DEA Mathématiques Appliquées (UFR IMA)

SIMULATION NUMERIQUE PAR ELEMENTS FINIS D'UN ECOULEMENT A SURFACE LIBRE AVEC EFFETS CAPILLAIRES

Hussein MUSTAPHA

Juin 2002

Responsables de stage:
Georges-Henri COTTET
Pierre SARAMITO

Laboratoire d'accueil:
LMC-IMAG, équipe EDP

Remerciements

Mes remerviments vont d'abord à M.George-Henri COTTET et M.Pierre SARAMITO, qui en me guidant tout au long de ce stage, m'ont fait bénéficier de leur expérience et de leur soutien.

J'adresse également mes remerciements à Mme Valerie PERRIER pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie M. Theirry BIBEN de m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury et pour ses remarques utiles sur le cisaillement.

Je n'oublierai pas mes collègues du bureau.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes amis et surtout K.B., A.B., B.B. et A.G.

Je remercie ma mère, mon père, mes soeurs et mes frères qui m'ont toujours encouragé durant mes études.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation

La force de tension superficielle a sur beaucoup d'écoulements une influence prépondérante particulièrement lorsqu'une dimension au moins du fluide considéré est faible.
Elle est présente dans d'innombrables phénomènes de la vie quotidienne et procédés industriels, même si la diversité de ses effets ne facilite pas son appréhension immédiate :
c'est la tension superficielle qui donne aux gouttes de liquide leur forme ramassée, elle qui rompt une bulle qui subit un phénomène de cisaillement, elle encore qui participe à la formation de ménisques à la surface des liquides contre les parois d'un récipient, ou organise les agrégats de bulles de savons.
D'un point de vue mathématique : il existe une différence de pression entre les deux phases de l'écoulement, égale à la courbure locale de la surface k multipliée par un coefficient σ, qui dépend des deux fluides en présence, appelé coefficient de tension de superficielle.

Les écoulements à *Surface Libre* apparaîssent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique : les problèmes liés à l'environnement comme les innondations, les avalanches, ou bien ceux en relation avec l'industrie comme la fabrication des câbles, le procédé d'enduction de peinture. Dans le cas où les deux fluides en présence sont non miscibles, il apparaît une vraie interface entre ces deux fluides. Cette interface, ainsi formée, subit un phénomène de transport avec les particules des fluides, qui sont en contact avec elle. Ainsi, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles dans leur formulation eulérienne diphasique non-miscible nécéssite le repérage de l'interface entre les deux fluides.
Beaucoup de méthodes différenes sont utilisées pour résoudre les évolutions topologiques du milieu diphasique, celle la méthode de *Volume de Fluide* introduite par Hirt et Nichols (1981), la technique de *Marqueurs* proposé par Daly(1967), la méthode de *Champ de Phase*, la méthode *level set* décrite par Séthian (1996) ou la méhode d'intégrale de bord Voir[J.P93, JSB93].
Chacune des méthodes citées ci-dessus a ses avantages ainsi que ses inconvénients Voir[MAJ+99].

La méthode de Level Set Voir[MP96] et [OS88], est une méthode qui consiste à représenter l'interface entre les deux fluides comme étant le niveau zéro d'une fonction assez régulère appelée fonction *Level Set*, avec laquelle on peut aisement calculer la courbure locale, ainsi que la tension de surface. Cette méthode peut simplement se généraliser en dimension trois.
Nous avons couplé cette méthode avec les éléments finis. Par comparaison avec les autres méthodes, nous avons obtenu des résultats intéressants et surtout au niveau conservation de volume. Nous avons fait un test de validation pour la méthode (une bulle d'aire qui remonte dans un liquide).
Nous pouvons maintenant passer aux problémes d'axisymétriques. Nous avons Nous avons commencé à aborder le problème de cisaillement, c'est un problème difficile, il nous faut bosser sur ce point. Beaucoup des tests sont faits, mais nous avons besoin de plus de temps pour completer le travail.
C'est un problème ouvert et il y a beaucoup de choses à faire.

1.2 Notion de tension de surface

Le matin, la rosée se dépose sur les toiles d'araignées sous forme de perles liquides de petite taille, et non pas sous forme d'un film liquide uniforme. Lorsque l'on touche l'une de ces gouttes, elle oscille puis retrouve sa forme d'équilibre très proche de la sphère. Cette élasticité s'appelle *la tension de surface*. Cette force qu'exerce la surface sur le liquide peut être associée à une énergie superficielle, proportionelle à la surface. Comme tout système soumis à plusieurs contraintes, la goutte trouve son état d'équilibre pour le minimum d'énergie totale. Or, pour une petite goutte, la tension superficielle est plus importante que la gravité, c'est donc la surface minimale[1] qui correspond au minimum d'énergie, à savoir la sphère.
On peut formaliser cette propriété de manière plus mathématique : il existe une différence de pression entre le liquide et le gaz [2], égale à la coubure locale de la surface $\mathbf{k}$ multipliée par un coefficient σ, appelé coefficient de tension superficielle, dépendant des deux fluides en présence. La pression la plus forte règne dans le fluide dont la surface est convexe voir figure (1.1).

$$[p]_s = \sigma \mathbf{k} \tag{1.1}$$

L'équation (1.1) s'appelle équation de Laplace. $\mathbf{k}$ est la courbure moyenne de la surface, c'est-à-dire la somme des deux courbures principales :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{1.2}$$

On peut alors vérifier la remarque précédente : si la pression est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte, le saut de pression est constant sur la surface et, par conséquent, la courbure l'est. La force qui en résulte est orientée du gaz vers le liquide voir.

1.3 Equation de Navier-Stokes incompressible

Nous voulons établir l'équation de mouvement (dans le cas général) pour un fluide visqueux incompressible. La relation fondamentale de la dynamique peut s'exprimer de la manière suivante :
la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{D}{Dt}\left[\int_V \rho u d\tau\right] = \int_V f d\tau + \int_\Sigma \sigma n dS \tag{1.3}$$

où Σ est la surface délimitant le volume V, dS est un élément de surface de normale n, f est la force excercée par unité de volume et σ le tenseur de contraintes. La dérivée temporelle du premier membre est une dérivée lagrangienne, c'est à dire, en suivant le mouvement des particules de fluide. La masse de l'élément de fluide $\rho d\tau$ reste constante dans ce mouvement. Le premier terme peut aussi sécrire : $\int_V \rho \frac{\mathcal{D}u}{\mathcal{D}t} d\tau$. L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à

[1] pour un volume donné
[2] Dans le cas d'un écoulement diphasique *liquide-gaz*

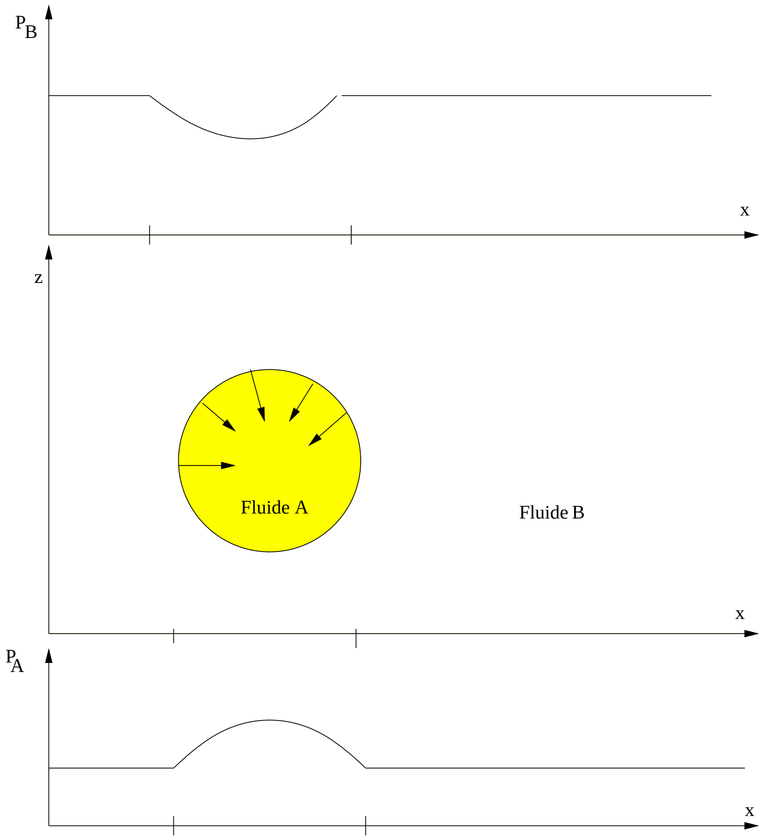


FIG. 1.1 – Pression à l'interface dans les deux fluides A et B et force de tension de surface.

l'aide du théorème d'Ostogradsky sous la forme : $\int_V \bigtriangledown.\sigma d\tau$ où $\bigtriangledown.\sigma$ est la divergence du tenseur des contraintes, un vecteur dont la composante i est : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho \frac{\mathcal{D}u}{\mathcal{D}t} = f + \bigtriangledown.\sigma \tag{1.4}$$

Maintenant, utilisons la décomposition de la dérivée lagrangienne de la vitesse en la somme de la dérivée eulérienne et de l'accélération convective, en tenant compte de l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien en mouvement. La contribution des forces de surface à la composante i de l'équation de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.5}$$

et l'équation de mouvement prend la forme :

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\bigtriangledown u) = -\bigtriangledown p + \eta \triangle u + f \tag{1.6}$$

C'est l'équation de **Navier-Stokes** qui décrit le comportement des fluides newtoniens. Réécrivons cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\bigtriangledown u = -\frac{1}{\rho}\bigtriangledown p + \nu \triangle u + \frac{1}{\rho} f \tag{1.7}$$

Remarque : le terme de divergence a disparu, car le fluide est incompresible, et donc on a

$$\bigtriangledown.u = 0$$

.

Première partie

Présentation du problème

Chapitre 2

Écoulement diphasique

La modélisation des écoulements diphasiques se fait de deux manières : soit à partir des équations de bilan pour chacune des phases, soit en considérant le mélange[1] des deux fluide.

2.1 Équations régissant l'écoulement

Dans notre écoulement diphasique, on considère deux fluides visqueux incompressibles et newtoniens.
Pour fixer les idées, on suppose que l'un des deux fluides est un liquide et l'autre un gaz, dont le mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes.
Soit Ω un ouvert de R^d, avec $d = 1, 2, 3$.
On suppose que l'interface Γ entre les deux fluides divise le domaine Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 voir figure (2.1).
On note par $\partial\Omega$ (resp.$\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$), la frontière de Ω (resp.Ω_1, Ω_2).
Les équations dans les deux phases sont données comme

$$\begin{array}{rcll} \rho_\ell \frac{Du_\ell}{Dt} & = & \rho_\ell g + 2\mu_\ell \bigtriangledown .\mathcal{D} - \bigtriangledown p_\ell & \text{dans le liquide} \\ \bigtriangledown .u_\ell & = & 0 & \text{dans le liquide} \\ \rho_g \frac{Du_g}{Dt} & = & \rho_g g + 2\mu_g \bigtriangledown .\mathcal{D} - \bigtriangledown p_g & \text{dans le gaz} \\ \bigtriangledown .u_g & = & 0 & \text{dans le gaz.} \end{array} \tag{2.1}$$

où $\mathcal{D}$ est le tenseur taux de déformation.
Remarque : *Les indices inférieurs ℓ et g dénotent respectivement les deux phases liquide et gaz.*

[1] On a toujours deux fluides non-miscibles, mais on considère le fluide total et on cherche une seule équation.

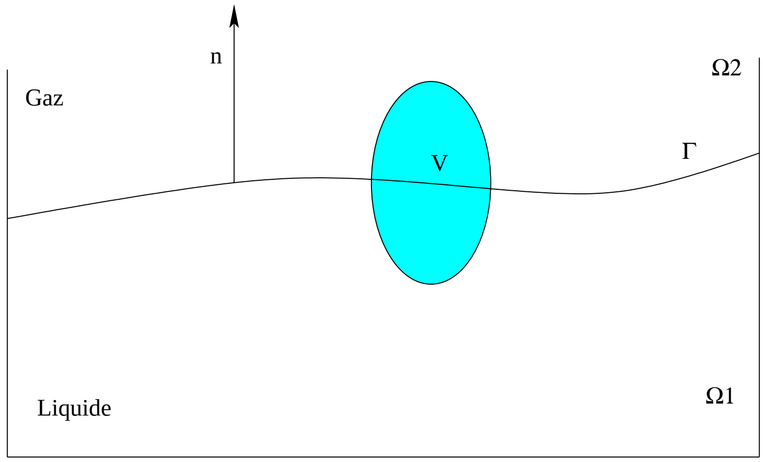


FIG. 2.1 – Ecoulement diphasique

2.2 Interface

L'interface Γ entre les deux fluides se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact. Si nous nous plaçons dans un repère local défini par la normale à l'interface, où ζ, w_1 et w_2 sont respectivement la position de l'interface et les vitesses normales dans chacun des fluides (FIG.1.2), alors il y a une condition cinématique qui s'écrit :

$$\frac{d\zeta}{dt} = w_1 = w_2 \tag{2.2}$$

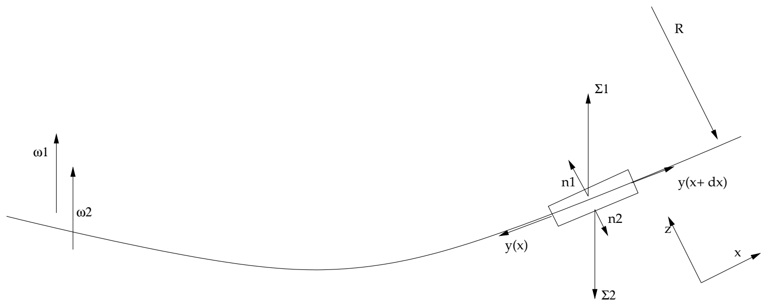


FIG. 2.2 – Interface entre deux fluides

Cette condition assure que la composante de vitesse *normale* à l'interface est également continue en traversant cette interface. En revanche, la nullité de la composante de la vitesse tangente à l'interface est liée à l'existence de la viscosité : une discontinuité de la vitesse conduirait à une contrainte de cisaillement infinie.
En conclusion, la vitesse est continue à travers une interface, et on a :

$$u_\ell = u_g \quad \text{sur } \Gamma \tag{2.3}$$

Examinons maintenant la relation qui existe entre les contraintes de part et d'autre de l'interface. Considérons un élément de volume placé à cheval sur l'interface, dont les faces sont parallèles à l'interface et dont l'épaisseur, perpendiculairement à l'interface, est très petite ; la résultante des forces sur cet élément de volume est :
$[\sigma_{ij}]_1 + [\sigma_{ij}]_2 +$ tension de surface.
Cette résultante est nulle lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de cet élément de volume vers 0. Prenons des axes x et y confondus avec la tangente et la normale à l'interface ; alors $n_1 = (0, 1)$ et $n_2 = -n_1 = (0, -1)$. La résultante des forces tangencielles est : $([\sigma_{xy}]_1 - [\sigma_{xy}]_2)$dx. La résultante des forces normales est : $([\sigma_{yy}]_1 - [\sigma_{yy}]_2)$dx. Il faut ajouter la contribution de la tension interfaciale entre les deux fluides. La tension de surface γ est l'énergie qu'il faut fournir pour créer une interface d'aire unité. On peut aussi considérer γ comme une force par unité de longueur, s'exerçant dans le plan de l'interface et qui assure la cohésion de cette interface.

Lorsque l'interface est courbe, l'existence d'une tension interfaciale se traduit par une discontinuité des contraintes normales à la traversée de l'interface. On peut évaluer (traduire) ce fait mathématiquement, en écrivant :

$$(2\mu_\ell - 2\mu_g).n \quad = \quad (p_\ell - p_g + \sigma k).n \quad \text{sur}\Gamma. \tag{2.4}$$

Chapitre 3

Formulation par lignes de niveau

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment se formulent les équations dans chacune des phases.
Dans ce chapitre, on va s'intéresser à donner une autre formulation du problème.
On commence par définir une fonction continue ϕ, appelée fonction *Level Set*. L'interface Γ représente l'ensemble de niveau zéro de cette fonction. On a alors :

$$\Gamma = \{x/\phi(x,t) = 0\}. \tag{3.1}$$

3.1 Méthode de Level Set

Soit une interface Γ dans le plan, de codimension 1. Sous l'influence du champ de vitesse, Γ subit un phénomène de transport dans un domaine ouvert, noté Ω. Sa vitesse dépend de la position, du temps, aussi que de la géometrie de l'interface. L'idée initiale de créer la méthode le Level Set est décrite, en 1988, par S.Osher et J.A.Sethian voir[OS88] et elle consiste à définir simplement une fonction assez régulière[1] $\phi(x,t)$ qui représente l'interface comme étant l'ensemble de niveau zéro de cette fonction. Cette fonction est appelée *fonction Level Set* et elle est définie par :

$$\phi(x,t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \text{dans le liquide} \\ = 0 & \text{si } x \text{sur } \Gamma \\ < 0 & \text{si } x \text{dans dans le gaz} \end{cases}$$

La normale unitaire sur l'interface, qui est dirigée vers l'extérieur du gaz dans le liquide, et le rayon de courbure de l'interface peuvent s'exprimer simplement en fonction de ϕ(x,t)

$$n = (\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})\rfloor_{\phi=0}, \; k = \nabla.(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})\rfloor_{\phi=0}. \tag{3.2}$$

[1]au moins lipschitzienne continue

Soit $\mathbf{u}$ un champ de vitesse défini pour le fluide tout entier

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_\ell & \text{si } x \in \phi > 0 \\ u_g & \text{si } x \in \phi \leq 0 \end{cases}$$

Alors, d'après le paragraphe 1.2, $\mathbf{u}$ est continue à la traversée de l'interface.
L'interface est en mouvement avec les particules du fluide, et cette évolution est donnée par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}.\bigtriangledown\phi = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

Cette équation décrit exactement le déplacement de l'ensemble de niveau zéro de ϕ voir[MP96] (la propriété est demontrée par Sethian et Osher en (1988) et par Evans et Spruck(1991)).
Tous les coefficients physiques sont donnés en fonction de ϕ, ce qui evite alors le problème de discontinuité de ces coefficients en traversant l'interface.
En utilisant la deuxième loi de Newton, on obtient, en regardant les conditions aux limites, l'équation

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\bigtriangledown\mathbf{u}) = -\bigtriangledown\mathbf{p} + \rho\mathbf{g} + \bigtriangledown.(\mathbf{2}\mu\mathcal{D}) - \sigma\mathbf{k}(\phi)\delta(\phi)\bigtriangledown\phi. \tag{3.4}$$

où
ρ et μ sont respectivement la densité et la viscosité, et δ la distribution de Dirac. pour plus de détails voir[P.S02]

3.1.1 Forme sans dimension

Il est plus utile d'écrire l'équation (3.4) sous une forme adimensionnelle.
On considère U une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié , L une lonqueur caractéristique et T un temps caractéristique (qui a priori est égal à L/U). Posons

$$\begin{aligned} x &= Lx' \\ u &= Uu' \\ t &= (L/U)t' \\ p &= p'\rho_\ell U^2 \\ \rho &= \rho_\ell\rho' \\ \mu &= \mu_\ell\mu' \end{aligned}$$

Alors (3.4) se réécrit, en subistituant les variables ci-dessus par leur valeur, comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\bigtriangledown p}{\rho(\phi)} = F, \tag{3.5}$$

avec

$$F = -u.\bigtriangledown u - \frac{z}{Fr} + \frac{1}{\rho(\phi)}(\frac{1}{Re}\bigtriangledown.(2\mu(\phi)) - \frac{1}{We}k(\phi)\delta(\phi)\bigtriangledown\phi). \tag{3.6}$$

z est le vecteur unitaire de l'axe de $\overrightarrow{oz}$. La densité et la viscosité sont données par

$$\rho(\phi) = \lambda + (1-\lambda)H(\phi) \tag{3.7}$$

$$\mu(\phi) = \eta + (1-\eta)H(\phi) \tag{3.8}$$

La fonction H représente la fonction de Heaviside, définie pour presque tout $\phi \in \mathcal{R}$ par :

$$H(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi > 0 \\ 0 & \text{si } \phi \leq 0 \end{cases}$$

λ et η sont des paramétres sans dimension et ils sont définis par :

$$\lambda = \rho_g/\rho_\ell$$
$$\eta = \mu_g/\mu_\ell$$

Re est le nombre de ***Reynolds***, qui est sans dimension et qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces dues à la viscosité, il est défini par :

$$Re = \frac{\rho_\ell LU}{\mu_\ell}, \tag{3.9}$$

Fr est le nombre de ***Froude***, alors c'est un rapport de similitude, et il est donné par :

$$Fr = \frac{U^2}{gL} \tag{3.10}$$

We est le nombre de ***Weber***, il est proportionnel à l'inverse de la tension du surface

$$We = \frac{\rho_\ell LU^2}{\sigma}. \tag{3.11}$$

3.1.2 Épaisseur de l'interface

Dû aux changements pointus de $\rho(\phi)$ à travers l'interface et également en raison des difficultés numériques présentées par la mesure de *Dirac* δ contenue dans le F, nous devons modifier légèrement l'équation (3.4).
Pour alléger ces problèmes nous donnerons à l'interface une épaisseur fixe qui est proportionnelle à la maille spatiale que ceci nous permet de remplacer $\rho(\phi)$ par une densité régulière , $\rho_\epsilon(\phi)$, qui est donnée par :

$$\rho_\epsilon(\phi) = \lambda + (1-\lambda)H_\epsilon(\phi), \tag{3.12}$$

avec

$$H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2}[1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi\phi/\epsilon)] & \text{si } |\phi| \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } \phi > \epsilon. \end{cases} \tag{3.13}$$

et la régularisée $\delta_\epsilon(\phi)$ de la mesure de Dirac est donnée par

$$\delta_\epsilon(\phi) = \frac{dH_\epsilon}{d\phi}. \tag{3.14}$$

Il est clair que l'épaisseur de l'interface est approximativement

$$\frac{2\epsilon}{|\bigtriangledown \phi|}. \tag{3.15}$$

Dans notre algorithme l'interface doit avoir une épaisseur uniforme, par conséquent nous devons avoir $|\bigtriangledown \phi| = 1$ dans la zone $|\phi|\leq\epsilon$ d'où l'idée de normaliser la fonction de Level Set dans un voisinage de l'interface, en introduisant, une fonction **d** qui s'appelle fonction distance signée et qui satisfait :

$$|\bigtriangledown \mathbf{d}| \;=\; 1, \quad \forall x \in \Omega \text{avec} \quad \text{avec}\, \mathbf{d} = 0\, \forall x \in \Gamma \tag{3.16}$$

Si la fonction Level Set est considérée comme une fonction distance signée, c'est à dire $|\bigtriangledown \phi| = 1$, alors on aura d'aprés (12) une épaisseur de 2ϵ pour l'interface. Dans le cacul numérique , on prend $\epsilon = \alpha$h où h est le pas du maille. Ainsi, on obtient l'interface originale en faisant tendre h vers 0 (i.e.ϵ vers 0).
Il semble idéal choisir ϕ pour être une fonction de distance, cependant, sous l'évolution (3.3) d'elle ne restera pas nćessairement en tant que tels. Nous devons alors pouvoir résoudre le problème suivant :
Étant une fonction level set, comment on peut re-normaliser cette fonction, sans changer l'ensemble de niveau zéro de cette fonction. Ceci peut être réalisé en résolvant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial\, \mathbf{d}}{\partial \tau} = sign(\phi)(1 - |\bigtriangledown\ \mathbf{d}|), \tag{3.17}$$

avec la condition intiale :

$$\mathbf{d(x,0)} = \phi(x), \tag{3.18}$$

où

$$sign(\phi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \phi < 0 \\ 0 & \text{si } \phi = 0 \\ 1 & \text{si } \phi > 0 \end{cases}$$

et τ un temps artificiel. Les solutions régulières de (3.17) sont des fonctions de distance en outre, si $sign(\phi) = 0$, alors d a le même niveau zéro que $\phi(x)$.

On résout (3.17) à l'état d'équilibre et on remplace alors ϕ par $\mathbf{d}(x, \tau_{equilibre})$.
Il est clair, à partir de (3.15), que nous avons besoin seulement de ϕ pour être fonction de distance près de l'interface. Nous avons alors atteint l'état d'équilibre quand

$$|\bigtriangledown \mathbf{d}| = 1, \text{ pour } |\mathbf{d}|\leq\epsilon. \tag{3.19}$$

3.2 Méthode des caractéristiques

3.2.1 Notations

La méthode que je vais présenter est tirée de [O.P00] et son analyse numérique est réalisée dans [HM01].

Soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteur défini dans $]0, T[\times\Omega$ et satisfaisant [2]

$$\bigtriangledown.\mathbf{u} = 0 \tag{3.20}$$

Soient $\triangle t$ positif, un pas de temps et $t_n = n \times \triangle t$, pour n $\in \mathcal{N}$.
Soient x $\in \Omega$ et $X(x,.) :]t_n, t_{n+1}[\longmapsto \mathcal{R}^d$ la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt}(x,t) = \mathbf{u}(X(x,t),t), \text{p.p.} \in]t_n, t_{n+1}[\tag{3.21}$$

$$X(x, t_{n+1}) = x \tag{3.22}$$

La dérivée totale d'un champ ϕ définie dans $]t_n, t_{n+1}[\times\Omega$ s'écrit :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + u.\bigtriangledown)\phi(x,t) = \frac{d}{dt}\phi(X(x,t),t) \tag{3.23}$$

On désigne par : $X^{(n)}(x) = X(x, t_n)$ *la position de la particule qui était en x à l'instant* t_{n+1} *et qui a été transporté par* $\mathbf{u}$ (fig.3.1).

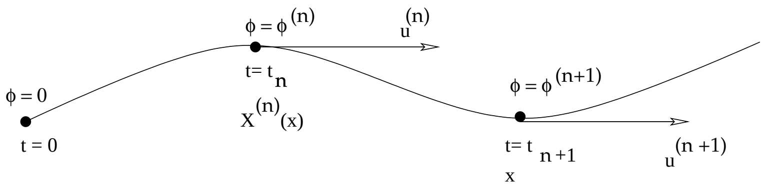


FIG. 3.1 – Approximation de la dérivée totale.

3.2.2 Approximation d'ordre un en temps

Nous supposerons le champs de vecteur $\mathbf{u}$ connu à l'instant t_n, mais pas encore à l'instant t_{n+1} et nous noterons $\mathbf{u}^{(n)} = u(x, t_n)$. Nous noterons également : $\phi^{(n)}(x) = \phi(x, t_n)$.
L'équation différentielle(2.13) est approchée par le schéma d'Euler du premier ordre suivant :

$$\frac{X(x, t_{n+1} - X(x, t_n)}{\triangle t} = \mathbf{u}^{(n)}(X(x, t_{n+1})) \tag{3.24}$$

En utilisant $X(x, t_{n+1}) = x$ et $X(x, t_n) = X^{(n)}(x)$, nous obtenons :

$$X^{(n)}(x) := x - \triangle t \times \mathbf{u}^{(n)}(x) \tag{3.25}$$

La dérivée totale est approchée au premier ordre sur $]t_n, t_{n+1}[\times\Omega$ par :

$$\frac{d}{dt}\phi(X(x,t),t) \approx \frac{\phi^{(n+1)}(x) - \phi^{(n)} \circ X^{(n)}(x)}{\triangle t} \tag{3.26}$$

[2]la condition d'incompressibilité

Ainsi, pour un opérateur $\mathcal{A}$, un problème du type

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}. \bigtriangledown \phi + \mathcal{A}(\phi) = 0. \tag{3.27}$$

$$\phi^{(0)} = \phi_0 \tag{3.28}$$

sera approché au premier ordre en temps par

$$\begin{aligned} \tfrac{\phi^{(n+1)}}{\triangle t} + \mathcal{A}(\phi_{(n+1)}) &= \tfrac{\phi^{(n)} \circ X^{(n)}}{\triangle t} \\ \phi^{(0)} &= \phi_0 \end{aligned}$$

Lors d'une discrétisation par éléments finis, $X^{(n)}(x)$ n'est en général pas un sommet du maillage, même si x l'est. Il faudra donc savoir interpoler $\phi^{(n)}$ en un point quelconque du maillage de Ω (fig.2).

3.2.3 Approximation d'ordre deux en temps

L'équation différentielle est approchée par le schéma de Runge-Kutta du second ordre suivant :

$$\frac{X(x, t_{n+1}) - X(x, t_{n+\frac{1}{2}})}{\triangle t/2} = \mathbf{u}^{(n)}(X(x, t_{n+1})) \tag{3.29}$$

$$\frac{X(x, t_{n+1}) - X(x, t_n)}{\triangle t} = \mathbf{u}^{(n)}(X(x, t_{n+\frac{1}{2}})) \tag{3.30}$$

En notant $X^* = X(x, t_{n+\frac{1}{2}})$, il vient

$$X^*(x) := x - \frac{\triangle t}{2}\mathbf{u}^{(n)}(x) \tag{3.31}$$

$$X^{(n)}(x) := x - \triangle t \times \mathbf{u}^{(n)}(X^*(x)) \tag{3.32}$$

Soit encore

$$X^{(n)}(x) := x - \triangle t \mathbf{u}^{(n)}(x - \frac{\triangle t}{2}\mathbf{u}^{(n)}(x)) \tag{3.33}$$

Le problème précédent sera approché par

$$\frac{\phi^{(n+1)}}{\triangle t} + \mathcal{A}(\theta\phi^{(n+1)} + (1-\theta)\phi^{(n)}) = \frac{\phi^{(n)} \circ X^{(n)}}{\triangle t} \tag{3.34}$$

$$\phi^{(0)} = \phi_0 \tag{3.35}$$

Ce schéma est stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ et d'ordre deux pour $\theta = \frac{1}{2}$. Pour $\theta \in]\frac{1}{2}, 1[$, le schéma est d'ordre un. Pour $\theta = 1$, on retrouve le schéma d'Euler implicite. Dans la pratique, on prend θ proche de $\frac{1}{2}$, par exemple $\theta = 0.55$ ou bien $\theta = 0.6$. Ceci garantit la stabilité pour tout $\triangle t$ et est proche d'un schéma d'ordre deux.
Remarque : On a la même histoire pour les points X^* et $X^{(n)}$ qui ne sont en général pas des sommets du maillage, alors il faudra savoir interpoler $\phi^{(n)}$ et $\mathbf{u}^{(n)}$ en un point quelconque du maillage de Ω .

Chapitre 4

Problème test

La figure 4.1 représente une coupe verticale d'une bulle d'air qui subit un phènomene de cisaillement.

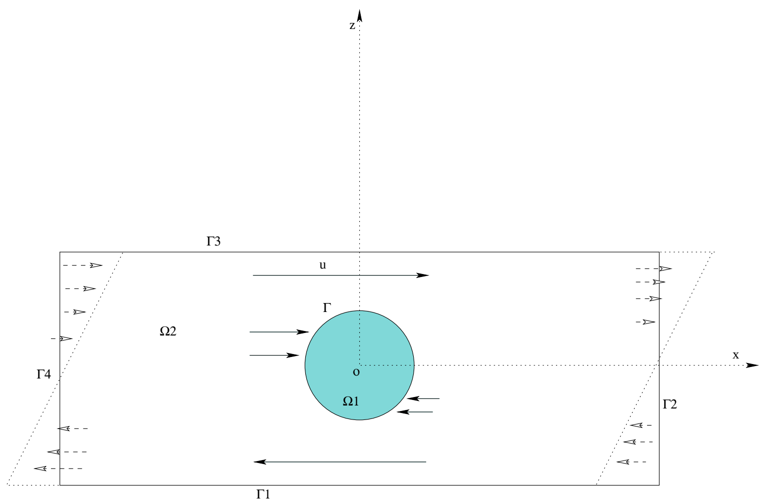


FIG. 4.1 – Cisaillement

4.1 Enoncé du problème

D'après ce qui précède, on peut s'intéresser maintenant à définir le problème complètement. Les équations de Navier-Stokes sans dimension s'écrivent voir[MP96] :

$$(NS) \left\{ \begin{array}{rl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho(\phi)} & = F \\ \nabla . \mathbf{u} & = 0 \end{array} \right.$$

où

F = - $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ - $\frac{z}{Fr}$ + $\frac{1}{\rho(\phi)}(\frac{1}{Re}\nabla.(2\mu(\phi))$ - $\frac{1}{We}k(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi)$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur}\,\partial\Omega \\ (2\mu_\ell - 2\mu_g).n & = & (p_\ell - p_g + \sigma k).n & \text{sur}\,\Gamma \\ [\mathbf{u}] & = & 0 & \text{sur}\,\Gamma \end{array}\right.$$

Remarque :
La condition $\mathbf{u}.n = 0$ est mise pour éviter la pénétration à travers la frontière. Cette condition implique que la bulle considérée est de volume constant.

4.2 Surface libre

Pour représenter le domaine Ω à un instant t, on peut représenter la surface libre (l'interface entre les deux fluides) par la fonction de l'ensemble de niveau ϕ. Pour comprendre mieux l'équation(1.1) du chapitre 1, nous pouvons employer les idées de la méthode de caractéristique (chapitre 3). Supposons qu'au temps t, l'interface Γ est paramétrée par (x(s,t),y(s,t)), alors l'évolution de (x,y) est déterminée par les équations :

$$\frac{dx(s,t)}{dt} = u(x(s,t), y(s,t))$$
$$\frac{dy(s,t)}{dt} = v(x(s,t), y(s,t))$$

où : $\mathbf{u}$ = (u,v).
Puisque ϕ(x(s,t),y(s,t)) est définie pour être zéro pour tout (s,t), nous devons avoir :

$$\frac{d\phi(x(s,t), y(s,t)), t)}{dt} = \frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = \phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0$$

Le problème est complété par des conditions intiales et aux limites :
Trouver $\mathbf{u}$, p, ϕ tels que :

$$
(P)\left\{\begin{array}{rcll}
\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla\phi & = & 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\
\\
\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\nabla p}{\rho(\phi)} & = & F & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\
\nabla.\mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\
\\
\phi & = & \phi_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega_-\times]0,T[\\
\mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\
\\
\phi(t=0) & = & \phi_0 & \text{dans } \Omega \\
\mathbf{u}(t=0) & = & \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\
\\
[\mathbf{u}] & = & 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\\
(2\mu_\ell-2\mu_g).n & = & (p_\ell-p_g+\sigma k).n & \text{sur } \Gamma\times]0,T[
\end{array}\right.
$$

où $\partial\Omega_-$ représente la frontière amont :

$$\partial\Omega_-(t)=\{x\in\partial\Omega \text{ tel que } \mathbf{u}_\Gamma.n(x,t)<0\}$$

La fonction ϕ est initialisée à $t=0$ à la distance à l'interface, compté négativement dans Ω_1 et positivement dans Ω_2.

Maintenant, on pourra utiliser l'idée du paragraphe 2.1.2, qui consiste à régulariser l'interface, et donc de remplacer la frontière infiniment étroite par une frontière étendue.

nous remplaçons les fonctions ρ, η par les fonctions régulières ρ_ϵ et η_ϵ.
On obtient une autre formulation du probléme :

Trouver $\mathbf{u}$, p, ϕ tels que :

$$
(P)_\epsilon \left\{
\begin{array}{rcll}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\phi & = & 0 & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\
 & & & \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho_\epsilon(\phi)} & = & F & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\
\nabla.\mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\
 & & & \\
\phi & = & \phi_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega_- \times]0,T[\\
\mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\
 & & & \\
\phi(t=0) & = & \phi_0 & \text{dans } \Omega \\
\mathbf{u}(t=0) & = & \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\
 & & & \\
[\mathbf{u}] & = & 0 & \text{sur } \Gamma \times]0,T[\\
(2\mu_\ell - 2\mu_g).n & = & (p_\ell - p_g + \sigma k).n & \text{sur } \Gamma \times]0,T[
\end{array}
\right.
$$

Dans ce cas. F est donnée par :

F = - $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ - $\frac{z}{Fr}$ + $\frac{1}{\rho_\epsilon(\phi)}(\frac{1}{Re}\nabla.(2\mu_\epsilon(\phi))$ - $\frac{1}{We}k(\phi)\delta_\epsilon(\phi)\nabla\phi)$

Si ϵ converge vers zéro, la solution de $(P)_\epsilon$ converge vers celle de (P).

Deuxième partie

Méthode numérique

Chapitre 5

Discrétisation en temps

A partir de la formulation *Level Set* des équations de Navier-Stokes, couplée avec une équation de transport de la fonction Level Set, il sera possible de résoudre le problème.
Utilisons le schéma d'Euler implicite, et la méthode caractéristique du type de celle introduite au paragraphe 3.2.2.

alors le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\frac{d\mathcal{Y}(t)}{dt} + \mathcal{F}(\mathcal{Y}) & = 0 \\ \mathcal{Y}(t=0) & = \mathcal{Y}_0 \end{cases}$$

sera approché, en utilisant l'approximation 2.26 du paragraphe 2.2.2, par

$$\begin{cases} \mathcal{M}\frac{\mathcal{Y}^{(n+1)} - \mathcal{Y}^{(n)} \circ X^{(n)}}{\triangle t} + \mathcal{F}(\mathcal{Y}^{(n+1)}) & = 0 \\ \mathcal{Y}^{(0)} & = \mathcal{Y}_0 \end{cases}$$

Dans notre problème, on prend :

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = (1, \rho(\phi), 0)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Re}\triangledown.(2\mu(\phi)) + \frac{z}{Fr}\rho(\phi) + \frac{1}{We}k(\phi)\delta(\phi)\triangledown\phi + \triangledown p \\ 0 \end{pmatrix}$$

On se place à l'instant t_{n+1}, supposons qu'on connait les termes $\mathbf{u}^{(n)}$, $\phi^{(n)}$ et $p^{(n)}$, calculons alors les termes correspondant à t_{n+1}.

Surface libre : $\phi^{(n+1)}$

A partir de l'équation de transport de ϕ et de la méthode caractéristique (FIG.1), on aura, en utilisant le schéma d'Euler, une approximation de la dérivée totale de ϕ :

$$\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)} \circ X^{(n)}}{\triangle t} = 0$$

ce qui conduit à

$$\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)} \circ X^{(n)} = 0$$

et alors on a :

$$\phi^{(n+1)} := \phi^{(n)} \circ X^{(n)}$$

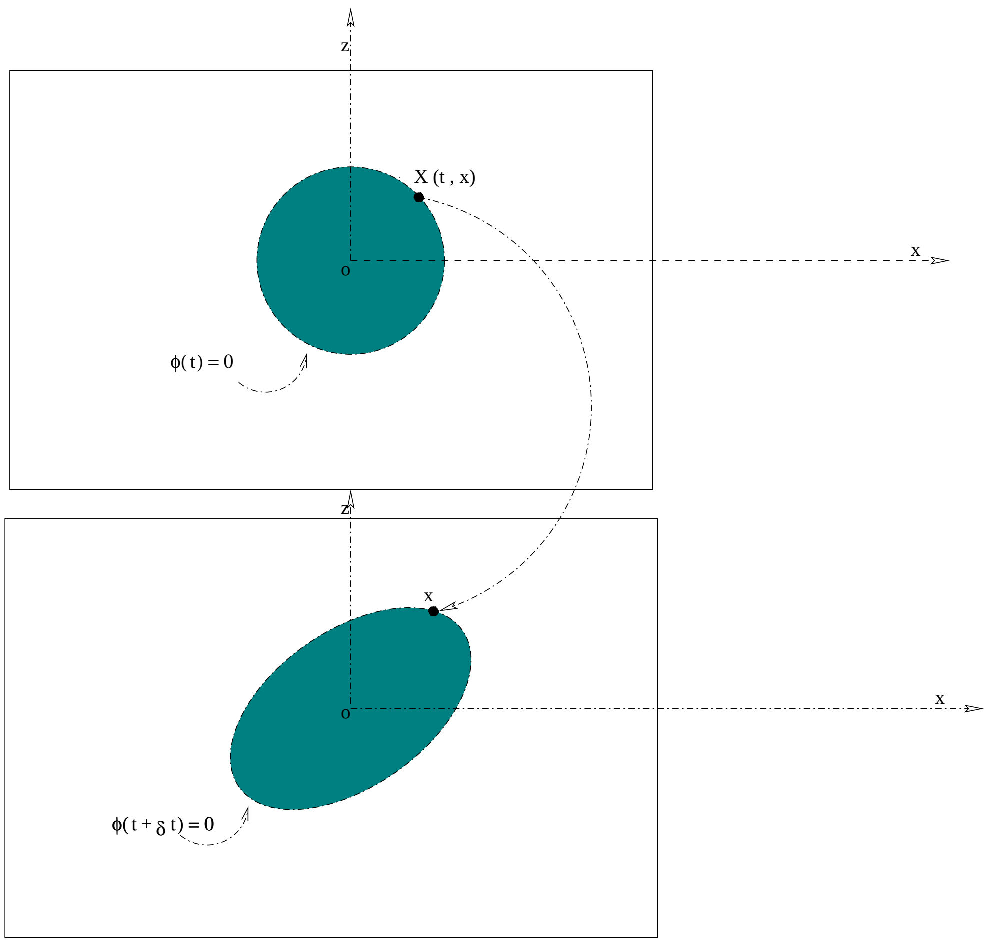


FIG. 5.1 – La représentation de l'interface à deux instants consécutifs, ainsi que la relation entre les positions des points entre les deux instants.

Nous allons maintenant developper l'algorithme tout entier avec

5.1 Schéma d'Euler implicite sans distance signée

ALGORITHME.1

Paramètre numérique : $\triangle t$

$\diamond$ $n = 0$: $(\phi^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}) := (\phi_0 \ , \mathbf{u}_0)$ est donné.
$\diamond$ $n \geq 0$: $\phi^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}$ étant connu, calculer $\phi^{(n+1)}$ tel que

$$\phi^{(n+1)} := \phi^{(n)} \circ X^{(n)}$$

puis calculer successivement :

$$\begin{aligned}
\rho^{(n+1)} &:= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) H \circ \phi^{(n+1)} \\
\eta^{(n+1)} &:= \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) H \circ \phi^{(n+1)} \\
k^{(n+1)} &:= \mathcal{K}(\bigtriangledown \rho^{(n+1)}, \bigtriangledown \otimes \bigtriangledown \rho^{(n+1)}) \\
\mathbf{f}^{(n+1)} &:= \rho^{(n+1)}(-\tfrac{z}{Fr} + \tfrac{\mathbf{u}^{(n)} \circ X^{(n)}}{\triangle t}) - \tfrac{1}{We} k^{(n+1)} \delta^{(n+1)} \bigtriangledown \phi^{(n+1)}
\end{aligned}$$

et enfin, trouver $\mathbf{u}^{(n+1)}$ et $p^{(n+1)}$ tel que

$$\begin{array}{rcll}
\frac{\rho^{(n+1)}}{\triangle t}\mathbf{u}^{(n+1)} - \frac{1}{Re} \bigtriangledown .(2\eta^{(n+1)} \mathcal{D}(\mathbf{u}^{(n+1)})) + \bigtriangledown p^{(n+1)} & = & \mathbf{f}^{(n+1)} & \text{dans } \Omega \\
- \bigtriangledown .\mathbf{u}^{(n+1)} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\
\mathbf{u}^{(n+1)} & = & {\mathbf{u}_\Gamma}^{(n+1)} & \text{sur } \partial\Omega
\end{array}$$

La notation $X^{(n)}(x)$ représente la position au temps t_n de la particule qui est à la position x au temps t_{n+1}.
L'expression de la courbure $\mathcal{K}$ en fonction des dérivées de ϕ est donnée, en dimension deux par :

$$\mathcal{K} = \frac{{\phi_1}^2 \phi_{22} + \phi_{11} {\phi_2}^2 - 2\phi_1 \phi_2 \phi_{12}}{({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2)^{3/2}}$$

Dans l'expression précédente, nous avons noté :

$$\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \text{ et } \phi_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

La fonction Level Set ϕ est initialisée comme une fonction distance signée. En particulier, nous avons $|\bigtriangledown \phi| = 1$ à l'instant initial. Cependant cette propriété n'est pas conservée au cours

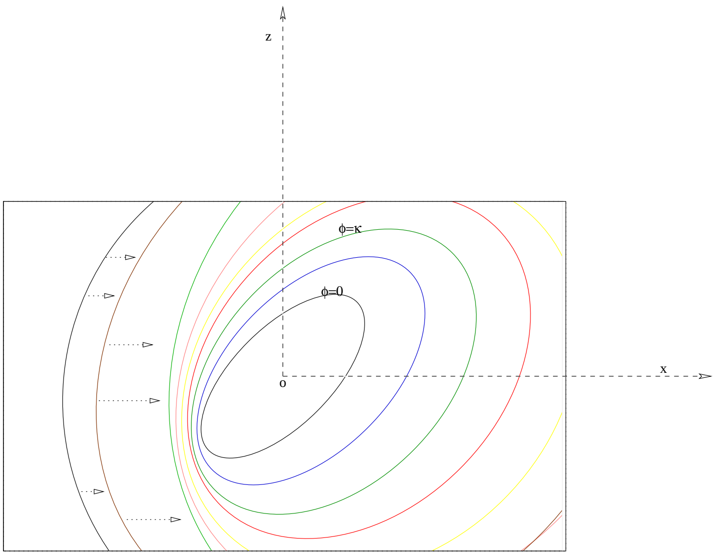


FIG. 5.2 – Remarquons le phénomène de transport pour arriver à une condensation des lignes de niveau au voisinage de l'interface.

du temps : la fonction ϕ étant transportée par le champ de vitesse au cours du temps, il se peut que $| \bigtriangledown \phi|$ devienne très grand en un temps fini.

Par exemple quand la bulle vient de se stabiliser. Alors à un instant fini t_0, l'interface ne bouge plus beaucoup. Par contre toutes les lignes de niveau se deplacent et elles vont se reserrer au voisinage de l'interface, le gradient ne sera alors pas borné en temps voir figure (5.2).

Les problèmes de calcul numérique sont rencontrés au voisinage de l'instant t_0 il sera alors difficile de poursuivre les calculs au delà de t_0. Ainsi, l'idéal est d'avoir pour ϕ une fonction distance signée à chaque instant. On va pour cela modifier l'algorithme précédent , en ajoutant un étape supplémentaire dite étape de *re-mormalisation de* ϕ.

5.2 Schéma d'Euler implicite avec distance signée

ALGORITHME.2

Paramètres numériques : $\triangle t$,$\triangle \tau$, K

$\diamond\, n = 0$: $(\phi^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}) := (\phi_0, \mathbf{u}_0)$ est donné.
$\diamond n \leq 0$: $(\phi^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)})$ étant connu, calculer ϕ^* tels que

$$\phi^* := \phi^{(n)} \circ X^{(n)}_{\mathbf{u}^{(n)}}.$$

ensuite, calculer $\phi^{(n+1)}$ selon :
$\diamond\, k = 0$: $\psi := \phi^*$est donné.
$\diamond\, 0 \leq k \leq K$: $\psi^{(k)}$ étant connu.

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{w}^{(k)} & := & signe(\phi^*)\frac{\nabla\psi^{(k)}}{|\nabla\psi^{(k)}|} & \text{dans } \Omega \\ \psi^{(k+1)} & := & \psi^{(k)} \circ X^{(k)}_{\mathbf{w}^{(k)}} + \triangle\tau signe(\phi^*) & \text{dans } \Omega \end{array}$$

$\diamond k = K$: $\phi^{(n+1)} := \psi^{(k)}$.

puis calculer successivement :

$$\begin{aligned} \rho^{(n+1)} &:= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H \circ \phi^{(n+1)} \\ \eta^{(n+1)} &:= \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1)H \circ \phi^{(n+1)} \\ k^{(n+1)} &:= \mathcal{K}(\nabla\rho^{(n+1)}, \nabla \otimes \nabla\rho^{(n+1)}) \\ \mathbf{f}^{(n+1)} &:= \rho^{(n+1)}\left(-\frac{z}{Fr} + \frac{\mathbf{u}^{(n)}\circ X^{(n)}}{\triangle t}\right) - \frac{1}{We}k^{(n+1)}\delta^{(n+1)}\nabla\phi^{(n+1)} \end{aligned}$$

et enfin, trouver $\mathbf{u}^{(n+1)}$ et $p^{(n+1)}$ tel que

$$\begin{array}{rcll} \frac{\rho^{(n+1)}}{\triangle t}\mathbf{u}^{(n+1)} - \frac{1}{Re}\nabla .(2\eta^{(n+1)}\mathcal{D}(\mathbf{u}^{(n+1)})) + \nabla p^{(n+1)} & = & \mathbf{f}^{(n+1)} & \text{dans } \Omega \\ -\nabla .\mathbf{u}^{(n+1)} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{(n+1)} & = & \mathbf{u}_\Gamma{}^{(n+1)} & \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

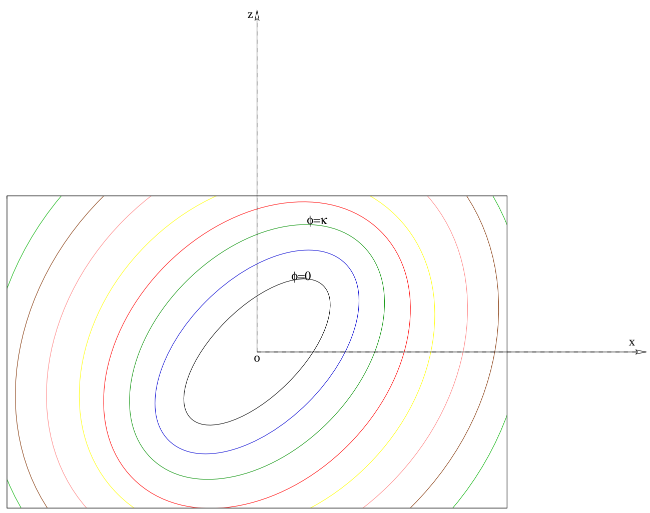


FIG. 5.3 – *le même phénomène de transport, mais avec une étape de re-normalisation. Nous remarquons que les lignes de niveaux sont toujours séparées les unes des autres.*

Chapitre 6

Discrétisation en espace

A chaque étape de l'algorithme précédent, nous avons à résoudre un système linéaire de type Stokes. Nous pouvons le résoudre efficacement par une méthode d'éléments finis.
Pour ce faire nous en écrivons la formulation variationnelle.

6.1 Formulation variationnelle dans le cas plan

En notant $\alpha = \frac{\rho^{(n+1)}}{\Delta t}$, $\mathbf{f}$ le second membre connu[1] de la discrétisation de NS entre $]t_n, t_{n+1}[$, et $\lambda = \frac{2}{Re}\eta^{(n+1)}$.
Nous pouvons utiliser le lemme de *relèvement à divergence nulle* voir [VP86], pour se ramener, sans perte de généralité à un problème avec une condition aux limites homogène.
Soit $\mathcal{J}$ l'espace des produits $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$
avec :
$H_0^1(\Omega)^2 = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0\}$
Trouvons $(\mathbf{u}$,p$) \in \mathcal{J}$ tel que $\forall$ $(\mathbf{v}$,q$) \in \mathcal{J}$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha \int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v}dx - \int_\Omega \bigtriangledown.(\lambda \mathcal{D}(\mathbf{u})).\mathbf{v}dx + \int_\Omega \bigtriangledown p.\mathbf{v}dx & = & \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}dx \\ \int_\Omega \bigtriangledown q.\mathbf{u}dx & = & 0 \end{array} \right.$$

La formule de Green nous donne alors :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha \int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v}dx + \int_\Omega \lambda \mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{v})dx - \int_\Omega p \bigtriangledown.\mathbf{v}dx & = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}dx \\ - \int_\Omega q \bigtriangledown.\mathbf{u}dx & = 0 \end{array} \right.$$

[1] C'est dans ce second membre qu'apparaissent les termes d'inertie, voir chapitre 5, page 22.

Définissons sur $\mathcal{J}$ les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \alpha(\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\lambda\mathcal{D}(\mathbf{u}),\mathcal{D}(\mathbf{v})) \\ b(\mathbf{u},q) &= -(\bigtriangledown.\mathbf{u},q). \end{aligned}$$

où la relation (.,.) désigne le produit scalaire de L^2. Trouvons alors ($\mathbf{u}$, p) dans $\mathcal{J}$ tel que $\forall$ ($\mathbf{v}$, q) dans $\mathcal{J}$ on a :

$$(FVS):\left\{\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},q) &= (\mathbf{f},\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u},q) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Pour une étude détaillée des résultats d'existence, d'unicité et de la convergence pour le problème de stokes, on pourra consulter [VP86] ou bien [O.P88].

6.2 Approximation en espace du problème de Stokes

Soient $V_h \subset H_0^1(\Omega)^2$ et $Q_h \subset L^2$ deux espaces vectoriels de dimension finie. L'approximation variationnelle du probléme précédent s'écrit alors :
Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h)$ dans $\mathcal{J}_h = V_h \times Q_h$ tel que $\forall$ $(\mathbf{v}_h, q_h)$ dans $\mathcal{J}_h$ on a :

$$(FVS)_h:\left\{\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+b(\mathbf{v}_h,q_h) &= (\mathbf{f},\mathbf{v}_h) \\ `b(\mathbf{u}_h,q_h) &= 0 \end{aligned}\right.$$

La construction par éléments finis de V_h et Q_h doit être faite avec soin : on pourra consulter [FM91], pour des combinaisons satisfaisantes d'approximations des vitesses et pressions. Dans notre problème on a approché les vitesses par des fonctions continues quadratiques par morceaux et les pressions par des fonctions continues affines par morceaux. c'est la combinaison la plus utilisée et elle est proposée initialement dans [PG74]. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω. Les espaces V_h et Q_h sont alors définis par :

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h \in C^0(\Omega)^2\, \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \mathbf{v}_h|_K \in (P_2)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in C^0(\Omega); q_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

6.3 Résolution du problème de Stokes discret

Soit $(\Upsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V_h et $(\chi_j)_{1\leq j\leq m}$ une base de Q_h. En décompsont $\mathbf{u}_h$ et p_h sur ces bases respectives, le problème de Stokes discret se ramène à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

avec U formé des composantes de u_h sur la base $\{\Upsilon_i\}$ mises en colonne, identiquement avec P et p_h sur $\{\chi_j\}$, et

$$\begin{array}{rcll} A_{ij} & = & a(\Upsilon_i, \Upsilon_j), & i, j = 1...n \\ B_{ij} & = & b(\Upsilon_i, \chi_j), & i = 1...n \mathrm{et} j = 1...m \\ G_j & = & (f, \Upsilon_j), & i = 1....n \end{array}$$

La matrice du problème (6.1) n'est pas définie positive.
Considérons plutôt

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

On peut éliminer P avec les dernières équations, il reste :

$$(A + \frac{1}{\epsilon} B^T B) U = G$$

On résoud ce système par une méthode standard puisque la matrice $(A + \frac{1}{\epsilon} B^T B)$ est symétrique définie positive[2]. C'est possible aussi de résoudre ce probéme en utilisant la méthode de gradient conjugué.

[2] C'est encore une grosse matrice, mais c'est la méthode la plus simple à programmer.

Chapitre 7

Résolution numérique

7.1 L'environnement C++ freefem++

Frefem++ est un logiciel fournissant les outils de calcul matriciel efficace et de résolution de systèmes linéaires ou non, ainsi que les objets nécessaires aux él'ements finis, allant des maillages aux champs et aux formes bilinéaires discrets Voir[HP02]
Travailler dans cet environnement m'a permis de me concentrer sur les spécifités de la méthode d'élements finis, dont une mise en oeuvre n'aurait jamais pu être envisagée autrement dans le cadre d'un stage de quelques mois.

7.2 Choix de discrétisation

Pour la discrétisation en temps, on a choisi la méthode d'Euler implicite avec la méthode des caractéristiques ; tandis que pour la discrétisation en espace, on a choisi les éléments finis : P2-P1 pour la vitesse et la pression et P2 pour ϕ.

7.3 Implémentation

On décrit ici la mise en oeuvre des étapes décrites lors de la discrétisation en temps.
Voir l'algorithme 2, page 28. Quand on a supprimé les dimensions des équations de Navier-Stokes paragraphe 3.1.1, il apparaît un nombre sans dimension, qui est le Reynolds.
La valeur de ce nombre est un des principaux critères pour le choix d'une méthode numérique. S'il est très petit, l'écoulement est dominé par la viscosité et on a recours à des méthodes spécifiques qui permettent de négliger les termes inertiels des équations. S'il est très grand, c'est l'inertie du fluide qui prédomine, d'autres méthodes sont alors utilisées.

7.3.1 Restriction d'implémentation

Nous nous sommes restreints, dans le cadre de ce stage, aux cas physiques de nombre de Reynolds faibles, où les termes d'inertie sont négligeables. .

Dans ce cas, les équations se réduisent à celles de Stokes et il n'est plus nécessaire de leur appliquer la méthode des caractéristiques pour le terme $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$, trop lourde à mettre en oeuvre dans le cadre de ce stage.

7.3.2 Résolution de la formulation Level Set du probléme de Stokes

On peut résoudre le problème de Navier-Stokes à l'instant t_{n+1} avec Re ≈ 0, en utilisant l'algorithme 2 page 27.
Nous avons utilisé la méthode de Crout basée sur une factorisation LU de la grande matrice .
L'algorithme de gradient conjugué est aussi disponible dans **freefem++**.

7.3.3 Calcul de la surface libre : $\phi^{(n+1)}$

L'équation 3.3 montre que la fonction ϕ est en mouvement de convection par la vitesse du fluide $\mathbf{u}$, alors que dans le logiciel, un opérateur qui est noté **convect** est disponible pour faire le calcul de ϕ à chaque instant.
Par exemple, connaissant $\phi^{(n)}$, alors on peut calculer $\phi^{(n+1)}$ par :

$$\phi^{(n+1)} = \mathbf{convect}([u^{(n)}, v^{(n)}], - \triangle t_n, \phi^{(n)})$$

avec

$\mathbf{u}^{(n)} = (u^{(n)}, v^{(n)}) = \mathbf{u}(t_n)$
$\phi^{(n)} = \phi(t_n)$ déjà connus.
$\triangle t_n = t_{n+1} - t_n$

Effectivement, on a approximé $\phi^{(n+1)}$ par $\phi^{(n)}(x - \triangle t_n.\mathbf{u}^{(n)}(x))$.

7.3.4 Étape de re-normalisation

Dans cette étape, nous changeons le paramètre numérique dt en $d\tau$ où τ est un temps artificiel.
Dans **freefem++**, les fonctions d'éléments finis sont définies sur un ouvert Ω de R^2. Ainsi, pour définir ou calculer un vecteur défini sur Ω^2, il faut définir chacune de ses composantes comme une fonction d'élément finis définie sur Ω.
Nous verrons après que, même dans le cas de la formulation variationnelle, le calcul se fait sur les composantes des vecteurs.
Nous avons résolu une équation hyperbolique en $\mathbf{d}$. Encore une fois, nous avons utilisé l'opérateur **convect**.
Nous pouvons faire trois ou quatre itérations dans cette étape, car $\phi(t=0)$ est déjà une distance signée.

Chapitre 8

Experiences numériques

8.1 Validation

Le code obtenu est bien sûr restreint dans ses applications par les hypothèses faites dans les chapitres précédents, à savoir que la surface libre est définie comme étant le niveau zéro d'une fonction assez régulière.
Les algorithmes étant faits, il faut passer à des exemples de validation de la méthode.

Nous voulons introduire maintenant un exemple pour signaler l'importance de la méthode numérique utilisée.
Le phénomène de la remontée d'une bulle de gaz à travers le liquide, apparaît dans beaucoup de situations. Observons les figures (8.1) et (8.2), et remarquons l'évolution de la bulle de gaz. Selon les valeurs des paramètres physiques, nous obtenons avoir des déformations différentes. Par exemple, si We est grand alors nous aurons un coefficient de tension de surface faible et par suite une déformation rapide. En même temps, si nous avons Fr grand, alors ça correspond à un champ de pesanteur faible et par suite une vitesse plus importante de la montée de la bulle. En combinant les deux, on aura une bulle qui se déforme fortement. Il faut être prudent, en choisissant ces paramètres.
Dans notre test nous avons pris un cas qui correspond à $We = 7.6$, $Fr = 0.96$ et Re petit car nous avons négligé l'effet d'inertie, car ce sont les mêmes valeurs prises par Sussman dans son article voir[MAJ+99]
Remarque :Le problème que nous considérons ici est un problème de géometrie plane, bien que le problème réel soit tridimensionnel et à symétrie axiale. Nous pouvons interpréter notre problème comme une modélisation de bulle cylindrique.

FIG. 8.1 – Evolution de la bulle.We=7.6.Fr=0.96.h=0.14

Pour une autre valeur de We :

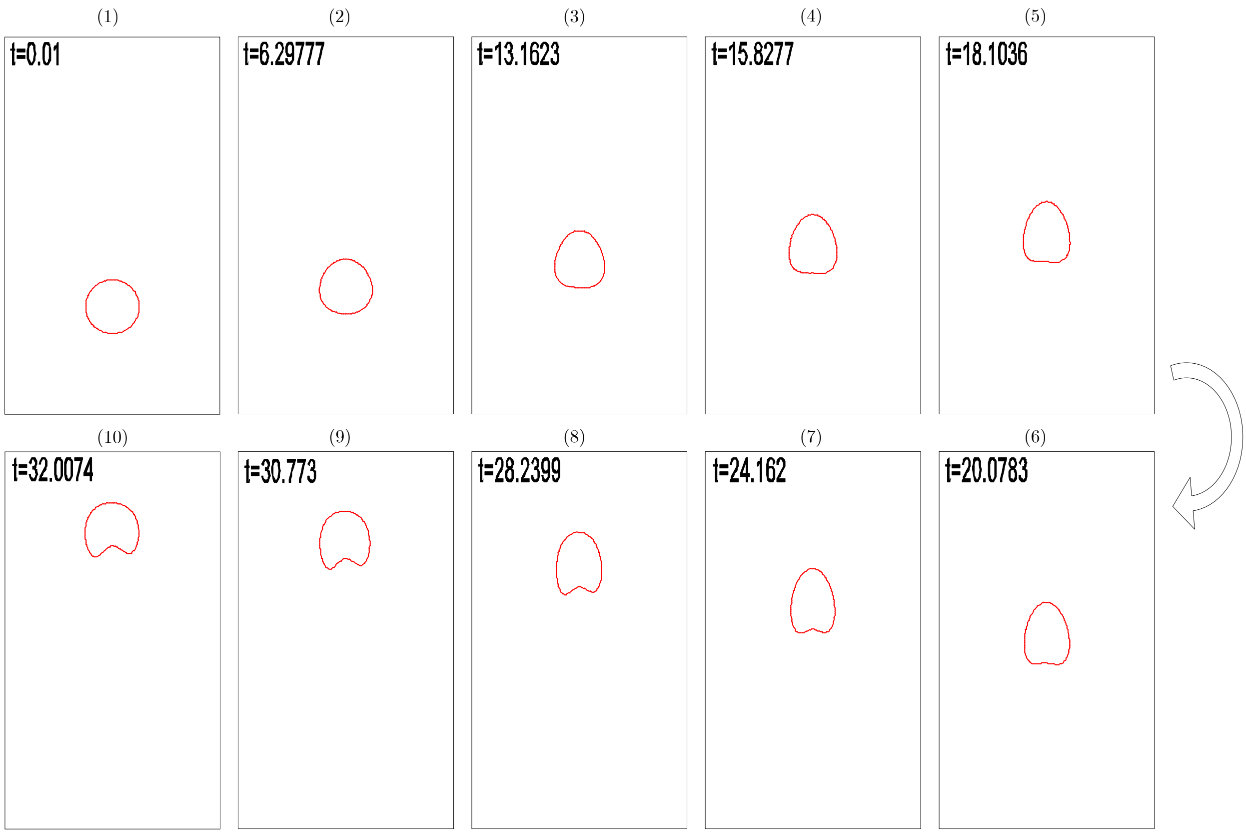


FIG. 8.2 – Evolution de la bulle.We=9.6.Fr=0.96.h=0.14

La vitesse initiale de la bulle est nulle. La bulle commence à monter lentement puis sa vitesse augmente pour atteindre une valeur limite notée $\mathbf{u}_\infty$. Nous pouvons donc dire qu'il y a convergence vers un état **stable**.
Nous avons déjà signalé le problème de la conservation de volume avec la méthode level set couplée aux différences finies. Dans notre travail, en s'appuyant sur les éléments finis, nous avons obtenu des résultats très intéressants à ce niveau. La figure (8.3) montre la variation du volume de la bulle au cours du temps. Ces résultats de conservation ne sont que constatés numériquement, mais ils sont vérifiés sur un grand nombre d'éxperiences.
Rappelons que nous avons re-normalisé la fonction level set pour en faire une fonction distance signée. Ainsi, il ne faut pas négliger l'erreur commise sur l'approximation du volume durant cette étape de re-normalisation[1].

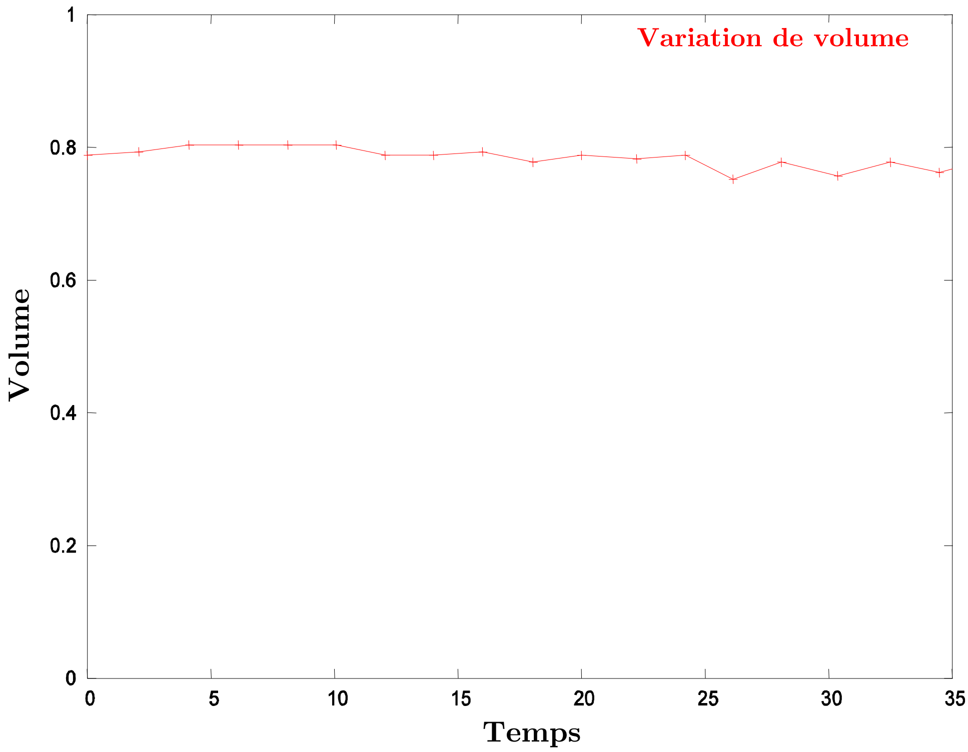


FIG. 8.3 – Évolution de la bulle.We=7.6.Fr=0.96.h=0.14

Afin de mesurer l'intérêt de la méthode dont nous venons de présenter des tests, comparons la à la méthode de différences finies. Sussman a utilisé la méthode de level set couplée avec la méthode de différences finies, ses résultats sont très intéressants, mais ils manquent de précision au niveau conservation de volume, où l'erreur est parfois de l'ordre de 35 pour cent. Par contre, dans notre méthode, l'erreur est de 2 pour cent.

[1]Tous les résultats conservatifs sont obenus sans faire cette étape supplémentaire

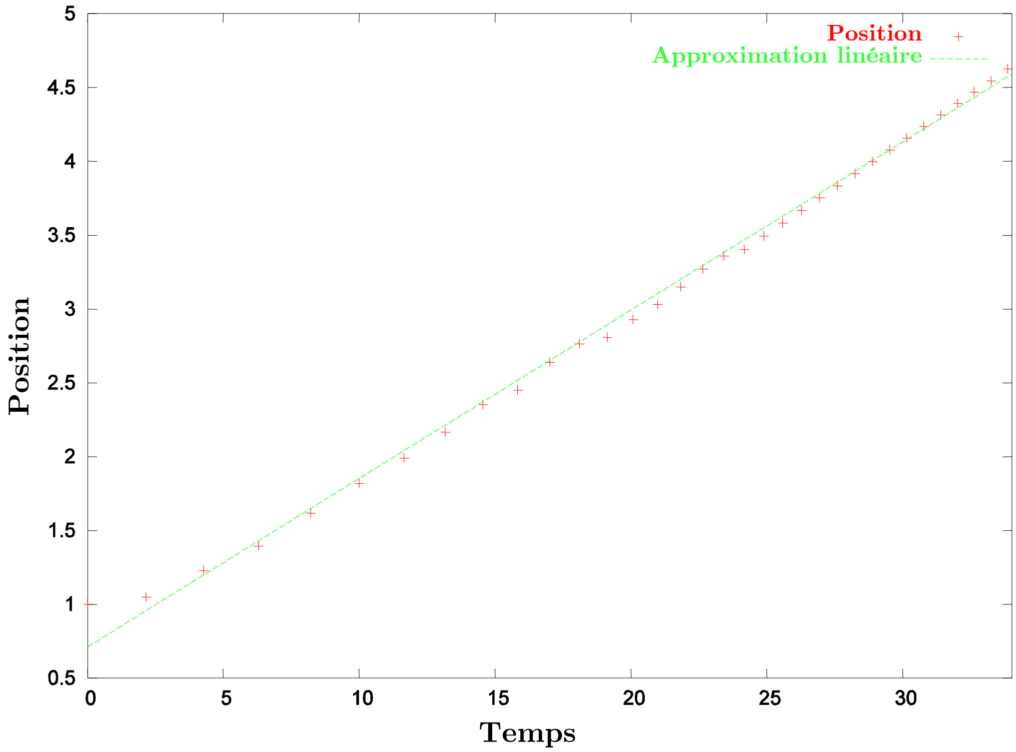


FIG. 8.4 – La position de la centre de gravité de la bulle, avec une approximation moindre carré linéaire.We=9.6.Fr=0.96.h=0.14

8.2 Problème de cisaillement

Nous allons présenter ici les tests et les limites de cette méthode pour le problème du cisaillement, qui à l'heure actuelle n'est toujours pas résolu.
Pour tenter de valider la méthode sur ce problème, nous avons effectué beaucoup de tests pour atteindre tant que possible les points critiques du probléme.

Le domaine de l'écoulement est un rectangle de longueur 7.2 et de hauteur 4.50. La bulle est centrée sur l'origine et elle est de rayon 0.5. Pour les conditions aux limites, on a pris la condition de Dirichlet homogène $\mathbf{u} = (y,0)$.
Nous avons négligé le terme de gravité ainsi que le terme d'inertie. Il apparaît un nouveau coefficient qui est le coefficient de capillarité Ca, qui est le rapport de la viscosité sur la tension de surface.
1/ Dans un premier test, Nous avons pris $Re = 0.5$, Fr trés grand[2] et $We = 1$, ce qui correspond à $Ca = 0.444$ d'aprés la relation

$$Ca = \frac{We}{Re}\frac{R}{H}$$

Nous avons commencé à faire le test numérique sans avoir aucune information sur les valeurs critiques des paramètres qui influent sur le problème.
Tout d'abord, pour atteindre un(d'avoir une vitesse limite constante), nous avons utilisé deux critères :
1> La norme L^2 de $\mathbf{u}$ converge vers une limite constante u_∞
2> Calculer la norme L^2 de la vitesse relative, et savoir si elle tend vers zéro.

[2]La force de gravité est nulle

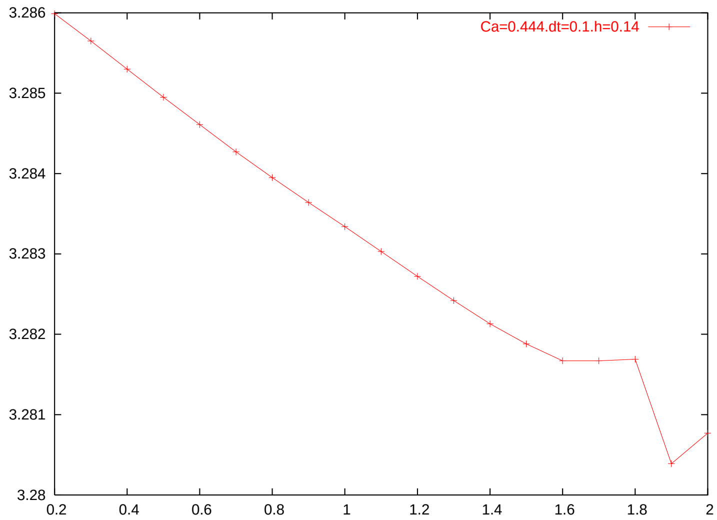


FIG. 8.5 – Test 1 $dt = 0.1$ et $h = 0.14$. Une décroissance de le norme L^2 de $\mathbf{u}$ avec une petite perturbation.Ca=0.444.dt=0.1.h=0.14

Nous avons vu d'après ce test et d'après plusieurs tests qu'on a fait qu'il y a pas un vrai problème en temps.
Aprés Nous avons passé pour tester le problème suivant h
Nous savons d'aprés un travail fait par Thierry BIBEN qu'il y a une valeur critique pour Ca qui est 1.7 tel qu'on a une position stable si $Ca < 1.7$ et inversement. Pour assurer que notre We correspond à $Ca < 1.7$, on va prendre $We = 0.2$

La figure (8.7) présente les résultats de deux tests (Test 1 : $h = 0.094$ et $dt = 0.1$. Test 2 : $h = 0.07$ et $dt = 0.1$), et montre la possibilité d'avoir un problème numérique en espace.

Interpretation
Nous voulons interpréter les deux étapes sensibles de notre algorithme
1> Etape de régularisation : dans cette étape, on a remplacé l'interface étroite par une interface étendue. D'aprés l'équation 3.13 l'épaisseur de l'interface est $\frac{2\epsilon}{\nabla\phi}$, alors qu'il est préférable d'avoir une épaisseur fixe pour l'interface. En général on choisit $\epsilon = 2h$.
2>Etape de re-normalisation : ϕ est déjà initialisée comme une fonction distance signée, on n'a donc pas besoin de beaucoup d'itérations pour normaliser ϕ à un instant quelconque. L'important est d'avoir vérifié sur beaucoup de tests que cette étape n'influe pas sur le problème rencontré.
Si le maillage est uniforme alors on aura, en utilisant la deuxième étape, une épaisseur uniforme de $2h$. La figure (8.9) montre la difficulté qui peut être alors rencontrée.

A mon avis, pour résoudre le problème avec ces singularités, il faut utiliser un maillage adaptatif. h est calculé localement, puis ϵ.
Pour adapter le maillage, j'ai pris comme critère la racine carré de l'énergie dissipée.

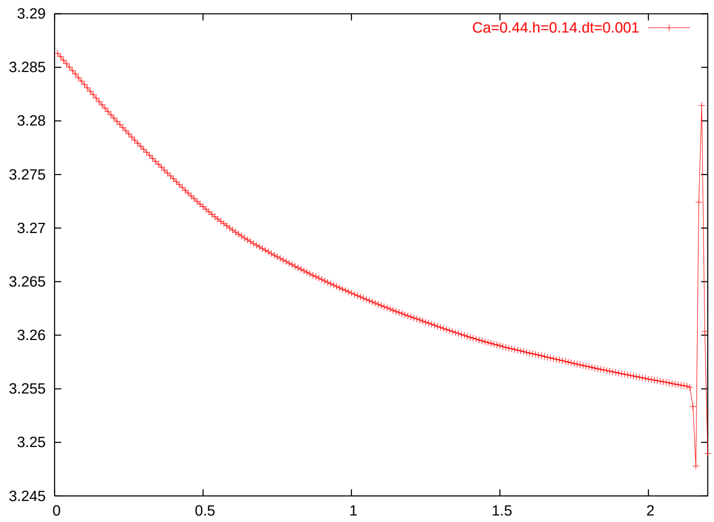


FIG. 8.6 – Test 2 $dt = 0.01$ et $h = 0.14$. Une décroissance en norme L^2 de la vitesse de la bulle au cours du temps

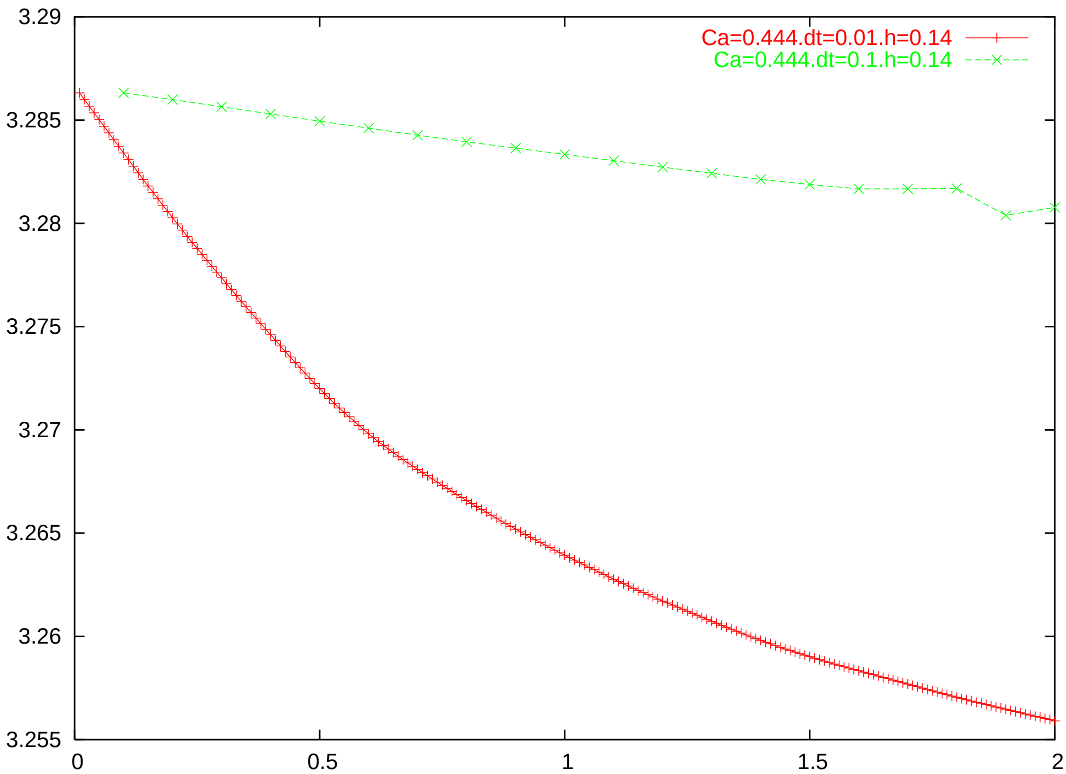
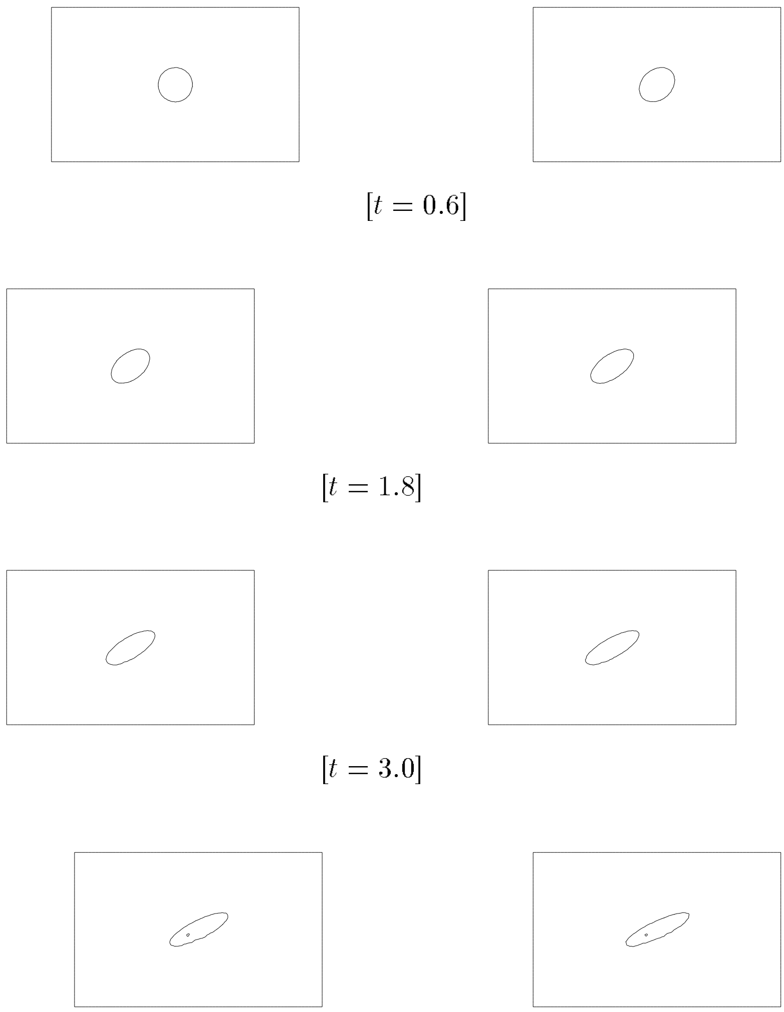


FIG. 8.7 – Une comparaison entre les deux courbes précédentes (en norme L^2 de la vitesse)



$[t = 0]$ $[t = 0.6]$ $[t = 1.2]$

$[t = 1.8]$ $[t = 2.5]$

$[t = 3.0]$ $[t = 3.5]$

$[t = 4]$

FIG. 8.8 – Cisaillement de la bulle.We=10,Re=0.5,h=0.14

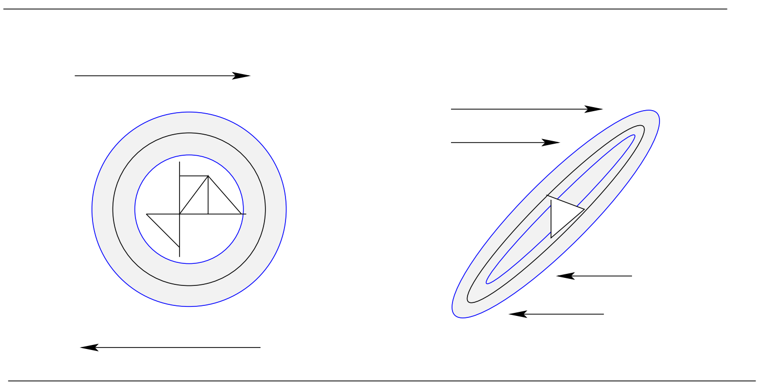


Fig. 8.9 – Il faut prendre en compte les nombres des éléments à l'intérieure.

Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps d'attaquer ce problème comme il faut. Nous avons fait un test avec le maillage adaptatif :

On remarque que le résultat obtenu par un maillage adaptatif est plus précis.

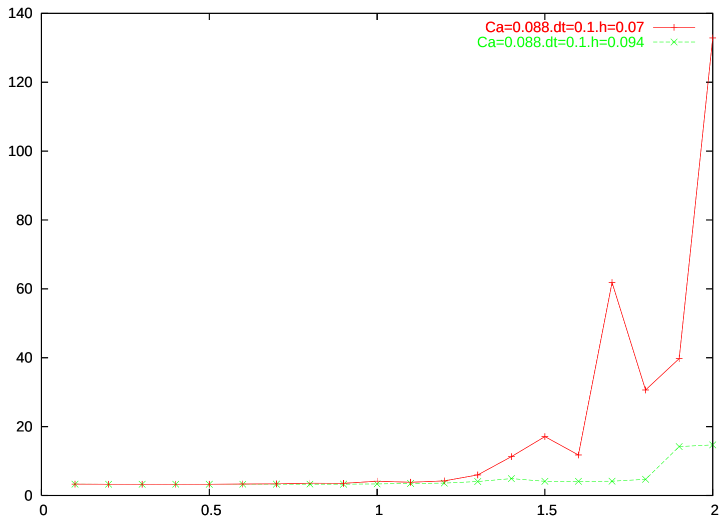


Fig. 8.10 – Tests à maillage constant en espace, et pour $dt = 0.1$ et $dt = 0.01$

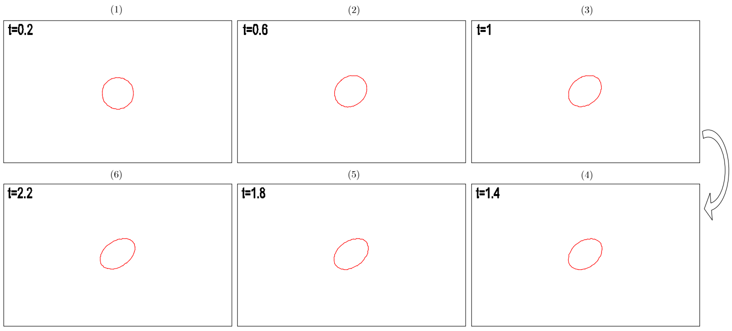


FIG. 8.11 – $We = 1$, $Re = 0.5$. Position qui correspond à un état stable.

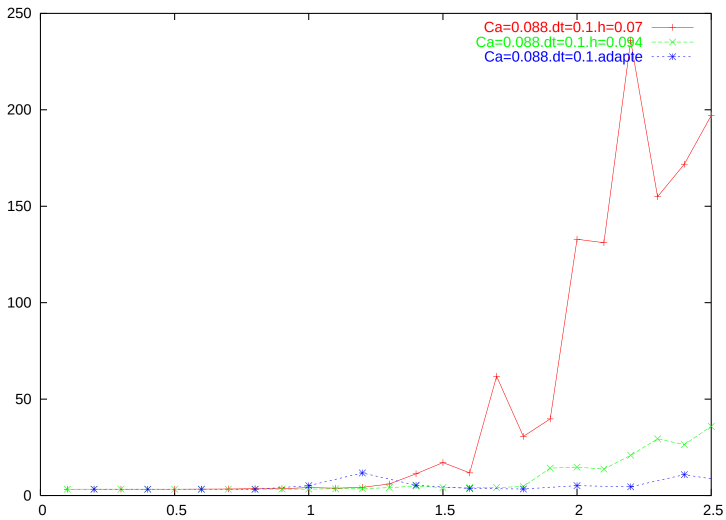


FIG. 8.12 –

Chapitre 9

Conclusion et perspectives

Comme nous l'avons montré, la particularité de notre travail a été de coupler la méthode de level set avec des éléments finis, ce qui nous a permis d'obtenir de bons résultats en dimension deux. Le principal avantage de cette méthode est de donner de bons résultats de conservation de chaque fluide, comme nous avons pu l'observer pour le problème de la bulle, et qui était un problème difficile pour les autres méthodes numériques jusqu'à présent utilisées. Cette méthode étant maintenant validée en dimension deux. On pourra maintenant commencer à aborder les problèmes axisymétriques.
Nous avons encore abordé, au cours de ce stage, le problème de cisaillement, nous avons essayé tant que possible extraire les résultats. Il y a beaucoup d'idées qui restent à étudier. C'est un problème ouvert, récent et difficile à appréhender. Il est envisageable de l'adapter en dimension trois. La méthode level set, les éléments finis ainsi que la méthode caractéristique existent en dimension trois , mais les outils logiciels actuels ne permettent pas encore de faire le lien entre elles.
Une validation tridimensionnelle permettrait d'avoir une méthode plus générale, donc applicable à de nombreux problèmes.
Pour le passage en dimension trois, il est aussi envisageable d'utiliser une méthode spectrale et de différences finies, qui a déjà été validée en dimension deux.

Bibliographie

[FM91] F.Brezzi and M.Frtin. *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer Verlag, 1991.

[HM01] H.Rui and M.Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection diffusion problems. *Numer.Math.(to appear)*, 2001.

[HP02] F. Hecht and O. Pironneau. *Freefem++ :Manual.* http ://www.freefem.org, Février,2002.

[J.P93] J.P.Best. The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities. *J.Fluid Mech.*, 251, 79, 1993.

[JSB93] J.M.Moulton-Stone and Blake. Gaz bubbkes bursting at a free surface. *J.Fluid Mech.*, 254, 437, 1993.

[JSB01] J.M.Boulton-Ston and Blake. Gaz bubbles bursting at a free surface. *J.Fluid Mech.*, 466 :254 :437, 2001.

[MAJ+99] M.Sussman, A.Almgren, J.Bell, P.Collela, L.Howell, M.Welcome, and P.Smeraka. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *J.Fluid Mech.*, 1999.

[MP96] M.Sussman and P.Smeraka. Axisymmetricfree boundery problems. *J.Fluid Mech.*, 1996.

[O.P88] O.PIRONNEAU. *Méthode des éléments finis pour les fluides.* Masson, 1988.

[O.P00] O.PIRONNEAU. The method of characteristics with gradients and integrals. *Proc Euro days 2000, J. Periaux ed. 2001*, 2000.

[OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Frontspropagating with curvature-dependent speed : Algoritms based on hamilton-jacobi formulations. *J.cpmput.Phys*, 79(1),12, 1988.

[PG74] P.Hood and G.Taylor. *Navier-Stokes equations using mixed interpolation in finite element in flow problems.* Oden ed., UAH press, 1974.

[P.S02] P.SARAMITO. *Notes de cours de DEA, Modélisation et calcul interface fluide -fluide, http ://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito.* DEA MA, Grenoble, 2002.

[TN88] T.S.Lundgren and N.N.Mansour. Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects. *J.Fluid Mech.*, page 194 :479, 1988.

[TN91] T.S.Lundgren and N.N.Mansour. Vortex ring bubbles. *J.Fluid Mech.*, page 244 :177, 1991.

[VP86] V.Girault and P.A.Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations - theory and algoritms.* Springer Verlag, 1986.

[YTBS95] Y.C.Chang, T.Y.Hou, B.Merriman, and S.Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *J.Comput.Phys.*, 1995.