorer les techniques de protection et surtout de prévoir les zones de risque, puisque ces événements sont généralement répétitifs et finissent par retrouver leur itinéraire naturel, malgré les barrages et les seuils, qui permettent toutefois souvent de dévier la lave.

Pour cela, l'étude de l'écoulement de ces fluides et notamment les simulations de ces événements jouent un rôle indispensable.

Ces fluides possèdent des propriétés jouant chacune un rôle essentiel dans leur comportement. En effet, ce sont des fluides visqueux [1], qui subissent divers effets et ont plusieurs caractéristiques :

- la friction traduit le frottement le long des bords du lit ou du chenal creusé par le front ;
- la diffusion permet de déterminer l'étalement du fluide sur le terrain ;
- le fond, c'est-à-dire la hauteur initiale du domaine avant l'écoulement, possède un certain relief dont il faut tenir compte, puisqu'il fait alors varier la force de pression ;
- le seuil est une propriété caractéristique des fluides non Newtoniens. Il joue un rôle très important puisque sans le terme de seuil le fluide s'écoulerait infiniment.

Dans ce rapport, nous allons partir du système de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles afin d'aboutir à un système de Saint-Venant visqueux (SVV), tenant compte de tous ces effets et des deux dimensions composant le domaine d'écoulement.

Cette méthode est utilisée dans beaucoup d'articles mais à notre connaissance aucune n'a réuni tous les termes caractérisant la boue et la neige lourde, et le fait que le domaine soit vu en deux dimensions.

Ainsi, en 1986, G. Dhatt, A. Soulaimani, Y. Ouellet et M. Fortin [10] ont étudié ce système en deux dimensions, avec le terme de relief et la diffusion mais ne détaillant pas le seuil (puisque leur modèle décrivait l'eau du Saint-Laurent au Québec), ni la friction.

En 1992, P. Coussot, dans ses études sur les laves torrentielles [8], a obtenu un modèle avec seuil, utilisant le tenseur d'Herschel-Buckley et ses expériences pratiques, avec relief et en deux dimensions mais négligeant cependant la friction. Il a de plus considéré un plan incliné mesurant la hauteur du fluide non pas parallèlement à la gravité, mais perpendiculairement à la surface libre de l'écoulement.

[1] La viscosité traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement. Cette résistance résulte de forces de frottement au sein même du fluide.

En 1995, A. Bermúdez, A. Dervieux, J.A. Désidéri et M.E. Vásquez [4] donnaient un modèle en deux dimensions tenant compte du relief et de ses aspérités.

P. Saramito, en 2000 [21], détaille particulièrement le terme de diffusion pour le phénomène de rupture de barrage.

E. Audusse, M-O. Bristeau et B. Perthame [2] considèrent le terme de relief et le donnent en deux dimensions.

Enfin, J-F. Gerbeau et B. Perthame [11] démontrent plusieurs théorèmes très utiles pour conclure au "système Saint-Venant visqueux" avec un terme de friction et d'inertie, en une dimension.

Ainsi, donner un modèle regroupant toutes ses caractéristiques est l' objectif du deuxième chapître de ce mémoire, après une première partie purement descriptive des avalanches et des laves torrentielles, afin de comprendre le rôle indispensable de chaque terme.

La technique est classique : on la retrouve dans [21] ou [11] :

elle consiste à projeter le système d'équations sur les trois axes, puis à faire un changement de variables pour obtenir un système sans dimension, dépendant de plusieurs paramètres dont un ε petit ; dans la troisième étape on obtient un point limite quand ε tend vers 0. On moyenne alors ce système en épaisseur (par intégration) afin d'obtenir un nouveau problème en 2D d'inconnue la vitesse moyenne. Enfin, on améliore la précision dans le but de faire apparaître les termes visqueux (termes en dérivées secondes), ce que j'appelle également la diffusion, puis viennent s'ajouter les termes de fond et de seuil.

Le troisième chapitre décrit la simulation numérique effectuée à l'aide d'un code de calcul provenant du CEMAGREF, n'utilisant pas tout à fait le modèle complet démontré, puisqu'il a choisi de négliger le terme visqueux.

On a donc maillé le site du Pousset sur lequel s'est écoulée, en 1999 une lave torrentielle, puis obtenu à l'aide de BAMG [13] des maillages adaptés sur lesquels le code a été appliqué ainsi que sur un maillage régulier très fin que le CEMAGREF utilisait déjà.

Enfin des résultats sur la hauteur, le flux, le volume, la surface active en fonction du temps sont détaillés et interprétés : des comparaisons entre les maillages et quelques idées (modestes toutefois) d'amélioration sont proposées.

Chapitre 1

Présentation des avalanches et des laves torrentielles

1.1 Les avalanches

Les avalanches de neige existent sous maintes formes. Selon l'époque de l'année, selon le lieu, elles peuvent ressembler à une chute de billes de verre comme à un énorme brouillard se déplaçant à une vitesse spectaculaire et étant loin d'être sans conséquence sur le terrain qu'elles envahissent. Elles suscitent un sentiment ambigü fait d'une part de fascination devant le spectacle de leur formidable puissance naturelle, et d'autre part de peur devant les effets dévastateurs de leur trajectoire impitoyable, dans un grondement à couper le souffle...

Chaque année, on en dénombre plus d'un million, de plus ou moins grande importance, qui font en moyenne deux cents victimes (citons pour triste mémoire l'avalanche de Chamonix en Février 1999). Les grands stratèges autrichiens et italiens de la Première Guerre mondiale avaient bien compris ce phénomène. En 1916, dans les Alpes, où les troupes des deux pays s'opposaient férocement, les militaires l'utilisèrent comme arme suprême. Avec une réussite certaine, puisque près de 80 000 soldats des deux camps périrent dans ces immenses torrents blancs déclenchés à coup d'obus (voir [1]).

Aujourd'hui elles sont étudiées dans le but d'éviter ce pourquoi on les utilisait autrefois...

On peut classer les avalanches selon la façon dont elles se déclenchent : on obtient trois catégories, qui correspondent schématiquement aux différentes étapes de la vie de la neige : l'avalanche de poudreuse, l'avalanche de plaque et l'avalanche de fonte.

- La neige fraîche est constituée de cristaux très enchevêtrés les uns dans les autres, ce qui permet au manteau de tenir sur des pentes assez raides. Mais cet équilibre est instable : la moindre perturbation ou tout simplement l'alourdissement par la neige qui continue de tomber suffit à déclencher le glissement qui donne lieu à des avalanches de poudreuse, les plus dangereuses et les plus fréquentes (80% des avalanches environ). Elles peuvent atteindre jusqu'à 60 m/s et acquièrent une énergie considérable. Une fois le mouvement déclenché, cette neige très légère et sèche se mélange à l'air et s'écoule comme un gaz lourd. Ce sont les avalanches "aérosol".

- Il peut s'agir, comme on le voit souvent d'une plaque de neige, formée par thermodynamique sur le manteau neigeux, qui est cassée par un skieur, par le poids, ou par un choc et qui se détache alors entièrement du manteau (la plaque peut mesurer plus d'une centaine de mètres de largeur). Ces avalanches peuvent être constituées aus extrêmes de neige dense sèche (comme un glissement de billes de glace), ou de neige dense humide, comme celle de printemps.

- Au printemps, la température augmente et les cristaux de neige s'arrondissent, ils sont de fait moins liés. Les avalanches de fonte peuvent mettre en jeu des masses énormes de neige si la fusion a atteint toute l'épaisseur du manteau. Elles s'écoulent lentement (30 km/h) mais ont une puissance considérable, capables de tout écraser sur leur passage. Elles correspondent à ce que l'on appelle les avalanches de neige dense humide.

Pour leur comportement similaire aux laves torrentielles boueuses, et pour la complexité de modélisation d'une avalanche aérosol (pour laquelle des phénomènes limites entre le fluide et le gaz ne sont encore pas éclaircis), nous nous sommes interressés uniquement à ce dernier type d'avalanche.

1.2 Les laves torrentielles

Ce phénomène, moins fréquemment médiatisé pour son côté esthétique, mais tout autant pour ses conséquences, peut en effet provoquer d'importants dégâts, comme on l'a constaté à Vaison-la-Romaine (1992) ou au Grand Bornand (1987). De fortes pluies ou la fonte des neiges provoquent un grand apport d'eau s'écoulant plus violemment qu'en temps normal, et ce phénomène combiné avec les érosions latérales déclenchent ce que l'on appelle des laves torrentielles, ou plus communément, des coulées de boue.

Le parcours de la lave torrentielle reste tout d'abord bien suivi, puisqu'elle est canalisée par le lit du torrent, puis un rétrécissement, un pont, ou une accumulation de lave, la poussent à sortir du lit du torrent pour déborder sur une rive et s'épancher sur le cône de déjection. C'est lors de cette sortie que les dégâts deviennent importants, la lave n'étant plus maîtrisable.

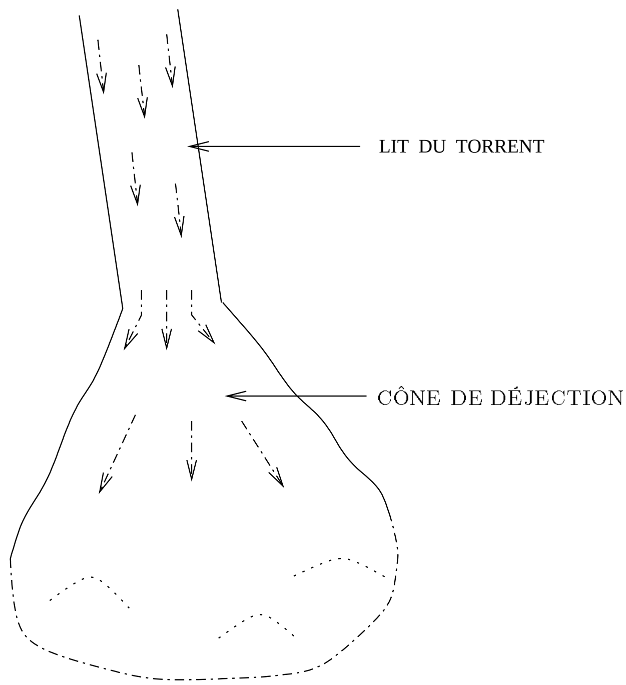


FIG. 1.1 – Écoulement de la lave

Les laves torrentielles ont une très forte densité (2000 à 2300 kg/m^3), elles ne sont constituées que de 25% d'eau en moyenne, le reste étant constitué de sédiments arrachés au sol, de limons, de sables, de cailloux, de blocs de roche (pouvant mesurer plusieurs mètres de diamètre), d'argile... Plus la proportion d'eau est importante, plus l'écoulement est turbulent et dangereux.

On constate en général un fort cisaillement sur les bords du lit, donc une vitesse pratiquement nulle à ce niveau. Au milieu, en revanche, le cisaillement est très faible. La vitesse d'une coulée y est en moyenne de 5m/s, elle dépend bien sûr de la pente du terrain.

La hauteur du front de coulée, c'est à dire en général la hauteur maximale, est comprise entre 0.5 et 11 m, cela peut dépendre des conditions aux limites et de la caractéristique du fluide.

En moyenne, la concentration solide du mélange, autrement dit le rapport entre le volume de solide et le volume total, décroît depuis le front jusqu'à la queue de la coulée. Comme en général, la viscosité du mélange croit avec la concentration solide, la queue de la lave, pour laquelle la concentration solide est faible, joue un rôle souvent mineur sur le reste de l'écoulement. En revanche, le front très visqueux, et le corps de la lave, qui présente une part très importante (en volume) de l'ensemble des matériaux transportés, jouent un rôle prédominant.

Ce phénomène, comme certaines avalanches, se présente sous forme de bouffées transitoires. En effet, leur nombre de Froude est inférieur à 1 (voir page 17) ; de fait la moindre petite irrégularité tirée du fond provoque donc une instabilité qui se traduit sous forme de vagues, qui peuvent être séparées de plusieurs minutes. Les vagues sont d'abord composées de beaucoup de matériaux solides, puis de moins en moins.

On peut distinguer deux grands types de laves torrentielles, même si il est souvent impossible de classer une coulée dans l'une de ces deux catégories, puisque chacune appartient en partie plus ou moins dominante dans les deux. Il s'agit d'une part des laves plus boueuses (plus d'eau) et d'autre part des laves plus granulaires (plus d'argile).

- Les laves plus boueuses se présentent comme un ensemble homogène, c'est un cas monophasique. L'écoulement possède plus d'eau, il est donc plus turbulent et moins prévisible, mais son front est moins haut.
- Dans les laves plus granulaires, l'eau et le caillou se dissocient, c'est un ensemble biphasique. Il est plus haut et d'une plus faible densité.

Ceci n'est qu'une brève description des laves torrentielles, je suggère de se référer à [8] pour lire une étude complète de ce phénomène. Dans ce rapport, nous nous sommes seulement attachés au cas des laves plus boueuses et homogènes, d'une part parce qu'à ce jour les laves plus granulaires sont très difficiles à modéliser, et d'autre part parce qu'elles s'identifient, en terme de modélisation, aux avalanches denses et humides ("neige de printemps"). De plus, il faut préciser que les lois d'écoulement que nous détaillerons considèrent l'écoulement comme continu, et ne tiennent pas compte du phénomène des vagues très fréquemment observé.

Chapitre 2

Formulation du problème

Hypothèses préliminaires

On utilisera les même hypothèses que Coussot [9] pour le modèle numérique appliqué en Chapitre 3, c'est-à-dire :
- le fluide est homogène, depuis le front jusqu'à la queue, en concentration, densité, loi de comportement ;
- l'écoulement est laminaire ;
- il n'y a pas en général de glissement à la paroi.

2.1 Le problème de Navier-Stokes ou problème à surface libre

2.1.1 Description

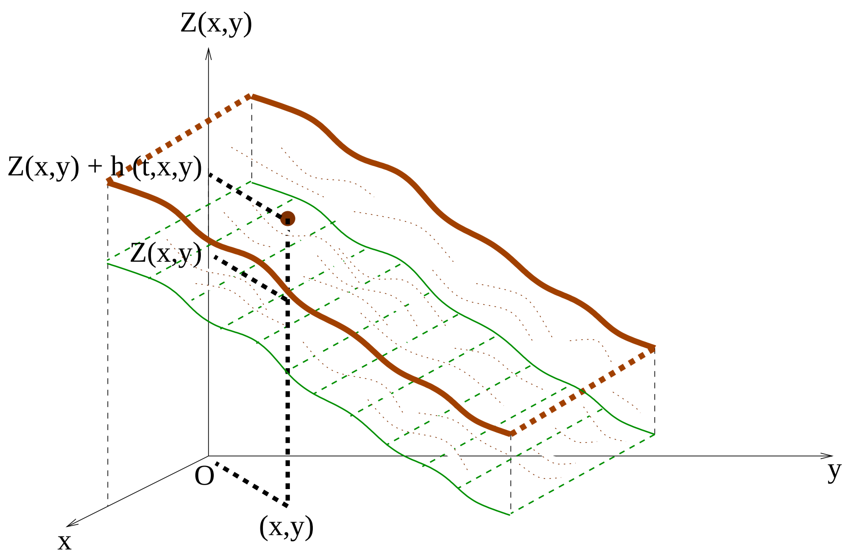


Fig. 2.1 – Écoulement d'un fluide sur un plan incliné

On note :

- $\mathcal{D}_t$ le domaine de l'écoulement d'un fluide sur un plan incliné.

- $\Omega \subset I\!R^2$ un ouvert borné, projection de $\mathcal{D}_t$ sur le plan horizontal. Il représente le domaine bidimensionnel où est confiné l'écoulement.
- $Z : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ la fonction représentant la hauteur du fond, c'est-à-dire le plan sur lequel va s'écouler le fluide.
- $h : I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ la hauteur d'un point du fluide en fonction du temps et de ses coordonnées.

L'équation du fond est :

$$\Gamma_{fond} = \{(x, y, z) \in I\!R^3; z = Z(x, y)\}$$

L'équation de la surface libre est :

$$\Gamma_{t,libre} = \{(x, y, z) \in I\!R^3; z = Z(x, y) + h(t, x, y)\}$$

Le domaine de calcul sera donc :

$$\mathcal{D}_t = \{(x, y, z) \in I\!R^3; (x, y) \in \Omega \ et \ Z(x, y) < z < Z(x, y) + h(t, x, y)\}$$

Enfin, les bords verticaux crées par la coupe seront notés $\Gamma_{tranche}$. On a donc :

$$\partial\mathcal{D}_t = \Gamma_{fond} \cup \Gamma_{t,libre} \cup \Gamma_{tranche}$$

2.1.2 Équations

- Le domaine $\mathcal{D}_t$ est occupé par un fluide visqueux dont le tenseur des contraintes totales de Cauchy est donné par :

$$\sigma_T = -pI + \sigma \tag{2.1}$$

  où
  - p est la pression
  - σ est le **tenseur des contraintes visqueuses** et vaut $2\eta D(\vec{u})$, où $\vec{u}$ est la vitesse
  - η est la **viscosité**, supposée constante.
- Les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse donnent :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\vec{u}\right) - \mathbf{div}\ \sigma + \nabla p = \rho\ \mathbf{g} \tag{2.2}$$

$$\text{div}\ (\vec{u}) = 0 \tag{2.3}$$

  où :
  - ρ est la **densité**, supposée constante
  - $\mathbf{g}$ représente la **gravité**

- Enfin, dans le domaine d'écoulement, c'est-à-dire dans la partie dirigée par la fonction indicatrice suivante :

$$\varphi(t,x,y,z) = \begin{cases} 1 & pour \quad Z(x,y) \leq z \leq Z(x,y) + h(t,x,y) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

l'indicatrice du fluide a sa dérivée particulaire nulle :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = 0$$

ce qui revient à :

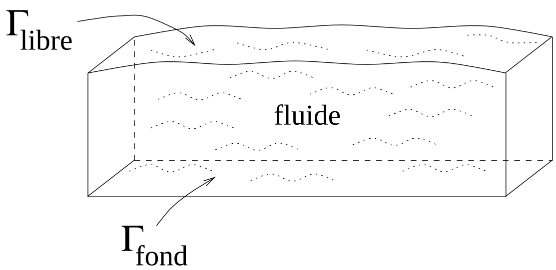
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\varphi = 0 \tag{2.4}$$

Ces équations sont complétées par des conditions aux limites définies ci-dessous :

2.1.3 Conditions aux limites

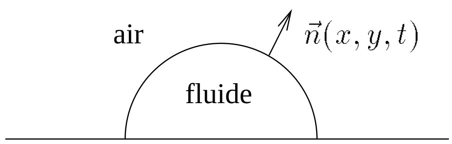
Elles apparaissent naturellement avec le problème.
Rappelons que le tenseur total est :

$$\sigma_T = -pI + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



- sur la surface libre Γ_{libre}, on a :

$$\sigma_T.\vec{n} = \frac{S}{h}.\vec{n} - p_{athm}.\vec{n}$$



  - on choisit p_{athm} arbitrairement nulle
  - S dépend du fluide et de l'air
  - R est le **rayon de courbure**
  - S est choisi très petit et R est choisi grand

donc on peut considérer que :

$$\sigma_T.\vec{n} = 0 \tag{2.5}$$

Conséquences de 2.5 :

L'équation de la surface libre Γ_{libre} étant $z - h(x,y,t) = 0$
– la normale à Γ_{libre} est :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

– le plan tangent a pour équation :

$$(X - X_0).\vec{n} = 0$$

où $X = (x,y,z)$ et $X_0 = (x,y,h(x,y,t))$ appartient à la surface.

D'où :

$$\sigma_T.\vec{n} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial h}{\partial x}(p - \sigma_{xx}) - \frac{\partial h}{\partial y}\sigma_{xy} + \sigma_{xz} & = & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y}(p - \sigma_{yy}) + \sigma_{yz} & = & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x}\sigma_{xz} - \frac{\partial h}{\partial y}\sigma_{yz} + (p - \sigma_{zz}) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

- sur les bords verticaux $\Gamma_{tranche}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \sigma_T.\vec{n} & = & 0 & sur & \Gamma^N_{tranche} \\ \vec{u} & = & \bar{u}_{\Gamma_{tranche}} & sur & \Gamma^D_{tranche} \end{array} \right. \tag{2.7}$$

- sur la surface du fond Γ_{fond}, on a :
  - 1ère condition :

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \tag{2.8}$$

    c'est-à-dire que le fluide ne passe pas dans le sol et ne s'en décolle pas non plus.
  - 2ème condition :
    on a :

$$\sigma_T.\vec{n} = ((\sigma_T.\vec{n}).\vec{n})\,\vec{n} + \vec{\sigma}_{nt},$$

    où $\vec{\sigma}_{nt}$ est la contrainte de cisaillement,
    et

$$\vec{u} = (\vec{u}.\vec{n}).\vec{n} + \vec{u}_t,$$

    où $\vec{u}_t$ est la vitesse tangentielle.
    Alors il existe κ, **coefficient de friction**, tel que

$$\vec{\sigma}_{nt} - \kappa.\vec{u}_t = 0 \tag{2.9}$$

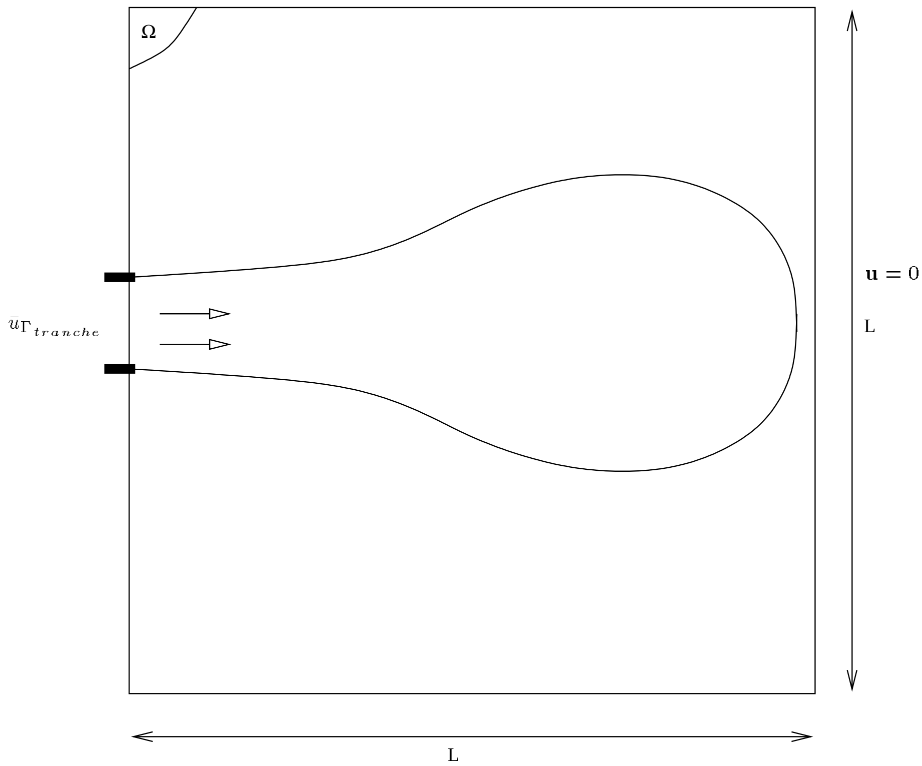


FIG. 2.2 – $\Gamma_{tranche}$

- **Remarque** : dans le cas où le fond est plat (ie $Z = 0$) :
  - la normale à Γ_{fond} est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - la vitesse est $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

    D'où (2.8) devient :

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{2.10}$$

    sur Γ_{fond}.

  - D'autre part :

$$\sigma_T.\vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ -p + \sigma_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow (\sigma_T.\vec{n}).\vec{n} = -p + \sigma_z z \Rightarrow \vec{\sigma}_{nt} = (\sigma_T.\vec{n}) - \{(\sigma_T.\vec{n}).\vec{n}\}.\vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

    D'où (2.9) devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_{xz} - \kappa.u & = & 0 \\ \sigma_{yz} - \kappa.v & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'énoncé complet du problème :

2.1.4 Énoncé complet du problème (P)

Trouver (σ, $\vec{u}$, p,h) **vérifiant** (2.1) - (2.9), c'est-à-dire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma & = & 2\eta D(\vec{u}) \\ \rho\left(\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\vec{u}\right) - \mathbf{div}\ \sigma + \nabla p & = & \rho\ \mathbf{g} \\ \text{div}\ (\vec{u}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\varphi & = & 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma_T.\vec{n} & = & 0 & sur & \Gamma_{libre} \\ \vec{u} & = & \vec{u}_{\Gamma_{\text{tranche}}} & sur & \Gamma^D_{tranche} \\ \sigma_T.\vec{n} & = & 0 & sur & \Gamma^N_{tranche} \\ \left.\begin{array}{rcl} \vec{u}.\vec{n} & = & 0 \\ \sigma_{nt} - \kappa.\vec{u} & = & 0 \end{array}\right\} & & & sur & \Gamma_{fond} \end{cases}$$

où φ dépend directement de h.

2.2 Écoulements peu profonds

2.2.1 Analyse dimensionnelle

a/ Le problème de Navier-Stokes sans dimension

Projetons les équations de conservation sur les axes (Ox), (Oy), (Oz), où (Oz) est la verticale, et (Oxy) est le plan horizontal. Dans ce repère, on a :

- $\vec{u} = (u, v, w)$
- $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$

D'où :

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial uv}{\partial y} + \dfrac{\partial uw}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial uv}{\partial x} + \dfrac{\partial v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial vw}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial y} & = & \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial uw}{\partial x} + \dfrac{\partial vw}{\partial y} + \dfrac{\partial w^2}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial z} & = & \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho g \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} & = & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}.\nabla\varphi & = & 0 \end{cases}$$

Afin de résoudre le système, passons à des quantités sans dimension. Soient :

- H une constante de hauteur
- L une constante de longueur

- U une constante de vitesse
- $\varepsilon = H/L$, représentant un petit paramètre
- le nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho UL}{\eta\varepsilon^2}$ [1] [2]
- le nombre de Froude : $Fr = \frac{U}{\sqrt{\varepsilon g L}}$
- $K = \frac{1}{\varepsilon^2 Re}$
- $G = \frac{1}{Fr^2}$

On pose alors :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{u} = \frac{u}{U} & \tilde{v} = \frac{v}{U} & \tilde{w} = \frac{w}{\varepsilon U} & \tilde{x} = \frac{x}{L} \\ \tilde{y} = \frac{y}{L} & \tilde{z} = \frac{z}{\varepsilon L} & \tilde{t} = \frac{Ut}{L} & \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2} \\ \tilde{h} = \frac{h}{H} & \tilde{\sigma} = \frac{L}{\eta U}\sigma & \alpha = \kappa\frac{L}{\eta} & \tilde{\mathrm{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \end{array}$$

ε, Fr, et Re sont 3 paramètres indépendants, ε est négligeable tandis que Re et Fr ne le sont pas.

Alors le système devient sans dimension :

$$\begin{array}{rcl}
\rho\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}\right) + \frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xx}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{xy}}{\partial\tilde{y}}\right) + \frac{\eta U}{L^2\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xz}}{\partial\tilde{z}} \\
\rho\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{v}^2}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}\right) + \frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xy}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{yy}}{\partial\tilde{y}}\right) + \frac{\eta U}{L^2\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\sigma}_{yz}}{\partial\tilde{z}} \\
\rho\frac{U^2\varepsilon}{L}\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{w}^2}{\partial\tilde{z}}\right) + \frac{\rho U^2}{\varepsilon L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}} & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xz}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{yz}}{\partial\tilde{y}} +\right) + \frac{\eta U}{L^2\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\sigma}_{zz}}{\partial\tilde{z}} - \rho g \\
\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} & = & 0 \\
\frac{U}{L}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}} + \tilde{u}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{y}} + \tilde{w}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{z}}\right) & = & 0
\end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{rcl}
\rho\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}\right) & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2}\right) + \frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} \\
\rho\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{v}^2}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}\right) & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}^2} + 2\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2}\right) + \frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} \\
\rho\frac{U^2\varepsilon}{L}\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{w}^2}{\partial\tilde{z}}\right) & = & \frac{\eta U}{L^2}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}} + \varepsilon\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2}\right) + \frac{\rho U^2}{\varepsilon L}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}} - \\
\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} & = & 0 \\
\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}} + \tilde{u}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{x}} + \tilde{v}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{y}} + \tilde{w}.\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{z}} & = & 0
\end{array}$$

[1] le nombre de Reynolds, s'il est grand, met en évidence les effets d'inertie en premier

[2] si Re est petit, il met en évidence les effets d'étalement (diffusion, viscosité) en premier

On obtient, en multipliant par $\frac{L}{\rho U^2}$ les deux premières lignes et par $\frac{L\varepsilon}{\rho U^2}$ la 3ème ligne, **le problème de Navier-Stokes sans dimension** $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)_{(\varepsilon,Re,Fr)}$, avec pour inconnues $\left(\tilde{\sigma},\tilde{u},\tilde{p},\tilde{h}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}=\frac{1}{Re}\frac{L^2}{H^2}\left(2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}}\right)+\frac{\eta}{\varepsilon^2L\rho U}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2}\\
&\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{v}^2}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{u}\tilde{v}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}=\frac{1}{Re}\frac{L^2}{H^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{x}^2}+2\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}}\right)+\frac{\eta}{L\rho U\varepsilon^2}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2}\\
&\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{u}\tilde{w}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{v}\tilde{w}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{w}^2}{\partial\tilde{z}}\right)=\frac{\varepsilon^2\eta}{L\rho U}\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right)+\frac{L^2}{H^2Re}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{z}}+\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{z}}+2\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2}\right)-G\\
&\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}=0\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{t}}+\tilde{\mathrm{u}}.\nabla\varphi=0
\end{aligned}$$

Précisons maintenant les conditions aux limites de $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)_{(\varepsilon,Re,Fr)}$:

L'équation de la surface libre reste la même.
La normale $\vec{n_\varepsilon}$ à $\Gamma_{libre,\varepsilon}$ est maintenant :

$$\vec{n_\varepsilon}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}))=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2(\frac{\partial h}{\partial x})^2+\varepsilon^2(\frac{\partial h}{\partial y})^2}}\begin{pmatrix}-\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}\\-\varepsilon\frac{\partial h}{\partial y}\\1\end{pmatrix}$$

donc :

- sur $\Gamma_{libre,\varepsilon}$, on a
$$\tilde{\sigma}_T.\vec{n_\varepsilon}=0$$
- sur les bords verticaux $\Gamma_{tranche,\varepsilon}$, on a :
$$\tilde{\sigma}_T.\vec{n_\varepsilon}=0$$
- sur la surface du fond $\Gamma_{fond,\varepsilon}$, on a :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\tilde{w}&=&0\\\tilde{\sigma}_{xz}-\alpha.\tilde{u}&=&0\\\tilde{\sigma}_{yz}-\alpha.\tilde{v}&=&0\end{array}\right.$$

b/ Le problème de Saint-Venant sans dimension $\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)_{(Re,Fr)}$

Dans cette étape, on fait tendre ε vers 0, sachant que Re est indépendant de ε . Changeons les notations afin de mettre en évidence le fait que $(\bar{\sigma},\bar{u},\bar{p},\bar{h})$ sont les inconnues $(\tilde{\sigma},\tilde{u},\tilde{p},\tilde{h})$, lorsque ε tend vers 0.

Tout d'abord, les deux premières équations de $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)_{(\varepsilon,Re,Fr)}$ impliquent que :

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}=\mathcal{O}(\varepsilon^2)\tag{2.12}$$

On obtient alors le problème limite suivant avec pour inconnues $(\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{h})$:

$$\left\{\begin{array}{ccl}
\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial \bar{z}} & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\partial \bar{z}}\right) \\
\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \dfrac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial \bar{z}} & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + 2\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}\partial \bar{z}}\right) \\
\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{z}} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}\partial \bar{z}} + 2\dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}\right) - G \\
\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} & = & 0 \\
\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathrm{u}}.\nabla \bar{\varphi} & = & 0
\end{array}\right.$$

On peut exprimer ce système en intégrant la 3ième et la 4ième équation :

c/ Expression de $\bar{p}$

La troisième équation va permettre de donner une expression de $\bar{p}$:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}\partial \bar{z}} + 2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}\right) - G$$

Rappelons les conditions aux limites en $\bar{z} = \bar{h}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, et notons pour alléger l'écriture des équations :

$$\bar{h} = \bar{h}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$$

On a en $\bar{z} = \bar{h}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{p}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h}) = 2\frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h})}{\partial \bar{z}^2}$$

En intégrant entre $\bar{h}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ et $\bar{z}$, on obtient donc :

$$\bar{p}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h})}{\partial \bar{y}} + 2\frac{\partial \bar{w}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)$$
$$-G(\bar{z} - \bar{h})$$

On utilise alors la conservation de la masse, et il reste :

$$\bar{p}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}\left(-\frac{\partial \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{h})}{\partial \bar{y}}\right) - G(\bar{z} - \bar{h})$$

d/ Donnons maintenant une expression de $\bar{w}$

Rappelons que $\bar{w} = 0$ sur Γ_{fond}, et utilisons la formule de la divergence :

$$\bar{w}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -\int_0^{\bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \xi)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \xi)}{\partial \bar{y}}\right) d\xi \qquad (2.13)$$

On obtient ainsi $(\overline{\mathcal{Q}})_{(Re,Fr)}$, problème visqueux hydrostatique, d'inconnues $(\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{h})$:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\partial \bar{z}}\right) - \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial \bar{z}} \\
\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + 2\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}\partial \bar{z}}\right) - \dfrac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial \bar{z}} \\
\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) & = & \dfrac{L^2}{H^2}\dfrac{1}{Re}\left(-\dfrac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial \bar{x}} - \dfrac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{h})}{\partial \bar{x}} - \dfrac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial \bar{y}} - \dfrac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{h})}{\partial \bar{y}}\right) - G(\bar{z}-\bar{h}) \\
\bar{w}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) & = & -\displaystyle\int_0^{\bar{z}} \left(\dfrac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)}{\partial \bar{y}}\right) d\xi \\
\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathrm{u}}.\nabla\bar{\varphi} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

Ce système possède alors les conditions aux limites suivantes :

L'équation de la surface libre reste la même.

La normale $\vec{n_0}$ à $\Gamma_{libre,0}$ est maintenant :

$$
\vec{n_0}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}=\bar{h}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

donc :

- sur $\Gamma_{libre,0}$ et sur $\Gamma_{tranche,0}$ on a :

$$
\bar{\sigma}_{xz} = \bar{\sigma}_{yz} = \bar{\sigma}_{zz} - \bar{p} = 0
$$

  c'est-à-dire :

$$
\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} = 2\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \bar{p} = 0
$$

- sur la surface du fond $\Gamma_{fond,0}$, on a :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\bar{w} & = & 0 \\
\bar{\sigma}_{xz} - \alpha.\bar{u} & = & 0 \\
\bar{\sigma}_{yz} - \alpha.\bar{v} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

  c'est-à-dire :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\bar{w} & = & 0 \\
\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} - \alpha.\bar{u} & = & 0 \\
\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} - \alpha.\bar{v} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

2.2.2 Intégration le long de la hauteur

A l'aide d'intégrations diverses sur chaque équation de $(\overline{\mathcal{Q}})$, nous allons obtenir un nouveau système.

a/ Cas général des deux premières équations de $(\overline{\mathcal{Q}})$

Détaillons les calculs dans le cas général d'une équation telle que les deux premières équations du système $(\bar{\mathcal{Q}})$, c'est-à-dire du type :

$$\int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial u}{\partial t}\,dz + \int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial u^2}{\partial x}\,dz + \int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial uv}{\partial y}\,dz + \int_0^{h}(t,x,y)\frac{\partial uw}{\partial z}\,dz + \int_0^{h}(t,x,y)\frac{\partial p}{\partial x}\,dz$$
$$= \int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,dz + \int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\,dz + \int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\,dz$$

Regroupons toutes les dérivées par rapport à x, par rapport à y, par rapport à z, puis appliquons les théorèmes d'intégration (voir Annexe A) pour chacun d'eux :

- $$\int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial (u^2+p-\sigma_{xx})}{\partial x}\,dz$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)} (u^2+p-\sigma_{xx})\,dz - \left[(u^2+p-\sigma_{xx}).\,\mathcal{U}.\,\mathcal{N}\right]_{z=0}^{z=h(t)}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)} (u^2+p-\sigma_{xx})\,dz - |(u^2+p-\sigma_{xx}).\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial x}|_{z=h(t)}$$

- $$\int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial (uv-\sigma_{xy})}{\partial y}\,dz = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)} (uv-\sigma_{xy})\,dz - [(uv-\sigma_{xy}).\,\mathcal{U}.\,\mathcal{N}]_0^{z=h(t)}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)} (uv-\sigma_{xy})\,dz - |(uv-\sigma_{xy}).\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial y}|_{z=h(t)}$$

- $$\int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial u}{\partial t}\,dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)} u\,dz - [u.\,\mathcal{U}.\,\mathcal{N}]_0^{z=h(t)}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)} u\,dz - |u.(-u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} + w)|_{z=h(t)}$$

- $$\int_0^{h(t,x,y)} \frac{\partial (uw-\sigma_{xz})}{\partial z}\,dz = \frac{\partial}{\partial dz}\int_0^{h(t,x,y)} (uw-\sigma_{xz})\,dz$$
$$= |uw-\sigma_{xz}|_{z=0}^{z=h(t)}$$

L'équation devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)} (u^2+p-\sigma_{xx})\,dz + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)} u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)} (uv-\sigma_{xy})\,dz$$
$$-|(u^2+p-\sigma_{xx}).\frac{\partial h}{\partial x} + (uv-\sigma_{xy}).\frac{\partial h}{\partial y} - u^2\frac{\partial h}{\partial x} - uv\frac{\partial h}{\partial y} + uw - uw - \sigma_{xz}|_{z=h(t)}$$
$$-|uw-\sigma_{xz}|_{z=0} = 0$$

ie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}(u^2+p-\sigma_{xx})\,dz+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)}u\,dz$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}(uv-\sigma_{xy})\,dz-|uw-\sigma_{xz}|_{\,z=0}=0$$

ie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}(u^2+p-\sigma_{xx})\,dz+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)}u\,dz$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}(uv-\sigma_{xy})\,dz+\alpha.u(t,x,y,z=0)=0$$

Conclusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)}u\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}u^2\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}p\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}uv\,dz$$

$$=-\alpha.u(t,x,y,z=0)+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}\sigma_{xx}\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}\sigma_{xy}\,dz \tag{2.14}$$

b/ Application aux deux premières équations du système $(\bar{Q})$

On met maintenant en évidence que 1/Re est négligeable, ce qui implique :

•

$$\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})=-G(\bar{z}-\bar{h})+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.15}$$

donc

$$\int_0^{\bar{h}}\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)\,d\xi=G(\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2})-G\bar{h}=G\frac{\bar{h}^2}{2}$$

• Pour les mêmes raisons :

$$\left\{\begin{array}{lllll}\bar{\sigma}_{xx} & = & 2\frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} & = & \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\ \bar{\sigma}_{xy} & = & \frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}) & = & \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\ \bar{\sigma}_{yy} & = & 2\frac{L^2}{H^2}\frac{1}{Re}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} & = & \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{array}\right.$$

• De plus, posons les vitesses moyennes, fonctions de t, x, y :

$u_m=\frac{1}{\bar{h}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}\int_0^{\bar{h}}\bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)\,d\xi$

$v_m=\frac{1}{\bar{h}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}\int_0^{\bar{h}}\bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)\,d\xi$

$(u^2)_m=\frac{1}{\bar{h}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}\int_0^{\bar{h}}\bar{u}^2(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)\,d\xi$

$(uv)_m=\frac{1}{\bar{h}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}\int_0^{\bar{h}}\bar{u}\bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\xi)\,d\xi$

et allégeons les notations avec :

$x=\bar{x}$

$y = \bar{y}$
$z = \bar{z}$
$t = \bar{t}$
$h = \bar{h}$

- On obtient alors les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t}hu_m + \frac{\partial}{\partial x}h(u^2)_m + \frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial x}h^2 + \frac{\partial}{\partial y}h(uv)_m = -\alpha.u_m \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}hv_m + \frac{\partial}{\partial x}h(uv)_m + \frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial y}h^2 + \frac{\partial}{\partial y}h(v^2)_m = -\alpha.v_m \tag{2.17}$$

c/ Intégration de l'expression concernant φ

Après intégration en $z \geq 0$ de la 5ième équation de $(\overline{\mathcal{Q}})$ et utilisation du théorème d'intégration, l'équation en h devient ainsi :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u(t,x,y,\xi)\,d\xi + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^h v(t,x,y,\xi)\,d\xi = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}hu_m + \frac{\partial}{\partial y}hv_m = 0 \tag{2.18}$$

d/ Le problème de Saint-Venant sans dimension, après intégration sur la hauteur ($\mathcal{Q}_m$)

Ce problème correspond aux équations $(2.16 - 2.18)$, avec pour inconnues $(\sigma, u_m, h,)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}hu_m + \frac{\partial}{\partial x}h(u^2)_m + \frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial x}h^2 + \frac{\partial}{\partial y}huv_m = -\alpha.u_m \\ \frac{\partial}{\partial t}hv_m + \frac{\partial}{\partial x}h(uv)_m + \frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial y}h^2 + \frac{\partial}{\partial y}h(v^2)_m = -\alpha.v_m \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}hu_m + \frac{\partial}{\partial y}hv_m = 0 \end{cases}$$

En termes de vecteurs, ce système devient le système de Saint-Venant (**SVV**) :

$$\frac{\partial}{\partial t}h\vec{u} + \mathbf{div}(h.\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{G}{2}\nabla h^2 = \alpha.\vec{u} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{u}) = 0 \tag{2.20}$$

où $\vec{u}$ est la vitesse moyennée dans l'épaisseur.

e/ Conditions initiales

On choisit comme conditions initiales :

$$\begin{cases} h(x,y,t=0) & = & h_0(x,y) \\ h.\vec{u}(x,y,t=0) & = & q_0(x,y) \end{cases}$$

f/ Conditions limites

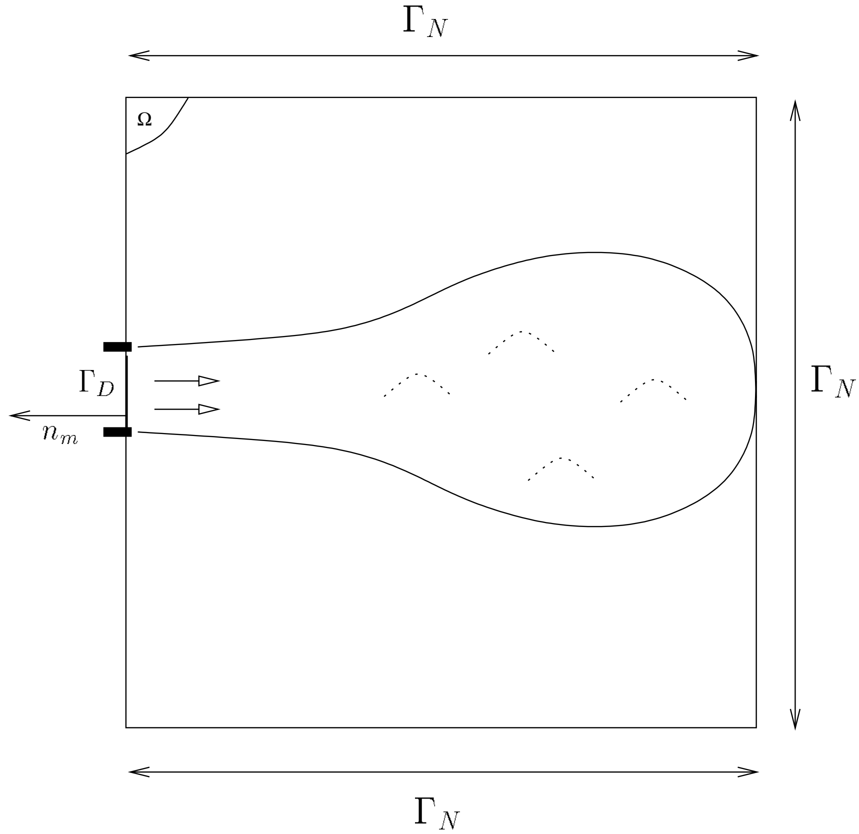


FIG. 2.3 – Conditions aux limites

- Sur Γ_D, donc au niveau des flux entrants (ie $\vec{\mathrm{u}}.\vec{n}_m < 0$), on impose une vitesse et une hauteur non nulles :

$$\begin{array}{rcl} \vec{\mathrm{u}} & = & \vec{\mathrm{u}}_\Gamma \\ h & = & h_\Gamma \end{array} \tag{2.21}$$

- Sur le reste du bord de Ω, on n'est pas sûr que le flux soit arrêté, c'est pourquoi on a choisi des conditions du type Neumann :

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial \vec{n}_m} = 0 \tag{2.22}$$

2.2.3 Le terme de diffusion

Dans le cas des avalanches et des laves torrentielles, on a besoin d'un terme de **diffusion**, qui détermine la façon dont le fluide va s'étaler.

Ce terme traduit l'effet de l'agitation thermique qui fait qu'un ensemble de grains microscopiques placés dans un liquide au repos se dispersent dans l'ensemble du liquide (typiquement une goutte d'encre dans de l'eau ou sur un papier buvard). Il traduit l'étalement spontané d'un matériau à l'intérieur de l'autre.[12]

Nous allons donc améliorer la précision des résultats, afin d'obtenir ce nouveau terme. Pour cela, on revient aux équations de $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)_{(\varepsilon,Re,Fr)}$, car le terme de diffusion a été considéré comme négligeable lors des simplifications. Rappelons que :
- $\varepsilon = \frac{H}{L}$
- $K = \frac{\eta}{L\rho U} = \frac{1}{\varepsilon^2 Re}$

Alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\eta}{\varepsilon^2 H\rho U}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} & = & \dfrac{\eta}{\varepsilon H\rho U}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} & = & \dfrac{K}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \dfrac{\eta}{\varepsilon^2 H\rho U}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} & = & \dfrac{\eta}{\varepsilon H\rho U}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} & = & \dfrac{K}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \end{array}\right.$$

On a vu en (2.12) que

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

De plus, les conditions aux limites sur Γ_{libre} impliquent que :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\Big|_{z=h} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et celles sur Γ_{libre} impliquent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et :

$$\bar{u}(t,x,y,z) = \bar{u}(t,x,y,0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$
$$\bar{v}(t,x,y,z) = \bar{v}(t,x,y,0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

ce qui implique que

$$\bar{u}(t,x,y,z) = u_m(t,x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{2.23}$$

$$\bar{v}(t,x,y,z) = v_m(t,x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{2.24}$$

D'après les équations (2.15) - (2.24), et en utilisant la formule de la divergence, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{K}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} & = & \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}(K\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}) - \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}}(K\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}) \\ & = & \dfrac{1}{Fr^2}\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial t}u_m + u_m\dfrac{\partial}{\partial x}u_m + v_m\dfrac{\partial}{\partial y}u_m + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ & = & -\dfrac{\alpha}{h}.\bar{u}(t,x,y,z=0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{array}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{K}{\varepsilon^2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\alpha}{h}.\bar{v}(t,x,y,z=0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Intégrons entre 0 et z, et utilisons les conditions aux limites, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{K}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} & = & \alpha.\bar{u}(t,x,y,z=0)(1-\dfrac{z}{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \dfrac{K}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} & = & \alpha.\bar{v}(t,x,y,z=0)(1-\dfrac{z}{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{array}\right.$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{u}(t,x,y,z) & = & \bar{u}(t,x,y,z=0)\left(1+\dfrac{\varepsilon^2\alpha z}{K}\left(1-\dfrac{z}{2h}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \bar{v}(t,x,y,z) & = & \bar{v}(t,x,y,z=0)\left(1+\dfrac{\varepsilon^2\alpha z}{K}\left(1-\dfrac{z}{2h}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{array}\right.$$

Enfin, passons à u_m et v_m en intégrant entre 0 et h et en divisant par h :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_m(t,x,y,z) & = & \left(1+\dfrac{\alpha\varepsilon^2}{3K}h\right)\bar{u}(t,x,y,z=0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ v_m(t,x,y,z) & = & \left(1+\dfrac{\alpha\varepsilon^2}{3K}h\right)\bar{v}(t,x,y,z=0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{array}\right. \tag{2.25}$$

(2.25) permet de prouver que :

$$(u^2)_m = (u_m)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$(v^2)_m = (v_m)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$(uv)_m = u_m v_m + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

L'équation de $\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)_{(Re,Fr)}$ exprimant $\bar{p}$ donnait :

$$\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = K\left(-\frac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{h})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{h})}{\partial \bar{y}}\right) + G(h-\bar{z})$$

donc :

$$\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = K\left(-2\frac{\partial \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},0)}{\partial \bar{x}} - 2\frac{\partial \bar{v}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},0)}{\partial \bar{y}}\right) + G(h-\bar{z})$$

d'où :

$$\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = G(h-\bar{z}) - 2K\left(\frac{\partial u_m}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_m}{\partial \bar{y}}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.26}$$

Si on revient à $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)_{(\varepsilon,Re,Fr)}$, on a maintenant les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \dfrac{\partial \tilde{u}\tilde{w}}{\partial \tilde{z}} & = & K\left(2\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}\right) + \dfrac{K}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}\right) \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{y}} + \dfrac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\partial \tilde{v}\tilde{w}}{\partial \tilde{z}} & = & K\left(2\dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}\right) + \dfrac{K}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}}\right) \end{array}$$

Dans $\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)_{(Re,Fr)}$, elles deviennent alors, sachant que $\frac{K}{\varepsilon}$ est indépendant de ε :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar u}{\partial \bar t}+\frac{\partial \bar u^2}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar u\bar v}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar u\bar w}{\partial \bar z} &= K\left(2\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2}+\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2}+\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x\partial \bar y}\right)+\frac{\partial}{\partial \tilde z}\frac{K}{\varepsilon^2}\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\\
\frac{\partial \bar p}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar v}{\partial \bar t}+\frac{\partial \bar v^2}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar u\bar v}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar v\bar w}{\partial \bar z} &= K\left(\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x^2}+2\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}+\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x\partial \bar y}\right)+\frac{\partial}{\partial \tilde z}\frac{K}{\varepsilon^2}\frac{\partial \bar v}{\partial \tilde z}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar u}{\partial \bar t}+\frac{\partial \bar u^2}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar u\bar v}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar u\bar w}{\partial \bar z} &= K\left(2\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2}+\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2}+\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x\partial \bar y}\right)-\frac{\alpha}{h}.\bar u(t,x,y,z=0)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\frac{\partial \bar p}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar v}{\partial \bar t}+\frac{\partial \bar v^2}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar u\bar v}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar v\bar w}{\partial \bar z} &= K\left(\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x^2}+2\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}+\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x\partial \bar y}\right)-\frac{\alpha}{h}.\bar v(t,x,y,z=0)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

L'intégration de $\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)_{(Re,Fr)}$ entre 0 et h(x,y,t) donne donc, appliquant (2.14) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)}\bar u\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}\bar u^2\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}\bar p\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}\bar u\bar v\,dz$$

$$=-\alpha.\bar u(t,x,y,z=0)+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}2K\frac{\partial \bar u}{\partial \bar x}\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}K\left(\frac{\partial \bar u}{\partial \bar y}+\frac{\partial \bar v}{\partial \bar x}\right)dz+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h(t,x,y)}\bar v\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}\bar v^2\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}\bar p\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}\bar u\bar v\,dz$$

$$=-\alpha.\bar v(t,x,y,z=0)+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{h(t,x,y)}2K\frac{\partial \bar v}{\partial \bar y}\,dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(t,x,y)}K\left(\frac{\partial \bar v}{\partial \bar x}+\frac{\partial \bar u}{\partial \bar y}\right)dz+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Avec ceci et utilisant (2.26), on a donc le système ($\mathcal{Q}_m$) suivant, pour $h>0$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}hu_m+\frac{\partial}{\partial x}h(u_m)^2+\frac{\partial}{\partial y}hu_mv_m+\frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial x}h^2=-\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha\varepsilon^2h}{3K}}.u_m\\
&\qquad+K\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial hu_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial hu_m}{\partial y}+3\frac{\partial hv_m}{\partial x}\right)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
&\frac{\partial}{\partial t}hv_m+\frac{\partial}{\partial y}h(v_m)^2+\frac{\partial}{\partial x}hu_mv_m+\frac{G}{2}\frac{\partial}{\partial y}h^2=-\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha\varepsilon^2h}{3K}}v_m\\
&\qquad+K\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(4\frac{\partial hv_m}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial hv_m}{\partial x}+3\frac{\partial hu_m}{\partial y}\right)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}hu_m+\frac{\partial}{\partial y}hv_m=0
\end{aligned}\right.$$

Passons-le en notation vectorielle, avec :

$$\vec{\mathrm{u}}=(\mathrm{u_m},\mathrm{v_m})$$

On obtient **le système de Saint-Venant (SVV)** suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}h\vec{\mathrm{u}}+\mathrm{div}h.\vec{\mathrm{u}}\otimes\vec{\mathrm{u}}+\frac{G}{2}\nabla h^2-K\Delta(h\vec{\mathrm{u}})-3K\nabla\mathrm{div}(h\vec{\mathrm{u}})=-\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha\varepsilon^2h}{3K}}.\vec{\mathrm{u}} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div }(h\vec{u}) = 0 \tag{2.28}$$

Enfin, on pose

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha \varepsilon^2 h}{3K}}$$

coefficient de friction modifié, qui est en fait la limite de α quand ε est très petit, et K très grand.

On obtient alors le système de Saint-Venant (SVV), de paramètres K, G, $\hat{\alpha}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} h\vec{u} + \text{div} h.\vec{u} \otimes \vec{u} + \frac{G}{2} \nabla h^2 - K\Delta(h\vec{u}) - 3K\nabla \text{div}(h\vec{u}) = -\hat{\alpha}.\vec{u} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div }(h\vec{u}) = 0 \tag{2.30}$$

2.2.4 Le terme de fond

Le fait que nous appliquions le modèle à un domaine situé sur la montagne nécessite un terme de fond. En effet, le fluide s'écoule sur un domaine qui possède un certain relief, défini en chacun de ses points $(x, y) \in \Gamma_{fond}$:

$Z(x, y)$ représente la hauteur du fond Γ_{fond}

$Z(x, y) + h(x, y)$ est la hauteur de la surface libre Γ_{libre}

Alors le terme de pression est modifié : ce n'est plus seulement ρ **g** $h\nabla h$ mais ρ **g** $h\nabla(h + Z)$.

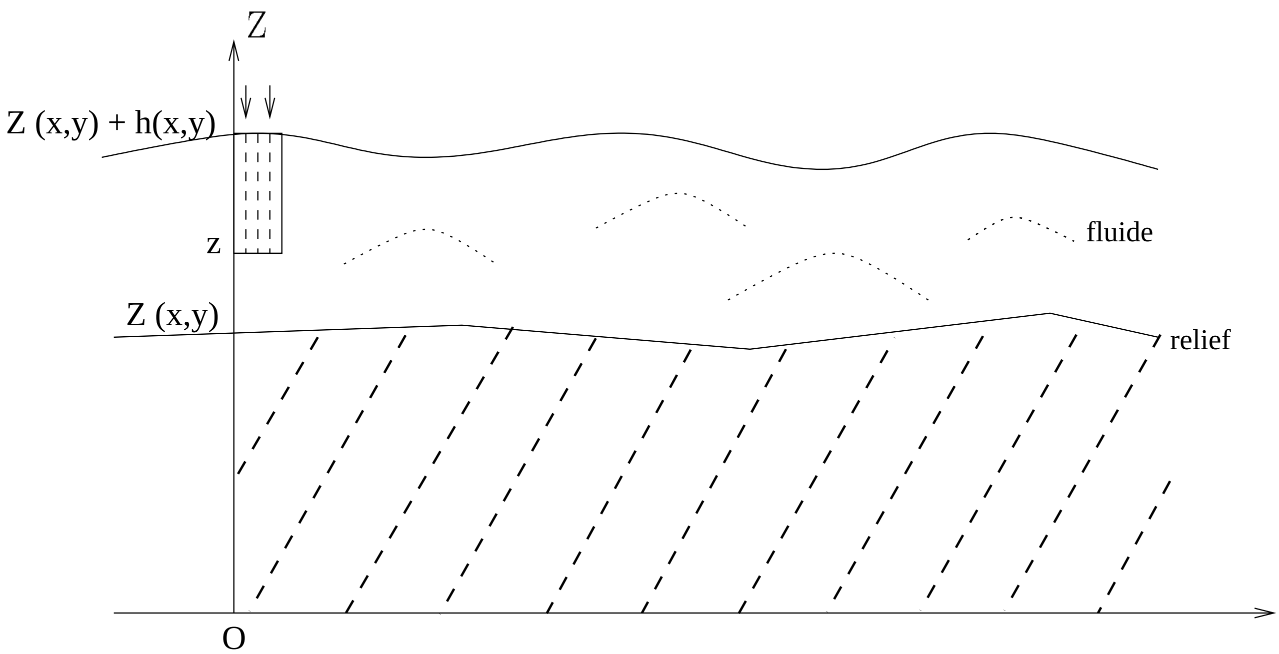


Fig. 2.4 – Le terme de fond

En effet, la pression appliquée en tout z est exercée par toute la colonne de fluide qui est au-dessus de z, donc de $h(x,y)+Z(x,y)$ à z (voir figure).

En tenant compte de cette modification du terme de pression, on obtient alors le problème de Saint-Venant **(SVV)** suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}h\vec{u} + \mathbf{div} h.\vec{u} \otimes \vec{u} + Gh\nabla(h+Z) - K\Delta(h\vec{u}) - 3K\nabla \mathrm{div}(h\vec{u}) = -\hat{\alpha}.\vec{u} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{u}) = 0 \tag{2.32}$$

avec $h(x,y) > 0, Z(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \Gamma_{fond}$.

2.2.5 Le terme de seuil

On considère la boue et la neige comme des fluides à seuil, c'est-à-dire qu' ils possèdent dans le tenseur σ un terme supplémentaire, le seuil de contrainte (σ_0), en dessous duquel ces fluides sont à l'arrêt. Si le tenseur est supérieur en norme à ce seuil, alors le gradient de vitesse est différent de 0 et le fluide poursuit son chemin, sinon il stoppe.

Typiquement, l'eau n'a pas de seuil, elle suit une loi Newtonienne, et la boue argileuse suit une loi non Newtonienne. Ce terme supplémentaire, mis en évidence pour la première fois en 1922 par Bingham, est très utile puisque l'application de ces recherches a notamment pour but de prévoir où et quand le fluide s'arrêtera, afin de déterminer entre autres les risques d'inondation pour les villages implantés dans la vallée.

a/ Le modèle de Bingham

Dans cette section, on introduit un nouveau nombre sans dimension, le nombre de Bingham, qui compare les effets de seuil aux effets visqueux [3] :

$$Bi = \frac{\sigma_0 L}{\eta U}$$

Le tenseur de Cauchy total vaut toujours (2.1) :

$$\sigma_T = -pI + \sigma$$

mais σ suit la loi de comportement de Bingham, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \sigma = 2\eta D(\vec{u}) + \sigma_0 \dfrac{\mathrm{D}(\vec{u})}{|\mathrm{D}(\vec{u})|} & si\ D(\vec{u}) \neq 0 \\ \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & si D(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

où $|.|$ est la norme suivante :

$$|A| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} (A_{ij})^2 \right)^{1/2}$$

et σ_0 est le **seuil de contrainte**, $\sigma_0 \geq 0$.

[3] grossièrement : $Bi = \frac{seuil}{viscosite}$

b/ Application à $(\mathcal{P})$

En tenant compte de ce nouveau terme dans le tenseur des contraintes, le terme provenant de σ dans $\left(\tilde{\mathcal{P}}\right)$ devient donc, pour $D(\vec{u}) \neq 0$:

$$\frac{\eta U}{L^2} \tilde{div} 2\tilde{D}(\tilde{\vec{u}}) + \frac{\sigma_0}{L} \tilde{div} \frac{\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})}{\left|\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})\right|}$$

puis on multiplie le système par $\frac{L}{\rho U^2}$ donc ce terme devient :

$$\frac{\eta}{\rho U L} \tilde{div} \tilde{D}(\tilde{\vec{u}}) + \frac{\sigma_0}{\rho U^2} \tilde{div} \frac{\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})}{\left|\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})\right|}$$

ie

$$K \tilde{div} \tilde{D}(\tilde{\vec{u}}) + Bi.K \tilde{div} \frac{\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})}{\left|\tilde{D}(\tilde{\vec{u}})\right|}$$

c/ Moyennage en épaisseur

Le moyennage dans l'épaisseur est beaucoup plus complexe, car on a maintenant dans la divergence la norme de $\mathrm{D}(\vec{u})$, qui dépend également de x, y, z. Les calculs étant fastidieux, une autre technique consiste à considérer ce terme dans un problème en 2D, avec donc une seule dimension pour la surface où s'écoule le fluide, puis d'utiliser ces résultats pour donner une estimation du problème avec une surface composée de deux dimensions. Par manque de temps, la démonstration n'en sera pas faite, nous donnerons simplement le résultat obtenu par Coussot [8] qui lui a utilisé le tenseur d'Herschel-Buckley, que nous allons définir.

d/ Le modèle de Herschel-Buckley

Ce modèle est considéré comme le plus général pour décrire le tenseur des contraintes de viscosité. Il contient d'ailleurs comme cas particulier le modèle de Bingham.

Dans ce cas, le tenseur suit la loi de comportement d'Herschel-Buckley, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \sigma = 2\eta\left(|D(\vec{u})|\right).D(\vec{u}) + \sigma_0 \dfrac{\mathrm{D}(\vec{u})}{|\mathrm{D}(\vec{u})|} & si\ D(\vec{u}) \neq 0 \\ & \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & si D(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

où :

$$\eta(\xi) = \eta_0.\xi^{p-2}, p \geq 1$$

où η_0 est une constante de **viscosité** .

On remarque que pour $p = 2$, on reconnaît le modèle de Bingham.

e/ Choix de p

Le choix de p est primordial. Notre choix sera celui du CEMAGREF pour le code de calcul, soit $p = 4/3$. En effet, ce modèle semble être le plus approprié au comportement des laves torrentielles et des coulées de boue (COUSSOT, 1992)(voir [8]). En pratique, le choix de p par Coussot était 4/3 car il correspondait particulièrement à ses mesures rhéologiques. Cependant, il n'existe pas d'explication théorique ou physique à cette valeur.

Par ce choix, et en calculant la formulation variationnelle, il est clair que $\mathrm{D}(\vec{u}) \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega)$, c'est-à-dire $\vec{u} \in \mathrm{W}^{1,4/3}$.

Le modèle choisi est donc :

$$\begin{cases} \sigma = 2\eta_0 \dfrac{D(\vec{u})}{|D(\vec{u})|^{2/3}} + 2\sigma_0 \dfrac{D(\vec{u})}{|D(\vec{u})|} & si\ D(\vec{u}) \neq 0 \\ \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & si\ D(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \sigma = \left(\dfrac{2\eta_0}{|D(\vec{u})|^{2/3}} + \dfrac{2\sigma_0}{|D(\vec{u})|} \right) D(\vec{u}) & si\ D(\vec{u}) \neq 0 \\ \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & si D(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

et le terme de seuil obtenu est :

$$\frac{\beta}{h^{1/3}|\vec{u}|^{2/3}}.\vec{u} + Bi\,.\frac{h}{|\vec{u}|}.\vec{u} \qquad \text{si } \vec{u} \neq 0$$

où $\vec{u}$ est la vitesse moyennée dans l'épaisseur.
β est un coefficient sans dimension.

On peut donc maintenant l'ajouter au système (**SVV**) de la page 18 (système (2.31) -(2.32)), sans oublier le terme de friction $\hat{\alpha}\vec{u}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} h\vec{u} + \mathrm{div}\,(h.\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{G}{2}\nabla h^2 + Gh\nabla Z - K\Delta(h\vec{u}) - 3K\nabla \mathrm{div}\,(h\vec{u})$$

$$= -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\left(\beta\left(\frac{|\vec{u}|}{h}\right)^{1/3} + Bi\,h\right) + \hat{\alpha}\vec{u} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{u}) = 0 \tag{2.34}$$

avec $h(x,y) > 0$ et $Z(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \Gamma_{fond}$.

2.2.6 Conclusion

Tenant compte de tous les effets des laves torrentielles et des avalanches à neige lourde, c'est-à-dire l'effet de seuil, la viscosité, et l'inertie avec du relief, nous obtenons le problème de Saint-Venant suivant :
Trouver

$$\vec{u} : \begin{array}{ccc} I\!R^+ \mathrm{x} I\!R & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (t,x) & \longmapsto & \vec{u}(t,x) \end{array}$$

et

$$h : \begin{array}{ccc} I\!R^+ \mathrm{x}\Omega & \longrightarrow & I\!R^+ \setminus \{0\} \\ (x,y,t) & \longmapsto & h(x,y,t) \end{array}$$

tels que :

$$\frac{\partial}{\partial t} h\vec{\mathrm{u}} + \mathbf{d}\mathrm{iv} h.\vec{\mathrm{u}} \otimes \vec{\mathrm{u}} + \frac{G}{2}\nabla h^2 + Gh\nabla Z - K\Delta(h\vec{\mathrm{u}}) - 3K\nabla \mathrm{div}(h\vec{\mathrm{u}})$$

$$= -\frac{\vec{\mathrm{u}}}{|\vec{\mathrm{u}}|}\left(\left(\frac{|\vec{\mathrm{u}}|}{h}\right)^{1/3} + Bih\right) + \hat{\alpha}\,\vec{\mathrm{u}}\ si\ \vec{\mathrm{u}} \neq 0 \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{\mathrm{u}}) = 0 \tag{2.36}$$

avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} h(x,y,t=0) & = & h_0(x,y) \\ \\ h.\vec{\mathrm{u}}(x,y,t=0) & = & q_0(x,y) \end{cases}$$

et comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{u}} & = & \vec{\mathrm{u}}_\Gamma & sur\Gamma_D \\ h & = & h_\Gamma & sur\Gamma_D \\ \\ \dfrac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial \vec{n}_m} & = & 0 & sur\Gamma_N \end{cases}$$

où $\vec{n}_m$ est la normale sortante à la frontière de Ω.

2.2.7 Le modèle du CEMAGREF

Le CEMAGREF, dont nous allons utiliser le code de calcul, a quant à lui choisi le modèle de Herschel-Buckley, mais en négligeant les termes de diffusion (voir [14]).

Ceci revient à reprendre le modèle démontré (2.19) - (2.20), en remplaçant le terme du tenseur par celui énoncé en (2.2.4.e/).

Enfin, le système (**SVV**) sera redimensionné par le changement de variables inverse de celui opéré en (2.2.1).

Finalement, on obtient le modèle utilisé pour nos calculs effectués en chapître 3 et qui est le suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} h\vec{\mathrm{u}} + \mathbf{d}\mathrm{iv} h.\vec{\mathrm{u}} \otimes \vec{\mathrm{u}} + \frac{g}{2}\nabla h^2 + gh\nabla Z = -\frac{\vec{\mathrm{u}}}{|\vec{\mathrm{u}}|^{2/3}}\frac{\eta_0}{\rho h^{1/3}} - \frac{\vec{\mathrm{u}}}{|\vec{\mathrm{u}}|}\frac{\sigma_0}{\rho}\ si\ \vec{\mathrm{u}} \neq 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\ (h\vec{\mathrm{u}}) = 0 \tag{2.38}$$

avec $h(x,y) > 0$ et $Z(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \Gamma_{fond}$.

Chapitre 3

Simulation numérique

La simulation numérique a été basée sur de réelles données topographiques, prélevées avant et après une lave torrentielle ayant eu lieu dans la vallée de la Maurienne. Ces données proviennent de relevés effectués par le service RTM (Restauration Des Montagnes) de Savoie le 30 Avril 1997 et le 17 Mai 1999, soit trois jours après la coulée de boue.

3.1 L'événement du 14 Mai 1999 sur le torrent du Pousset

Le 14 Mai 1999, le Pousset, torrent affluent de l'Arc et qui s'y jette en amont de Saint-Michel de Maurienne, provoque la troisième lave torrentielle en 2 mois. L'événement fût décrit ainsi :

En deux points du chenal habituellement emprunté par le torrent, un front de lave torrentielle s'est bloqué et a entraîné un débordement latéral sur la rive gauche du reste de la vague. Ce fluide s'est alors étalé sur le cône de déjection puis atteignant la route du chantier autoroutier, y a arraché la glissière de sécurité, puis a fini son parcours dans l'Arc après avoir sauté le talus en aval du chantier .

Une deuxième vague a ensuite débordé de la même manière, mais environ 100m plus haut, restant assez bien canalisée et provoquant nettement moins de dégâts.

3.2 Le site de simulation

Le site particulièrement étudié dans cette expérience correspond à celui concerné par la première vague. Il s'agit donc du débordement par deux entrées d'une coulée de boue qui a eu lieu sur le versant voisin, celui-ci étant régulièrement inondé et assez bien maîtrisé. Par contre le versant que nous étudions ne connaît pas souvent ce problème, les dégâts ne sont alors pas négligeables, comme toujours dans les catastrophes non prévues à l'avance par l'homme. La pente calculée après le passage du fluide est en moyenne de 15%, et le domaine est d'environ 150m de large et 265m de long.

Voici une représentation en 3D du site sur lequel les calculs vont être effectués. On voit nettement sur le maillage en amont, le cône de déjection du Pousset, la première rupture de pente jusqu'au chantier autoroutier, puis le deuxième talus jusqu'au lit de l'Arc, dans laquelle la lave s'est arrêtée, la pente étant réduite et notre fluide étant à seuil.

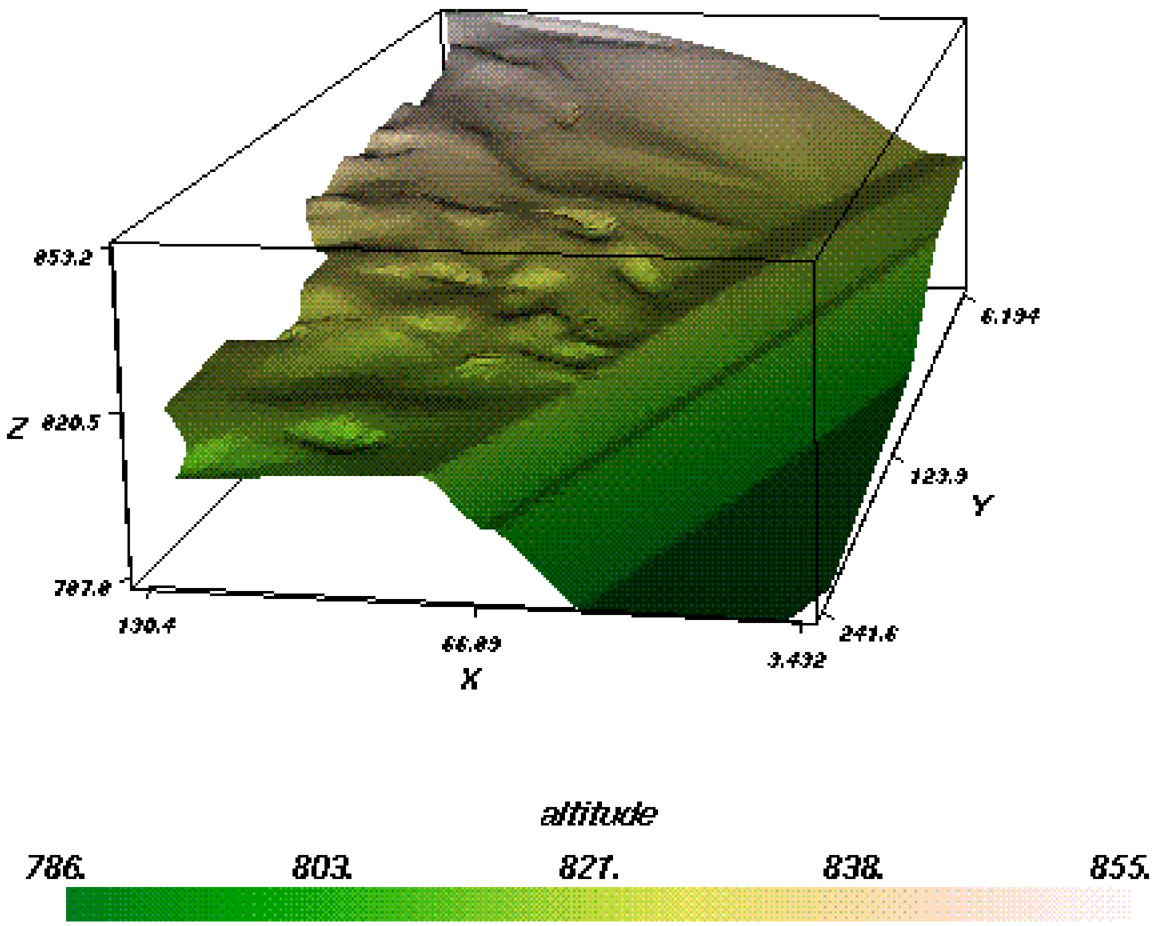


Fig. 3.1 – Représentation en 3D du site

3.3 Le mailleur

A partir des donnés du CEMAGREF contenant les coordonnées (x,y) et la hauteur en chacun de ces points de la vallée, on a réalisé plusieurs maillages.
Ce premier maillage n'a pas été adapté au relief, cependant il est très fin et a permis d'obtenir des résultats précis. On remarque également que les quadrangles ont étés modifiés afin d'être toujours parallèles aux bords.

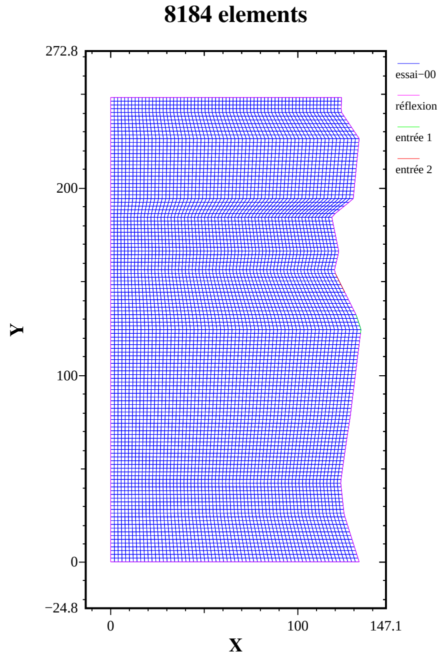


FIG. 3.2 – Maillage non adapté

Les autres maillages ont été adaptés à l'aide du mailleur BAMG (Bidimensional Anisotropic Mesh Generator)(voir [13]). Ce générateur permet de construire un maillage à partir d'une géométrie, et de construire alors un maillage adapté à partir du premier maillage, ce qui permet de l'affiner. Il permet aussi d'interpoler sur le maillage créé des solutions P1 définies sur le maillage précédent.

On a ainsi obtenu plusieurs maillages, qui diffèrent par la densité choisie lors de l'application de BAMG, c'est-à-dire le facteur multiplicatif de la taille du maillage. On a également choisi d'utiliser des triangles et des quadrangles, car le maillage semblait ainsi plus homogène. Enfin, on s'est limité à deux itérations de BAMG car après 20 itérations, un petit tremplin devenait un terrible obstacle, ou, en termes plus sérieux, le mailleur développait une petite erreur tout le long du bord afin d'obtenir une continuité, ce qui en l'occurence donnait des résultats très différents de la réalité...

Les différents maillages en deux dimensions utilisés pour les calculs seront plus facilement représentables pour l'esprit avec une première visualisation en 3D du maillage de densité $h = 0,3$, dont la simulation est page 42 ; on repèrera facilement :

- les entrées de la coulée de boue situées environ au milieu de l'arête gauche du domaine
- les deux ruptures de pente entre lesquelles se situe l'autoroute, car le mailleur a particulièrement affiné ces endroits où la vitesse subit une accélération ou un ralentissement forts
- le lit de l'Arc ou le Pousset va finir sa course.

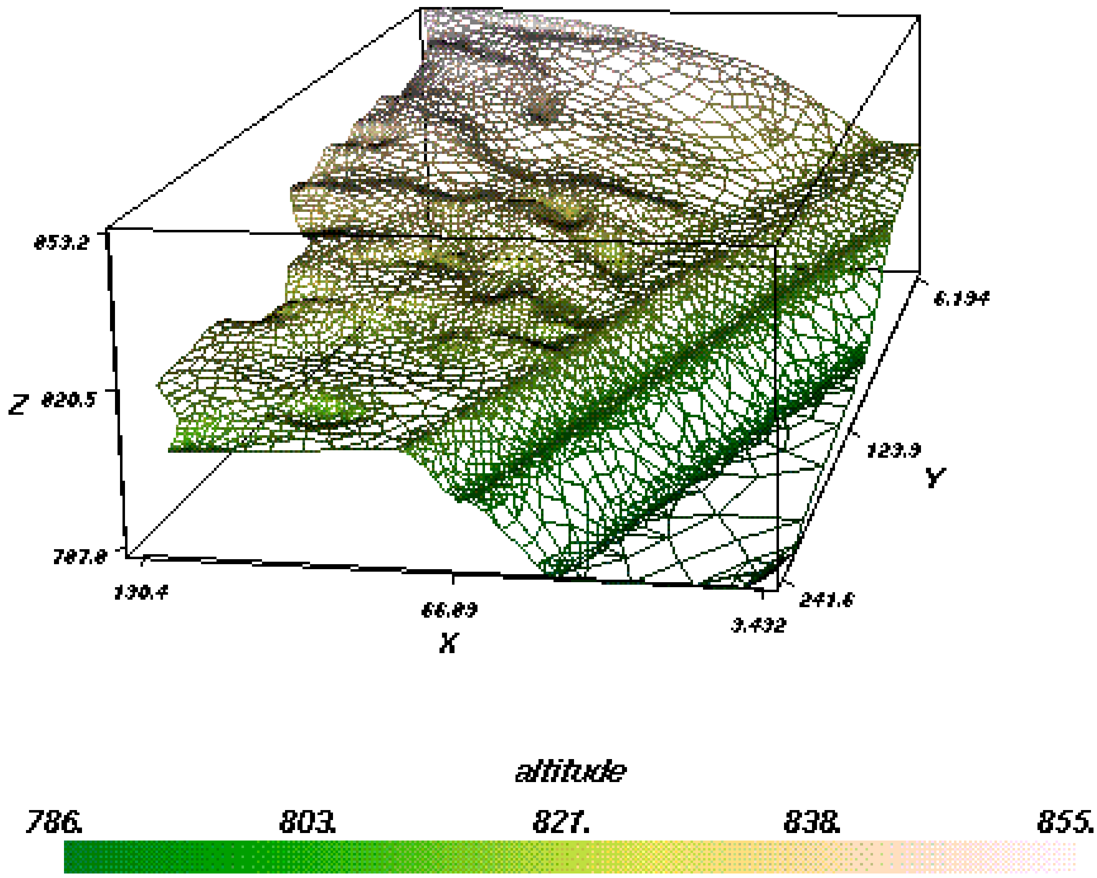


FIG. 3.3 – Représentation en 3D avec le maillage ($h = 0,3$)

Voici maintenant les différents maillages (en deux dimensions) que l'on utilisera pour faire les calculs numériques (attention, l'orientation n'est plus la même) :

- les entrées de la coulée de boue sont situées environ au milieu de l'arête droite du domaine
- les deux ruptures de pente entre lesquelles se situe l'autoroute sont situées en haut à gauche, parallèlement à une diagonale
- le lit de l'Arc est dans le coin haut gauche.

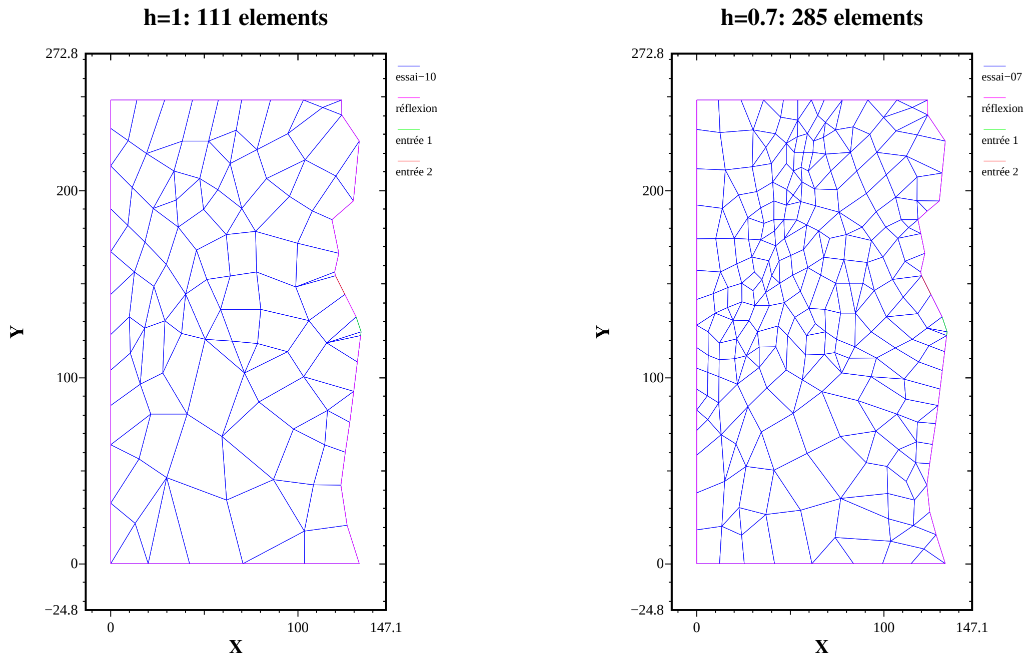


Fig. 3.4 – Maillages adaptés (2 itérations de BAMG)

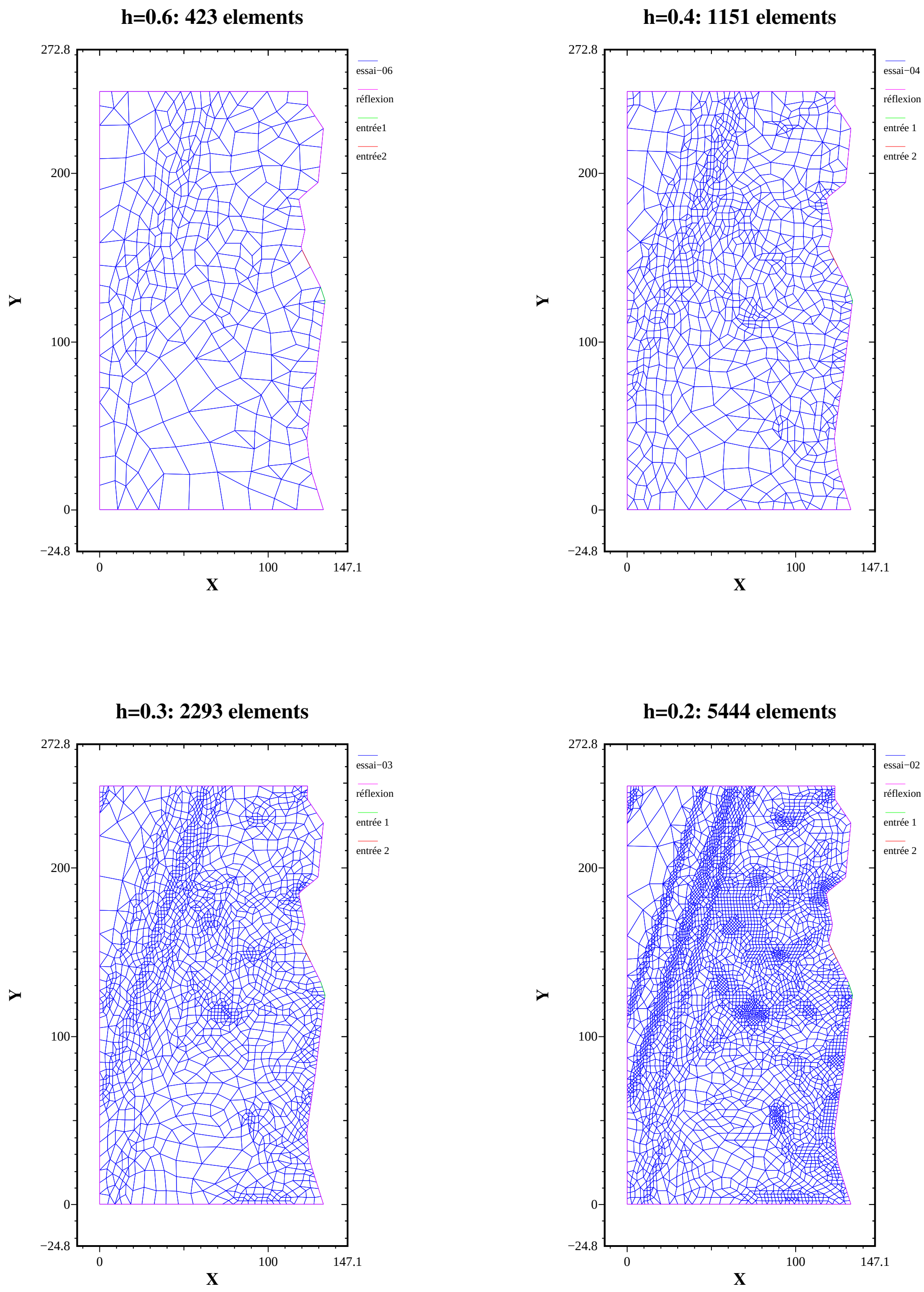


FIG. 3.5 – Maillages adaptés plus fins(2 itérations de BAMG)

3.4 Choix des conditions aux limites, des conditions initiales et des paramètres rhéologiques

- Le domaine possède deux entrées du flux, l'entrée 1 et l'entrée 2, la plus importante étant l'entrée 1. Les conditions aux bords choisies pour ce problème sont donc :
  - Pour les deux entrées, **condition d'entrée** en débit et/ou en hauteur (au niveau de la zone de débordement).
  - Sur le reste de la frontière du domaine, on impose une **condition de réflexion**, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il se passe la même chose par symétrie d'axe l'arête du bord.
- De plus, le CEMAGREF a choisi d'imposer un débit constant de 6,5 m^3/s sur une distance de 10 mètres contenant les entrées 1 et 2.
- Enfin, les paramètres rhéologiques choisis sont :
  - un rapport $\dfrac{\sigma_0}{\rho}$ compris entre 1,25 et 1,75
  - un rapport $\dfrac{\eta}{\sigma_0}$ égal à 0,3.

3.5 Le code de calcul

Pour obtenir les résultats numériques, on a utilisé un programme basé sur le code de calcul développé par Jean-Paul Vila en 1986, au CEMAGREF, pour l'étude des problèmes du type rupture de barrage. Ce code utilise une technique de volumes finis, avec un schéma de Van Leer (ordre 2) en espace pour résoudre des équations de St VENANT en 2D d'espace:
$Ut + F(U)x + G(U)y = 0$ avec $U = (h, hu, hv)$,
$F(U) = (hu, hu2 + gh2/2, huv)$
$G(U) = (hv, huv, hv2 + gh2/2)$.
Le programme est écrit en Fortran 77.

Il reçoit des fichiers donnant la structure du maillage, la topographie, les conditions initiales, les conditions aux bords, les paramètres rhéologiques et autres. Le fichier de sortie est constitué de la hauteur de fluide h à chaque itération, du flux q_x dans la direction x, du flux q_y dans la direction y, et des coordonnées (x,y) de chaque sommet du maillage. Les résultats sont en P0.

Le calcul est effectué de 0 seconde, avec les conditions aux limites et les données initiales précisées en 3.4, à 5000 secondes (durée d'écoulement réel). A priori, l'écoulement est fini après ce temps.

Nous faisons alors subir aux fichiers de sortie 3 codes de traitements :

- 1/ CEMOUT2BRANCH qui donne les mêmes informations que les fichiers d'entrée mais en ayant transformé les éléments en type P1.
- 2/ BRANCH2DAT qui prend en entrée ces fichiers de type P1 et donne un fichier contenant :
  - Le volume de fluide en fonction du temps
  - La surface active en fonction du temps
  - La hauteur maximale du fluide en fonction du temps
  - Le flux maximal du fluide en fonction du temps
  - La norme L2 du flux q en fonction du temps

– 3/ BRANCH2DIFF qui prend le même fichier en entrée que BRANCH2DAT et calcule de nouvelles informations sur l'écoulement :

  – $\left|\dfrac{dh}{dt}\right|_0$ en fonction du temps
  – $\left|\dfrac{dq}{dt}\right|_0$ en fonction du temps
  – $\left|\dfrac{dh}{dt}\right|_\infty$ en fonction du temps
  – $\left|\dfrac{dq}{dt}\right|_\infty$ en fonction du temps

3.6 Simulation numérique

Ces images proviennent de la simulation faite à partir du maillage de densité $h = 0,3$. Elles ont effectuées aux temps 0s, 10s, 20s, 40

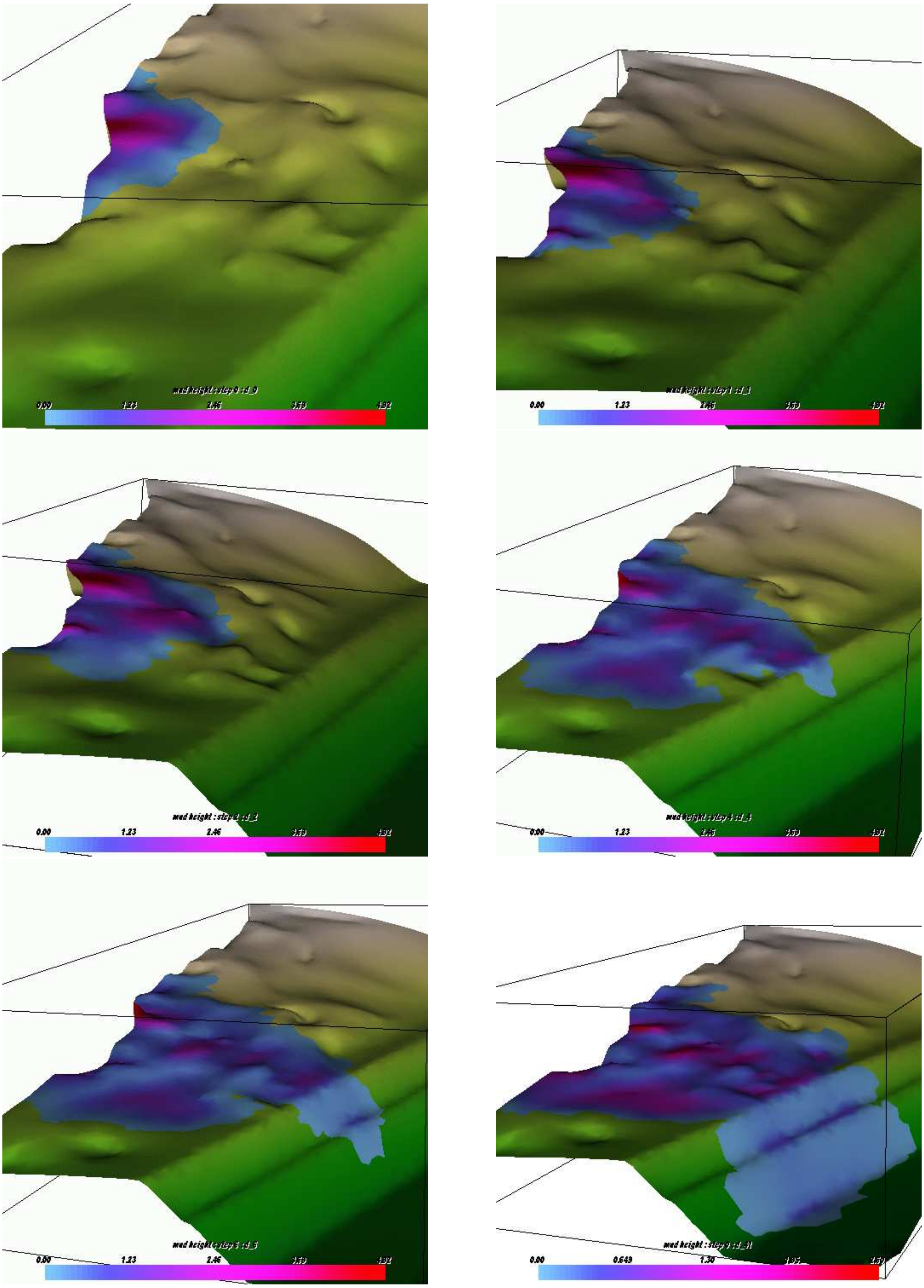


FIG. 3.6 – temps = 0 s, 10 s, 20 s, 40 s, 60 s , 7 min

3.7 Résultats

Selon la densité choisie du maillage, les résultats diffèrent mais le comportement général reste le même.

3.7.1 Progression du volume de fluide en fonction du temps

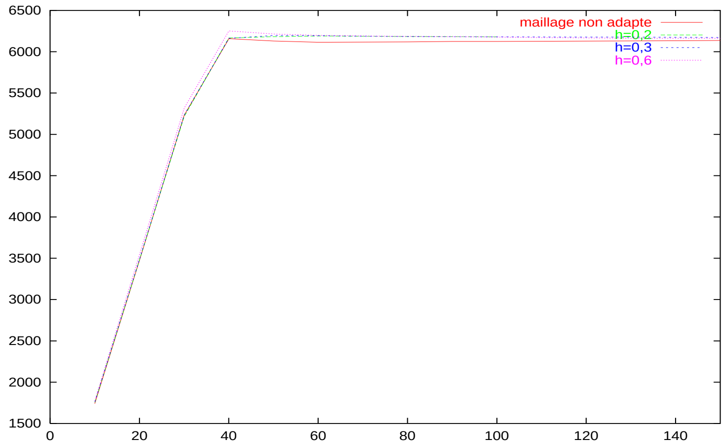


FIG. 3.7 – Progression du volume de fluide en fonction du temps

1ère phase : [0,35 s] : Le volume augmente d'abord très violemment.

2ème phase : [35 s,40 s] : De $t = 35$ s à $t = 40$ s environ, il augmente encore, mais moins brusquement.

3ème phase : [40 s,5000 s] : Le volume devient constant après 40 s (cependant il est supérieur au véritable volume, avec une erreur de 5 à 10%), pendant que le fluide s'étale sur le reste du domaine, étalement que l'on observera avec la représentation de la surface active.

Explications : Tout d'abord, rappelons que la situation est celle d'un débordement d'une coulée qui avait lieu sur un autre versant. De fait, le fluide arrive à l'entrée de notre domaine avec une certaine vitesse, ce qui explique l'arrivée "massive" de fluide et donc son augmentation importante et rapide de volume.

On peut alors considérer le comportement du fluide à l'entrée du domaine comme analogue à un problème du type "**rupture de barrage**".

Visualisons la hauteur de fluide à l'entrée du domaine avec la figure suivante :

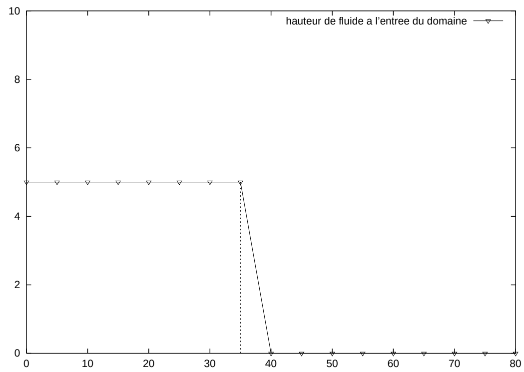


FIG. 3.8 – Rupture de barrage

On peut observer l'effet d'inertie pendant les 35 premières secondes, puis à $t = 35$s le mur de fluide s'écroule jusqu'à réduire sa hauteur (à l'entrée) à 0, pendant que le fluide s'étale sur le reste du domaine. Le comportement de la boue à l'entrée du domaine est exactement le même, ce qui explique nos résultats.

3.7.2 Progression de la surface active en fonction du temps

La **surface active** représente la proportion de surface occupée par le fluide par rapport à la surface totale du domaine.

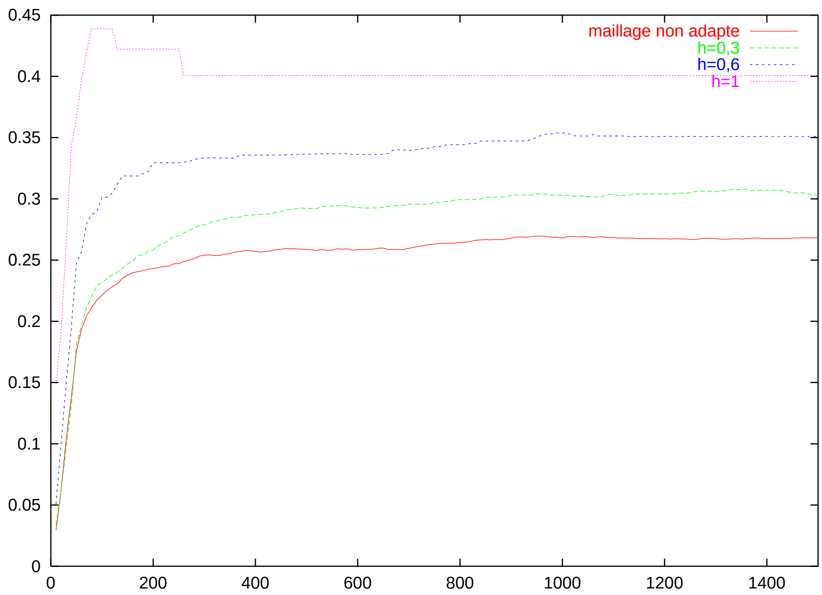


FIG. 3.9 – Progression de la surface active en fonction du temps

Les mêmes étapes que pour le volume sont observées : une croissance très forte pendant les 35 premières secondes, puis une croissance moins forte mais conséquente de $t = 35$ s à $t = 40$ s, l'étalement est presque déjà définitif. Enfin de 50 s à 350 s le fluide s'étale plus doucement au fond de la vallée. La surface active devient constante après environ 1500 secondes, c'est-à-dire que le fluide est totalement stabilisé après 25 minutes d'étalement, ce qui est la conséquence du terme de seuil et probablement de la diminution nette de la pente.

Comparaison entre les différents maillages :

J'ai choisi d'afficher ces 4 maillages car la différence est significative :
Pour les maillages adaptés, plus le maillage est grossier, plus la progression de la surface active est rapide. Si on regarde les maillages représentés pages 39-40, on voit le problème : les maillages de densité 0,6 ou 1 sont nettement moins précis sur les arêtes, si bien que la deuxième rupture de pente très visible sur le maillage avec $h = 0,2$ ou $0,3$ est négligée par le mailleur avec une densité trop forte. De fait, le fluide subit une unique rupture de pente et s'étale donc dans la vallée avec plus de vitesse. Pour les mêmes raisons, il n'est pas ralenti par les trous visibles sur les maillages plus fins en haut du domaine, donc la pente de la 1ère phase est encore plus importante.

Le maillage $h = 1$ fait des "sauts" car les triangles et les quadrangles sont assez grands, donc ils se remplissent puis se vident brusquement. Enfin, on remarquera que le maillage structuré donne une surface active encore plus faible que le maillage de densité 0,3, ce qui pourrait laisser penser qu'il est encore plus précis que les maillages adaptés. On le confirmera plus tard.

3.7.3 Hauteur maximale du fluide en fonction du temps

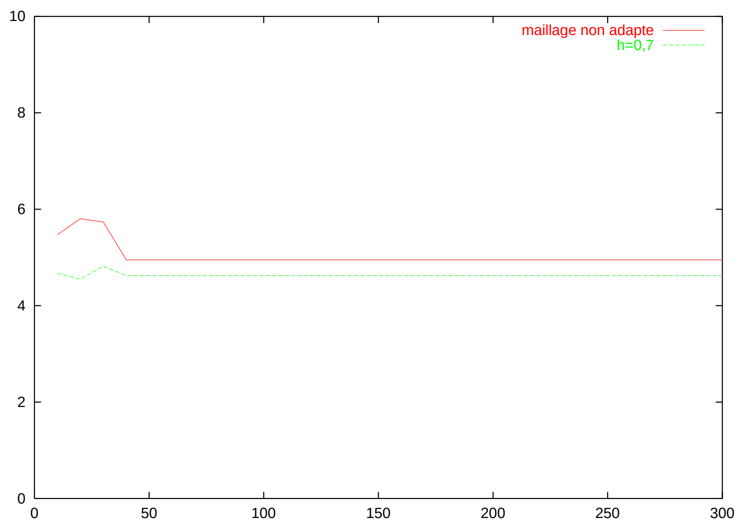


FIG. 3.10 – Hauteur maximale du fluide en fonction du temps

Lorsque le fluide entre dans le domaine, le front de lave possède une hauteur de 3 mètres. Or l'entrée 1 (la pointe) est située à environ 2 mètres de dénivelée inférieurement au domaine du parcours futur du fluide. C'est pourquoi la hauteur maximale est de 5 mètres dès les premiers temps. Le front s'accumule d'abord immédiatement dans ce trou, puis passe par-dessus la lave qui l'a définitivement rempli. Elle s'attarde un peu dessus, notamment à cause de sa viscosité, puis la vague finit par avancer pour remplir d'autres cavités et descendre dans la vallée. La hauteur maximale reste 5 mètres à l'endroit de cette accumulation.

3.7.4 Flux maximal du fluide en fonction du temps

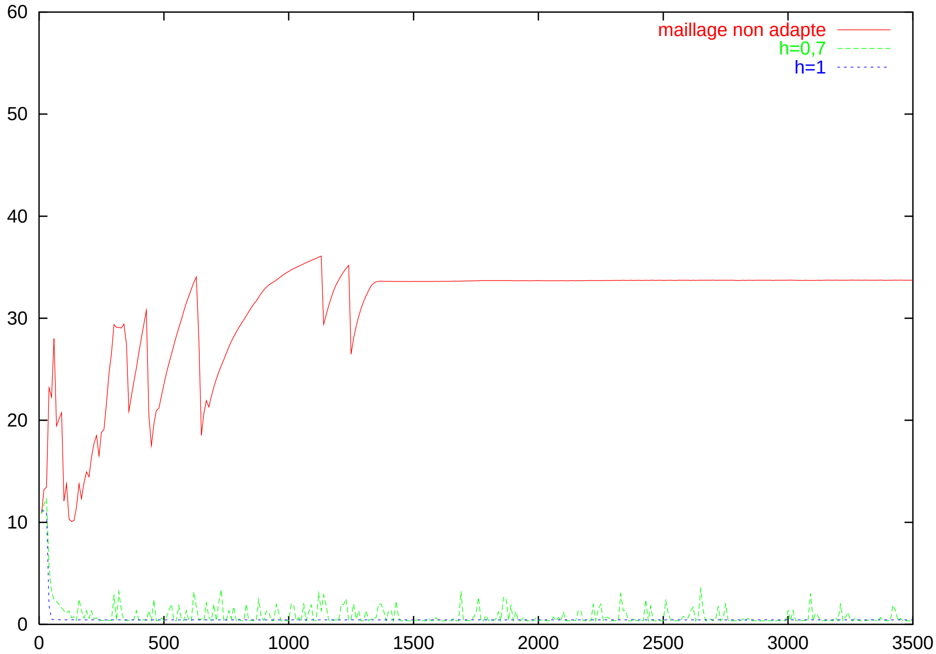


FIG. 3.11 – Flux maximal du fluide en fonction du temps

Le flux maximal se situe entre 0 et 36 m^2/s, il varie très brusquement d'une valeur à l'autre (ce qui vient aussi du fait que l'on a choisi des pas de temps de 10 secondes, or les 60 premières secondes mériteraient peut-être plus de précision).

Avec le maillage $h = 1$, soit le plus grossier, le flux maximal devient constant (à considérer comme nul) environ après 50 s. Avant il procède à deux phases : croissance lente sur [0 ;35] et décroissance sur [35 ;40], décroissance moins rapide sur [40 ;50] puis tendance à la constance sur [50 ;5000]. En effet, le comportement du fluide est simplifié pour ce maillage : le flux à l'entrée a déjà une valeur non nulle. Après 35 secondes, le phénomène "rupture de barrage" a lieu, mais la boue est très homogène et liée, elle s'écoule donc plus lentement que lors de son arrivée. Enfin le fluide s'arrêtant, le flux sera égal à zéro.

Le maillage $h = 0,7$ subit les mêmes phases mais un bruit est ensuite présent constament, même aux temps finaux.

Dans le cas du maillage non adapté, le comportement est nettement plus complexe. Le fluide subit des accélérations et des ralentissements brusques, toujours à cause du fait qu'il est très lié, et du fait que le relief n'est pas régulier. On voit par exemple sur la simulation numérique (page 42) qu'après 400 secondes, il peut encore couler et subir différentes variations de vitesse.

Remarques critiques : le flux constant, qui devrait être nul, est très nettement supérieur à zéro, ce qui pose une question importante sur le choix d'imposer la hauteur à 0,1 m en condition initiale car elle engendre des erreurs de précision loin d'être négligeables. De même le bruit retrouvé dans les maillages $h = 0,7$ et non adapté proviennent certainement de cette décision.

3.7.5 $|q|_0$ en fonction du temps

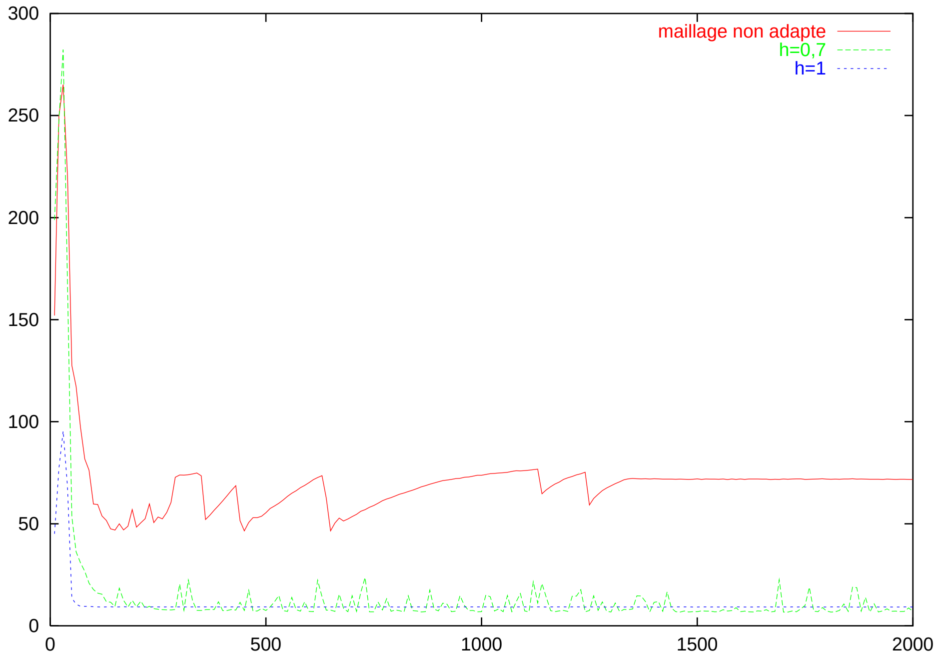


FIG. 3.12 – $|q|_0$ en fonction du temps

La norme L_2 permet de voir le comportement global du flux du fluide et de confirmer l'analyse des parties précédentes sur l'événement :

Dans un premier temps, le fluide entre dans le domaine avec un flux croissant jusqu'à 20s.

La chute du fluide accélère le flux, jusqu'à 35s.

Puis le flux ralentit jusqu'à 50s, là il stagne à peu près, mais n'est pas nul, toujours probablement pour le problème de précision expliqué dans la remarque de 3.7.4.

On ne peut que continuer à remarquer la présence non négligeable du bruit.

3.7.6 $|\frac{dh}{dt}|_0$ en fonction du temps

Elle représente la différence entre deux hauteurs successives :

$$\left|\frac{dh}{dt}\right|_0 = \frac{|h_{n+1} - h_n|_0}{\Delta t}$$

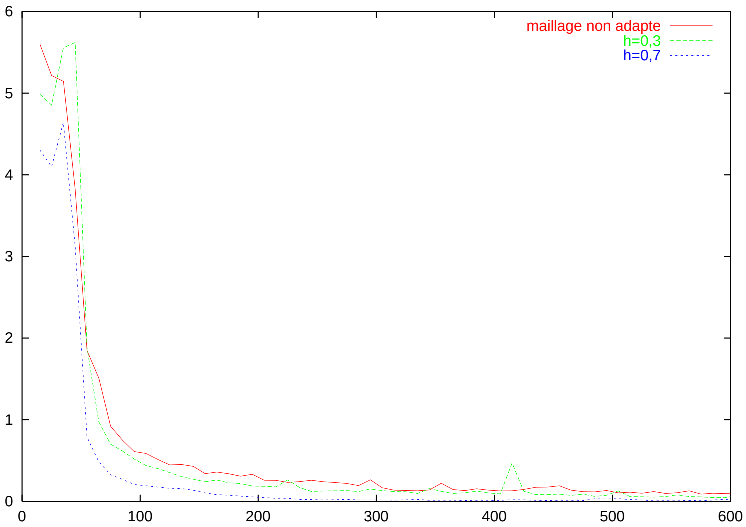


FIG. 3.13 – $|dh/dt|_0$ en fonction du temps

Une forte différence au départ entre les premières hauteurs successives tend à diminuer lentement sur [0 :30], puis augmente un peu sur [30 :40]. Finalement, cette différence subit une décroissance rapide jusqu'à tendre vers 0.

On voudrait que sa représentation en log tende vers une droite, de cette facon, la norme serait équivalente à une exponentielle du temps négative et tendrait donc très nettement vers zéro. Or voici sa représentation logarithmiqique :

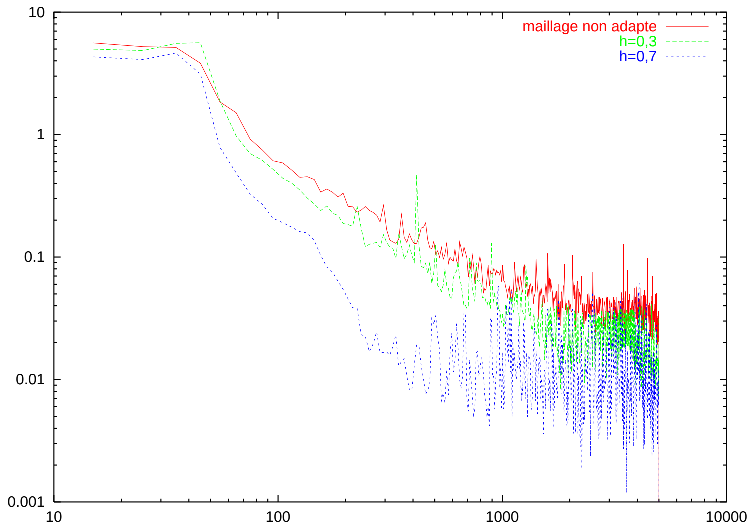


FIG. 3.14 – Représentation logarithmique de $|dh/dt|_0$ en fonction du temps

Ainsi, les représentations des différences de hauteurs successives pour les maillages non adapté et $h = 0,3$ ne tendent pas vers une droite, du moins le bruit est assez visible sur la fin du parcours, ce qui signifie que la précision peut encore s'améliorer... Cependant, il faut considérer que le bruit est beaucoup plus important dans le cas du maillage $h = 0,7$ par exemple, ce qui prouve cette fois ce que l'on supposait déjà, c'est-à-dire que les deux premiers maillages sont beaucoup plus précis. On remarque enfin que le maillage non adapté donne moins de briut que celui de densité $h = 0,3$.

3.7.7 $|\frac{dq}{dt}|_0$ en fonction du temps

Elle représente la différence entre deux flux successifs :

$$\left|\frac{dq}{dt}\right|_0 = \frac{|q_{n+1} - q_n|_0}{\Delta t}$$

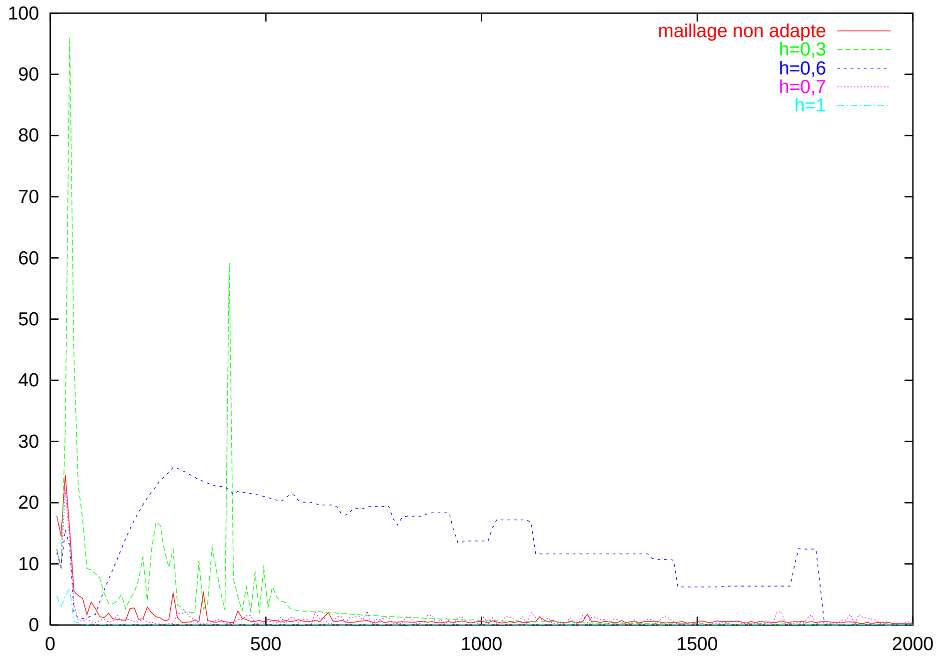


FIG. 3.15 – $|dq/dt|_0$ en fonction du temps

Ce graphe est particulièrement déroutant par la divergence des résultats qu'il donne selon les maillages, d'autant qu'il permet de considérer l'erreur de précision du flux à une itération par rapport à son précédent. Ainsi, le maillage $h = 0,3$ donne des pics beaucoup plus élevés que les autres maillages, ce qui n'est pas tellement explicable et semble plutôt être une erreur de précision qu'une réalité. Le maillage $h = 0,6$ garde lui aussi des résultats très loins de 0.

En revanche, tous les autres maillages sont très proches de 0 très rapidement, en fait après l'écoulement violent de l'entrée, ils ont tous le même comportement, qu'ils soient plus grossiers ou non adapté :

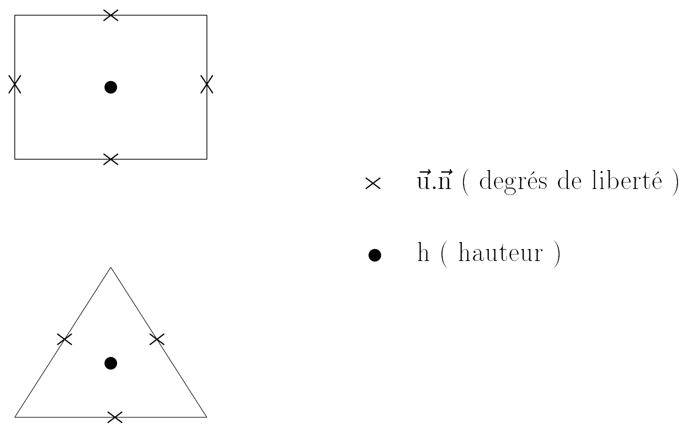
Une petite décroissance sur [0 :30], puis une croissance de la différence sur [30 :40], puis une décroissance rapide jusqu'à tendre vers 0, ce qui est plutôt satisfaisant comme comportement.

3.8 Conclusion : ouverture à une amélioration des résultats (hypothèse)

Ainsi, il est clair que des problèmes de précision sont constatés, que ce soit avec un maillage moyennement fin comme celui de $h = 0.6$ (voir figure 3.15), ou très fin comme celui de densité $h = 0.3$, qui nous choquera particulièrement sur la figure 3.14.

En fait,le maillage non adapté semble plus précis dans certains calculs, et n'a jamais obtenu d'erreur grossière, contrairement aux autres maillages.

Ceci peut sembler paradoxal, mais une explication proviendrait du choix des éléments lors de la résolution numérique. En effet, les maillages adaptés contiennent des triangles et des quadrangles, les éléments utilisés pour le code de calcul sont des éléments de type M.A.C. (Mark & Cell) pour des volumes finis. En éléments finis, ils correspondent aux éléments de Raviard-Thomas (voir [20]), représentés sur la figure suivante :



Alors il a été démontré (History Numerical Analysis, [18]) pour le problème de **Stokes** que les ordres d'erreur sont les suivants :
Pour les triangles, on a les estimations suivantes :

$$|u - u_h|_{H_{div}} = \mathcal{O}(h)$$

tandis que pour les quadrangles parallèles aux axes, on a :

$$|u - u_h|_{H_{div}} = \mathcal{O}(h^2)$$

De fait on perd nettement moins de précision avec le maillage structuré, du moins dans le cas d'un problème de Stokes.

Pour améliorer ce problème, il faudrait théoriquement
- utiliser des éléments de type P2 pour $\vec{u}$ et P1 pour h
- passer d'un schéma explicite à un schéma implicite

mais cela reste théorique et le temps d'un stage est loin d'être suffisant pour le prouver en pratique...

De plus et surtout ce n'est qu'une hypothèse dans notre cas, mais il reste certain que certains résultats ont étés plus convaincants avec le maillage non adapté, comme par exemple pour le graphe 3.14.

Une autre explication sur l'imprécision des résultats, notamment pour les graphes 3.11 et 3.12, a déjà été détaillée dans la section 3.7.4 : le fait que le flux tende vers une constante non nulle semble provenir du choix de la hauteur initiale de fluide : $h = 0.1$ m, qui provient du modèle dans lequel on divise par h dans le terme de seuil.

Une solution d'amélioration, déjà étudiée depuis longtemps, mais jamais vraiment satisfaisante, serait d'arriver à réécrire le système sans diviser par h, et de pouvoir ainsi considérer les cas où $h = 0$, comme on doit le faire dans les modélisations de mer, où même des hauteurs négatives d'eau (créées par les îles !) sont présentes...

Enfin, le modèle ne tenant pas compte de la diffusion, ce choix ne modifie-t-il pas totalement certains résultats, tels que la hauteur maximale par exemple?

Si ce terme est composé de dérivées d'orde 2, il joue tout de même un rôle indispensable dans la trajectoire, en particulier dans la phase d'étalement. Les résultats globaux n'en seraient probablement pas violemment modifiés, mais la précision elle, *a priori*, serait plus exacte.

Conclusion

La partie théorique de ce mémoire offre un modèle complet pour les boues et la neige dense humide. Cependant, la démonstration du terme de seuil avec le modèle d'HERSHEL - BUCKLEY, mériterait par sa complexité d'être étudiée et détaillée, d'autant qu'elle est très difficile à retrouver dans les publications actuelles.

A ma connaissance, la démonstration détaillée de la méthode classique employée dans ce mémoire en deux dimensions n'a jamais été publiée ; elle permettra de gagner du temps afin d'aller plus loin dans les résultats numériques par exemple.

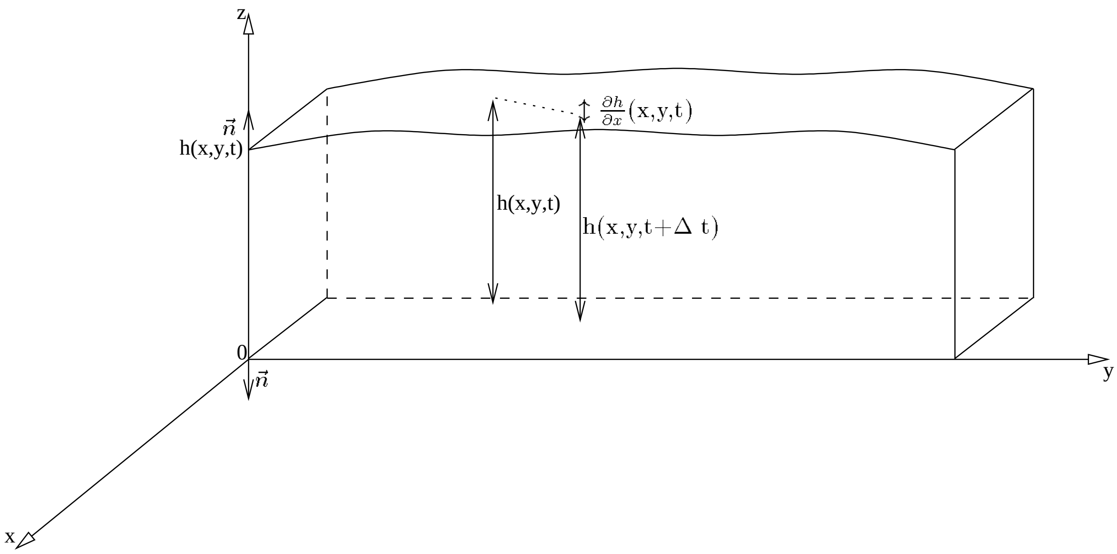
Ceux que j'ai obtenus permettent déjà de détecter quelques failles dans le code de calcul et apportent une information vis à vis des maillages préférables à choisir ; plus de temps aurait été nécessaire, notamment afin d'analyser les résultats après avoir fait varier les paramètres rhéologiques (seuil, viscosité) pour mieux déterminer leur influence.

Enfin, rappelons que ce mémoire ne concerne que les avalanches de neige lourde et les laves boueuses.

La modélisation d'avalanche aérosol nécessite en effet de la dynamique des gaz et est à ce jour totalement insatisfaisante ; celle des laves torrentielles dont le comportement est biphasique (car l'eau et le caillou se dissocient) est encore trop difficile. Ainsi on peut espérer dans les prochaines années être capable de modéliser une avalanche de poudreuse et de déterminer notamment où s'arrête le fluide et où commence l'aérosol. Une telle modélisation permettra une simulation numérique en trois dimensions fascinante et pourra jouer un rôle très convaincant dans la prise de conscience des politiques pour la validation des zones à risque.

Annexe A

Théorèmes d'intégration



Théoreme d'intégration 1 *Soient :*

- $F: \begin{array}{ccc} I\!R x I\!R^+ & \longrightarrow & I\!R \\ (z,t) & \longmapsto & F(z,t) \end{array}$ *suffisamment régulière,*
- $\omega_t = [0, h(t)]$ *le domaine d'intégration,*
- $\mathcal{U}(z,t)$ *le champ de vitesse (qui entraîne ω_t dans le mouvement du milieu continu).*

Alors:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{h(t)} F(z,t)dz\right) = \int_0^{h(t)} \frac{\partial F(z,t)}{\partial t}dz + \left[F(z,t).\, \mathcal{U}(z,t).\, \mathcal{N}(z,t)\right]_0^{z=h(t)}$$

où:

$$\mathcal{N}(z,t) = \begin{cases} (0,0,1) & si \quad z = \quad h(t) \\ (0,0,-1) & si \quad z = \quad 0 \end{cases}$$

Théoreme d'intégration 2 *Soient :*

- $p : \begin{array}{ccc} I\!\!R x I\!\!R^+ & \longrightarrow & I\!\!R \\ (x,z) & \longmapsto & F(x,z) \end{array}$ *suffisamment régulière,*
- $\omega_t = [0, h(t)]$ *le domaine d'intégration.*

Alors:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h(t)} p dz\right) = \int_0^{h(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dz + [p.\, \mathcal{U}(x,z).\, \mathcal{N}(x,z)]_0^{z=h(t)}$$

où :

$$\mathcal{U} = \frac{dM}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,t) \end{pmatrix} pour M = (x, y, h(x,y,t))$$

et

$$\mathcal{N}(z,t) = \begin{cases} (0,0,1) & si \quad z = \quad h(t) \\ (0,0,-1) & si \quad z = \quad 0 \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{U}.\, \mathcal{N}(z,t) = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,t) & si \quad z = \quad h(t) \\ 0 & si \quad z = \quad 0 \end{cases}$$

Théoreme d'intégration 3 *Soient :*

- $f : \begin{array}{ccc} I\!\!R x I\!\!R^+ & \longrightarrow & I\!\!R \\ (y,z) & \longmapsto & F(y,z) \end{array}$ *suffisamment régulière,*
- $\omega_t = [0, h(t)]$*le domaine d'intégration.*

Alors:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_0^{h(t)} f dz\right) = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial y} dz + [f.\, \mathcal{U}(z,y).\, \mathcal{N}(z,y)]_0^{z=h(t)}$$

où :

$$\mathcal{U} = \frac{dM}{dy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,t) \end{pmatrix} pour M = (x, y, h(x,y,t))$$

et

$$\mathcal{N}(z,t) = \begin{cases} (0,0,1) & si \quad z = \quad h(t) \\ (0,0,-1) & si \quad z = \quad 0 \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{U}.\, \mathcal{N}(z,t) = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,t) & si \quad z = \quad h(t) \\ 0 & si \quad z = \quad 0 \end{cases}$$

Annexe B

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Ωest un ouvert non vide de $I\!R^2$.

$$u, v, f : \Omega \longrightarrow I\!R$$

- $L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow I\!R ; \int_\Omega |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$

  - $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert (ie un espace vectoriel normé complet) pour le produit scalaire :

  $$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

  - sa norme associée est

  $$|f|_0 = \left(\int_\Omega |f^2(x)|dx \right)^{1/2}$$

- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow I\!R ; \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$, $p > 0$.

  - $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme:

  $$|f|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

  - Si $p = +\infty$, cela signifie que les fonctions sont essentiellement bornées.

  $$||f||_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

- Espaces de Sobolev :

$$\mathcal{W}^{m,p}(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow I\!R ;\ \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\, \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m \ \}$$

  - $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach
  - sa norme associée est

  $$|f|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}$$

– Un espace de Sobolev particulier est pour $p = 2$, car c'est alors un Hilbert:

$$H^m(\Omega) = \mathcal{W}^{m,2}(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\ \forall\alpha,\ |\alpha| \le m\ \right\}$$

– Dans la partie 2.2.5(e/), on veut $\mathrm{u} \in \mathrm{W}^{1,4/3}$, c'est-à-dire:

$$\mathcal{W}^{1,4/3}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow I\!R;\ D(u) \in L^{4/3}(\Omega) \right\}$$

- $H(div, \Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega)^2; div\, f \in L^2(\Omega) \right\}$.
  – $H(div, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$< \mathrm{u}, \mathrm{v} >_{div} =< \mathrm{u}, \mathrm{v} >_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} + < \mathrm{div}\,\mathrm{u}, \mathrm{div}\,\mathrm{v} >_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

  – sa norme associée est

$$|\mathrm{u}|_{\mathrm{div}} = |\mathrm{u}|^2{}_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} + |\mathrm{div}\ \mathrm{u}|^2{}_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

Table des matières

Table des figures

Bibliographie

[1] *Avalanches*, documentaire canadien, La Cinquième.

[2] E. Audusse - M-O. Bristeau - B. Perthame. *Kinetic shemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids.* Rapport de recherche INRIA/N° 3989, 2000.

[3] M. Baudoin. *Apprends LaTeX!* ENSTA, 1997.

[4] A. Bermúdez - A. Dervieux - J.A. Désidéri - M.E. Vázquez. *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes.* Rapport de recherche INRIA/N° 2738, 1995.

[5] E.C. Bingham. *Fluidity and Plasticity* McGraw-Hill, New-York, 1922.

[6] H. Borouchaki - P-L. George - F. Hecht - P. Laug - B. Mohammadi - E. Saltel. *Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Parties I et II.* Rapport de recherche INRIA/N° 2760, 1995.

[7] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, 1993.

[8] P. Coussot. *Rhéologie des boues et laves torrentielles. Etude de dispersions et suspensions concentrées.* Etudes Montagne n°5, CEMAGREF, 1992.

[9] P. Coussot. *Lois d'écoulement des laves torrentielles boueuses.* La houille blanche/n°3, 1994.

[10] G. Dhatt - A. Soulaimani - Y. Ouellet - M.Fortin. *Development of new triangular elements for free surface flows.* International journal for numerical methods in fluids, vol 6, 895-911, 1986.

[11] J-F. Gerbeau - B. Perthame. *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation.* Rapport de recherche INRIA/N° 4084, 2000.

[12] E. Guyon - J-P. Troadec. *Du sac de billes au tas de sable.* Editions Odile Jacob, Sciences, 1994.

[13] F. Hecht. *BAMG : Bidimensional Anisotropic Mesh Generator.* draft version v0.58, INRIA, 1998.

[14] D. Laigle. *Two-dimensional modelling of debris flow spreading on alluvial fans.* Hydroinformatics '96, Muller, 1996.

[15] D. Laigle et P. Coussot. *Numerical Modeling of Mudflow.* Journal of hydraulic engineering, 1997.

[16] F. Raoux. *Description des laves torrentielles.* Licence d'aménagement, http ://florian.raoux.free.fr/lave/, 1998.

[17] E. REYSSAT - C. TAMAIN. *Forme des cristaux de neige et origine des avalanches.* Magistère de MFAI, ENS, http ://www.di.ens.fr/ granboul/enseignement/formes/cristauxneige, 2000.

[18] J.E. ROBERTS - J.M. THOMAS. *Mixed and hybrid methods.* Handbook of Numerical Analysis, vol.3 : Finite elements methods, P.G. Ciarlet and J.L. Lions editions, North Holland, Amsterdam.

[19] N. ROQUET. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de Lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles.* Université d'Orsay Paris-Sud, Prépublication 97-21, 1997.

[20] P. SARAMITO. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées ; applications.* Thèse de l' Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.

[21] P. SARAMITO. *The viscous dam break problem.* Rapport interne, 2000.

[22] P. SARAMITO - N. ROQUET. *Rheolef.* Version 3.50, Rapport interne, 2001.

[23] B. STROUSTRUP. *The C++ Programming Language (3rd edition).* Addison Wesley Longman, Reading, MA. 1997.