Université Joseph Fourier
École doctorale de mathématiques et d'informatique de Grenoble
DEA de mathématiques appliquées

Simulation numérique d'écoulements à surface libre par une méthode Euler-Lagrange Arbitraire (ALE)

Jocelyn Étienne
sous la direction de
Jérôme Monnier
Pierre Saramito

Rapport de stage
le 26 juin 2001

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à Jérôme Monnier et à Pierre Saramito, qui en me guidant tout au long de ce stage m'ont fait bénéficier de leur expérience et de leur soutien.

Je remercie Bertrand Maury, dont l'exposé – présenté dans le cadre des séminaires de l'équipe – a grandement contribué à la dynamique de ce projet pendant sa phase d'initiation.
Claude Verdier a quant à lui apporté un éclairage physique précieux au problème abordé, ce dont je le remercie.

C'est enfin l'ensemble des membres du laboratoire, avec notablement les enseignants du DEA et mes collègues de bureau, ainsi bien sûr que les doctorants et stagiaires, que je remercie pour leur accueil, qui rend extrêmement tentant un séjour un peu plus prolongé parmi eux.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La tension superficielle

La force de tension superficielle a sur beaucoup d'écoulements une influence prépondérante, particulièrement lorsqu'une dimension au moins du fluide considéré est faible. Elle est présente dans d'innombrables phénomènes de la vie quotidienne et procédés industriels, même si la diversité de ses effets ne facilite pas son appréhension immédiate : c'est la tension superficielle qui donne aux gouttes de liquide leur forme ramassée, elle qui rompt les jets d'eau en gouttelettes, elle encore qui participe à la formation de ménisques à la surface des liquides contre les parois d'un récipient, ou organise les agrégats de bulles de savons.

On voit que les géométries concernées par la tension superficielle peuvent être très complexes, qui plus est, de nombreux écoulements instationnaires sont gouvernés par celle-ci.

Le cas des jets est particulièrement intéressant et offre un domaine d'application des plus vastes. On peut démontrer que du fait de la tension superficielle, un jet[1] est toujours instable passé une certaine distance de son origine, distance qui dépend des paramètres de l'écoulement. L'instabilité se traduira d'abord par l'amplification des vagues de surface puis par une rupture. Même en se plaçant en-deça de la distance critique, la tension superficielle a une influence prépondérante sur l'écoulement :

Le phénomène de la vie courante donnant le mieux à voir ce phénomène est sans doute l'écoulement de miel depuis une petite cuiller. Une fois établi en filet continu (le *jet*), une rupture du jet par réduction du débit fait brusquement remonter toute la partie du filet restée liée à la cuiller, pour former une goutte sur celle-ci et revenir à la situation de départ.

D'un point de vue industriel, ce type d'écoulement correspond aux procédés de formage libre, où le liquide est le matériau destiné à se solidifier en aval de l'écoulement. Dans [Maury], une thèse en liaison avec l'industrie verrière, Bertrand Maury souligne deux rôles de la modélisation dans ce cadre :

- « Donner une approximation de la forme résultante pour des conditions de marche données ;
- Rechercher l'origine des défauts du produit final. [...] L'écoulement n'est jamais véritablement stationnaire : une perturbation, aussi petite soit-elle, modifie instan-

[1] C'est-à-dire un écoulement selon un axe, de rayon relativement faible.

tanément la surface [et peut] détériorer la qualité du produit final. La modélisation permet de suivre l'évolution de petites perturbations et de simuler leur incidence sur le produit final, mais aussi d'étudier la stabilité intrinsèque de l'écoulement. »

La simulation numérique et les surfaces libres

La simulation numérique des problèmes à surface libre est un problème délicat, sur lequel trois angles d'attaque peuvent être envisagés.

Le premier est le plus naturel pour la physique du problème : il s'agit d'utiliser la représentation lagrangienne de l'écoulement, le suivi de l'évolution du domaine est alors automatique, puisque la méthode suit les particules fluides qui le composent.

Mais l'utilisation d'un maillage avec une telle méthode est ingérable – il suffit de se représenter comment une recirculation à l'intérieur d'un domaine désorganiserait aussitôt la structure de son maillage. Un tel inconvénient est d'autant plus ennuyeux que ces circulations internes peuvent n'affecter en rien la surface libre, et que dans un milieu homogène il n'y a aucune raison de suivre les particules intérieures à l'écoulement.

Cette méthode est donc difficilement utilisable dans la pratique.

Une second approche consiste à conserver une description eulérienne et une grille fixe dans le temps, et à chercher une représentation pour la surface libre dans ce domaine. Pour la méthode VOF (*Volume of Fluid*), c'est par le biais d'un indicateur de répartition du volume de chaque maille entre les deux fluides (ou entre le fluide et le vide), pour la méthode des lignes de niveau (*Level Set*, voir par exemple [Sussman]) la surface correspond au zéro d'une fonction définie sur la grille entière.

Ces deux méthodes ont en commun une grande souplesse vis-à-vis de la topologie du domaine de fluide, avec pour contrepartie l'absence de connaissance explicite de cette frontière.

Or pour calculer avec le maximum de précision la tension de surface, nous voulons une représentation précise de la surface libre – en conservant un maximum de souplesse quant à la forme du domaine.

Considérons le fluide à surface libre. On a dit plus haut que les déplacements des particules à l'intérieur du fluide n'était pas cruciaux, aux contraires de ceux de la surface libre. Il paraît donc opportun d'utiliser une méthode lagrangienne pour le déplacement de cette surface, que l'on représentera explicitement par une fonction ; et de traiter différemment l'intérieur du domaine.

C'est ce qui a été proposé avec la méthode Euler-Lagrange Arbitraire (ALE), dans [Hughes].

- Par une méthode lagrangienne, on suit l'évolution du domaine au cours du temps. On s'intéresse d'abord au déplacement de la seule frontière libre, puis on définit un champ de déformation du domaine qui soit conforme au déplacement du fluide à la frontière libre, et arbitraire à l'intérieur du domaine.
- Par une méthode eulérienne, et en tenant compte du champ arbitraire de déformations, on résout les équations qui gouvernent l'écoulement.

C'est donc cette méthode que nous nous proposons d'étudier ici, plus particulièrement dans la version exposée dans [Maury], où la méthode des caractéristiques tient un grand rôle. Sa description détaillée permettra dans un premier temps d'appréhender en quoi elle permet une description fine de la surface libre ; et sa mise en œuvre dans un cas particulier nous permettra de tester sa robustesse face aux grands déplacements de la surface libre.

Chapitre 1

Tension superficielle

1.1 Approche qualitative des écoulements gouvernés par la tension superficielle

La tension superficielle est une force surfacique, qui correspond au saut de pression à l'interface entre deux fluides non miscibles. Lorsque l'interface est plane, on montre que cette force est nulle, et que la pression est inchangée à la traversée de cette surface. Lorsque la surface est incurvée, on montre que la pression dans le fluide à surface convexe est plus importante que celle dans l'autre fluide, et la tension superficielle est une force orientée de ce dernier vers le premier (voir figure 1.1.) Cette force s'explique par l'existence de liaisons intermoléculaires, voir figure 1.3.

La formule de Laplace permet de quantifier la tension superficielle d'une interface en terme de *rayons de courbure*[1] :

$$p_B - p_A = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où les rayons de courbure sont des nombres positifs lorsqu'ils sont orientés vers le fluide B, négatifs sinon. (Cette définition donne la même orientation pour la courbure et la force.)

On voit que l'écart de pression minimal, correspondant à l'état le plus stable pour le fluide, est atteint lorsque les rayons de courbures sont infinis en tout point, i.e. lorsque la surface est plane. Cette condition n'est bien sûr possible que si les fluides remplissent chacun un demi-espace. La forme sphérique est celle qui minimise le mieux la moyenne surfacique de $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ lorsque l'un des fluides est une goutte[2] dans l'autre fluide, et qu'aucune autre force ne vient modifier cet équilibre : on constate aisément en perturbant cette surface que tout autre forme conduit à une rapide augmentation locale de ce terme, induisant un déséquilibre.

Les effets de la tension superficielle sont prépondérants dans les écoulements de fluides visqueux à surface libre lorsque la pesanteur devient négligeable, c'est-à-dire que le vo-

[1] En un point M d'une surface, où les directions de courbure principale sont selon les vecteurs $\vec{t_1}$ et $\vec{t_2}$, les rayons de courbure sont les rayons des plus grands cercles tangents à la surface ayant leur centre sur la normale $\vec{n}$ et situés respectivement dans les plans M,$\vec{n}, \vec{t_1}$ et M,$\vec{n}, \vec{t_2}$.

[2] C'est-à-dire, en langage mathématique, que le domaine d'un des fluides est borné.

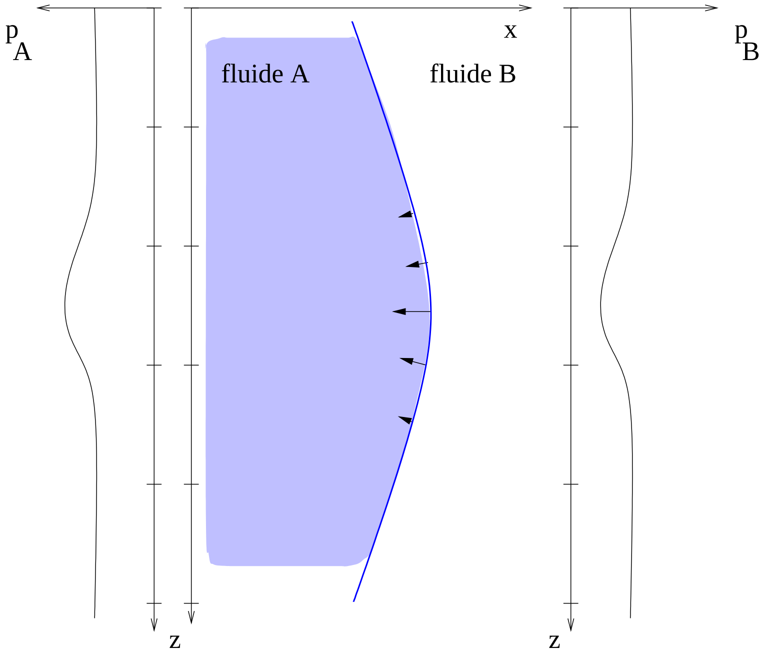


FIG. 1.1 – Pression à l'interface dans les fluides A et B et force de tension superficielle. En l'absence d'autres forces, cet état n'est visiblement pas stable.

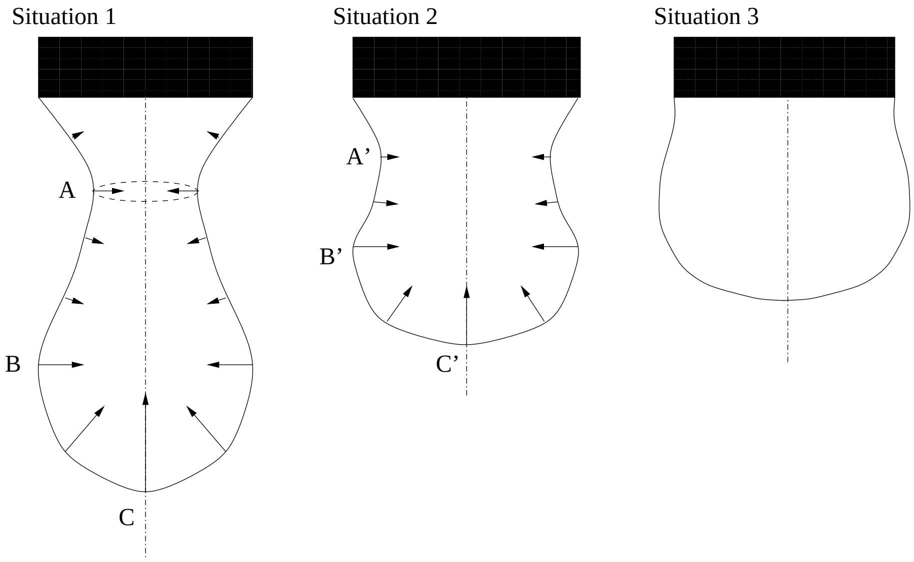


FIG. 1.2 – Tension superficielle dans différentes configurations d'une goutte sur un support ; position d'équilibre.

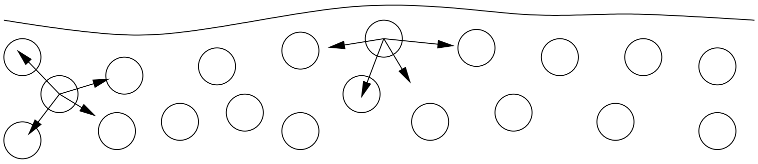


FIG. 1.3 – À l'origine de la force macroscopique de tension de surface : les liaisons intermoléculaires dans un liquide.

lume est faible relativement à la surface et à l'inverse des rayons de courbure, les autres paramètres physiques de l'écoulement étant fixés.

Prenons l'exemple de l'écoulement d'un peu de miel à partir d'un support. La formation d'une goutte de miel sous le support est gouvernée par la tension superficielle, qui tend à lui donner la forme la plus « arrondie » possible. Cependant, lorsqu'une masse de miel suffisante est amassée sous la cuiller, le poids devient prépondérant et un filet de miel s'écoule. Notre analyse qualitative reprend lorsque le filet de miel se rompt, nous plaçant dans la situation 1 de la figure 1.2. La surface est en effet alors importante et les courbures fortes, c'est bien la tension superficielle qui va gouverner l'écoulement.

Au point A, on a une courbure large dirigée vers l'extérieur, donc $\frac{1}{R_1} > 0$ est faible. En revanche, la courbure $\frac{1}{R_2} < 0$ est forte, car R_2 (qu'on a matérialisé par le cercle en pointillés) est petit, et négative, il en résulte donc une tension de surface tendant à réduire encore ce rayon. Au point C, les deux courbures concourent à donner une force orientée vers le haut.

Qualitativement, il y a donc deux possibilités, soit il y a rupture en A, soit la vitesse ascensionnelle engendrée par la tension superficielle en C est suffisante pour l'empêcher. Dans le premier cas, une goutte se détache en bas, dans le second on atteint la configuration de la situation 2.

Dans la situation 2, on note qu'au point A' la distance de la surface à l'axe est plus grande, et que les deux termes de la tension superficielle sont du même ordre et de signes opposés, de résultante petite.

La situation 3 est l'état le plus stable, où la tension superficielle est uniforme et minimale en moyenne surfacique.

1.2 Calcul de la courbure

Ces calculs nécessitent la connaissance des directions de courbure principale. Dans les cas traités ici, ces directions sont évidentes a priori. (La figure 1.5 présente le cas axisymétrique.)

L'intersection de la surface avec les plans ainsi définis est une courbe, on utilisera deux méthodes de calcul pour retrouver les résultats énoncés dans [Maluski] :

- la dérivation des vecteurs de Frénet associés à la courbe ;
- la représentation de la courbe par carte locale selon la tangente à la courbe au point donné.

1.2.1 Calcul par dérivation des vecteurs de Frénet

Nous appliquerons cette méthode dans le cas où une direction de courbure principale sur l'intersection Γ de la surface avec un plan donné est toujours dans ce même plan. On supposera de plus que Γ est décrite, de façon exacte ou approchée, comme le graphe d'une fonction $z \longrightarrow \varphi(z)$ dans un plan (x, z), avec φ continue.

Les vecteurs de Frénet sur cette courbe sont $(\vec{t}, \vec{n})(s)$, les vecteurs tangent et normal définis selon l'abcisse curviligne.

Lorsque φ est dérivable, on peut les exprimer :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \\ \\ -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \end{pmatrix}(z) \quad ; \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \end{pmatrix}(z)$$

On compose par $z = \mathcal{S}(s)$ pour obtenir ces vecteurs en fonction de l'abcisse curviligne.

Un résultat classique est que $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$. On peut donc trouver R par identification en calculant $\frac{d\vec{t}}{ds}$, dans le cas où $\varphi \in C^2$.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds}(s) &= \begin{pmatrix} \dfrac{-\mathcal{S}' \times \varphi'' \circ \mathcal{S} \times (\varphi' \circ \mathcal{S})^2 + (\mathcal{S}' \times \varphi'' \circ \mathcal{S})(1 + (\varphi' \circ \mathcal{S})^2)}{(1 + (\varphi' \circ \mathcal{S})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ -\dfrac{\mathcal{S}' \times \varphi'' \circ \mathcal{S} \times \varphi' \circ \mathcal{S}}{(1 + (\varphi' \circ \mathcal{S})^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathcal{S}' \times \varphi'' \circ \mathcal{S}}{\left(1 + (\varphi' \circ \mathcal{S})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\varphi' \circ \mathcal{S} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or sur la courbe l'abcisse curviligne vaut en fonction de z :

$$\mathcal{S}^{-1}(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \varphi'^2(\zeta)} d\zeta$$

on a par conséquent :

$$\frac{dz}{ds} = \mathcal{S}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \circ \mathcal{S}(s)}}$$

d'où :

$$\frac{d\vec{t}}{ds}(z) = \frac{\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{n}(z)$$

et :

$$\frac{1}{R}(z) = \frac{\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}(z)$$

Dans le cas où φ est seulement continue et dérivable presque partout, il reste possible de définir $\vec{t}$ et $\vec{n}$ comme ci-dessus, et d'écrire au sens des distributions :

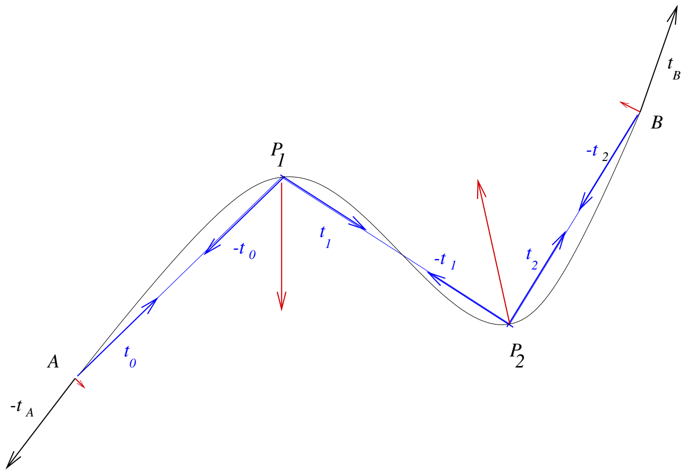


FIG. 1.4 – Calcul de la courbure sur une approximation P_1 d'une courbe dont on connaît les tangentes exactes aux points extrêmes A et B.

Pour tout $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}(\Gamma)^2$,

$$\int_\Gamma \frac{\vec{n}}{R} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, ds = \int_\Gamma \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, ds$$

Si $\vec{t}$ est bien définie égale à $\vec{t}_A$ et $\vec{t}_B$ aux points extrêmes A et B de Γ, on a par intégration par partie :

$$\int_\Gamma \frac{\vec{n}}{R} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, ds = \left[\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{t}\right]_A^B - \int_\Gamma \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{ds} ds$$

Prenons le cas d'une fonction φ affine par morceaux sur la partition[3]

$$\{z_0 = z_A;\ z_1; \cdots;\ z_{N+1} = z_B\}$$

on aura, sur $]z_i, z_{i+1}[$, $\vec{t}(z) = \vec{t}_i$ constant, et donc :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\vec{n}}{R} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, ds &= \vec{\mathbf{v}}(z_{N+1}) \cdot \vec{t}_B - \sum_{i=0}^{N} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{d\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{t}_i}{ds} ds - \vec{\mathbf{v}}(z_0) \cdot \vec{t}_A \\
&= \vec{\mathbf{v}}(z_{N+1}) \cdot \vec{t}_B - \sum_{i=0}^{N} [\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{t}_i]_{z_i}^{z_{i+1}} - \vec{\mathbf{v}}(z_0) \cdot \vec{t}_A \\
&= \vec{\mathbf{v}}(z_{N+1}) \cdot (\vec{t}_B - \vec{t}_N) + \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{v}}(z_i) \cdot (\vec{t}_i - \vec{t}_{i-1}) + \vec{\mathbf{v}}(z_0) \cdot (\vec{t}_0 - \vec{t}_A)
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une surface axisymétrique (c'est à dire si l'on est en coordonnées cylindriques), le calcul est identique en remplaçant $\vec{\mathbf{v}}(z)$ par $\varphi \vec{\mathbf{v}}(z)$.

[3] Cas que l'on rencontrera – comme par hasard – lors du calcul de la tension superficielle discrète.

1.2.2 Calcul par carte locale tangente

Nous appliquerons cette méthode dans le cas axisymétrique, pour le calcul du rayon $R_\perp$ (voir figure 1.5.) On le fait en un point M tel que $y_M = 0$. Par axisymétrie ce rayon sera le même pour les autres points de la surface de même coordonnée z_M selon z.

Ce rayon est celui d'un cercle dans le plan $(\vec{n}, \vec{t_\perp})$. On ne connaît qu'implicitement la courbe définie par cette intersection, à partir de l'équation de la surface :

$$\{(x, y, z) \text{ tels que } \varphi(z)^2 = x^2 + y^2\}$$

et de celle du plan en question, en notant $\varphi_M = \varphi(z_M)$, $\varphi'_M = \varphi'(z_M)$:

$$z = z_M + (x - \varphi_M)\varphi'_M$$

Introduisons un système de coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$ dans ce plan, avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \varphi_M + \tilde{x}\frac{1}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}} \\ y & = & \tilde{y} \\ z & = & z_M + \tilde{x}\frac{\varphi'_M}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}} \end{array}\right.$$

L'équation de l'intersection de l'interface avec le plan est donc :

$$\varphi^2\left(z_M - \tilde{x}\frac{\varphi'_M}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}}\right) = \varphi_M^2 + \tilde{x}\frac{2\varphi_M}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}} + \tilde{x}^2\frac{1}{1+{\varphi'}_M^2} + \tilde{y}^2$$

Or pour $\tilde{x}$ voisin de 0, on a le développement à l'ordre 1 :

$$\varphi^2\left(z_M - \tilde{x}\frac{\varphi'_M}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}}\right) = \varphi_M^2 - \tilde{x}\frac{2{\varphi'_M}^2\varphi_M}{\sqrt{1+{\varphi'}_M^2}}$$

d'où :

$$\tilde{y}^2 = -\tilde{x}\frac{2\varphi_M}{\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}}({\varphi'}_M^2 + 1)$$

On obtient donc une approximation à l'ordre 1 en $\tilde{x}$ de la courbe sous la forme $\tilde{x} = f(\tilde{y})$ avec

$$f(\tilde{y}) = -\tilde{y}^2\frac{1}{2\varphi_M\sqrt{1+{\varphi'_M}^2}}$$

et par construction[4], on a la courbure en dérivant deux fois :

$$\frac{1}{R_\perp} = -\frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}}$$

[4]Songer que le centre de courbure se trouve ici, par axisymétrie, sur l'axe $\tilde{x} = 0$. En ce qui concerne le signe du résultat, se reporter à la définition en début de chapitre.

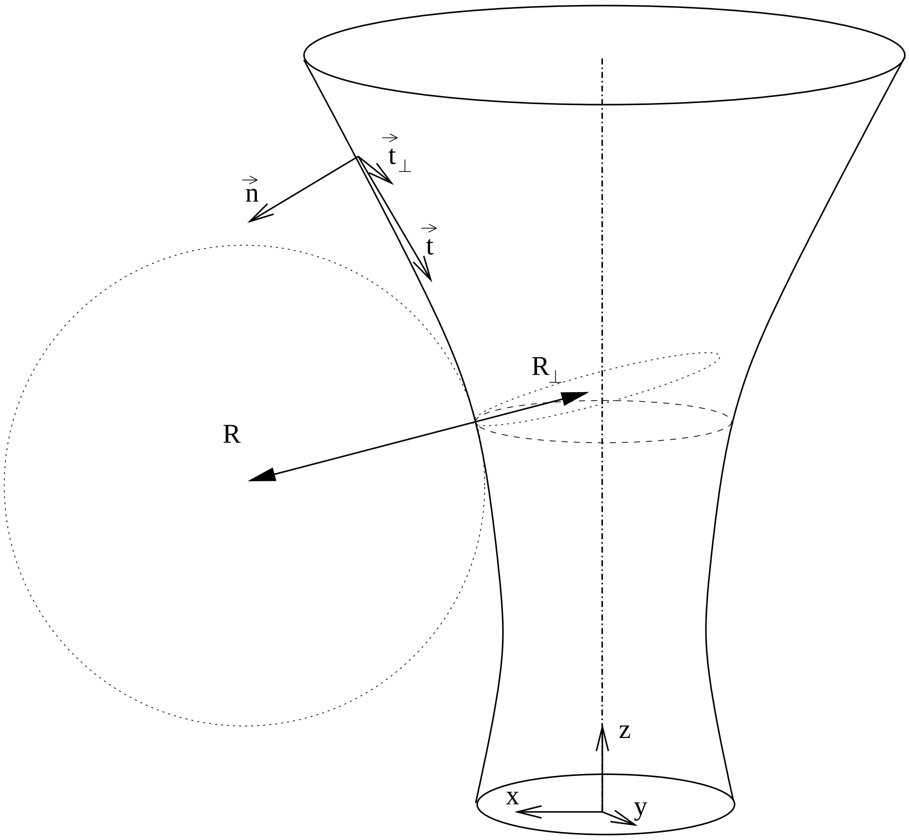


FIG. 1.5 – Rayons de courbure en un point d'une surface axisymétrique.

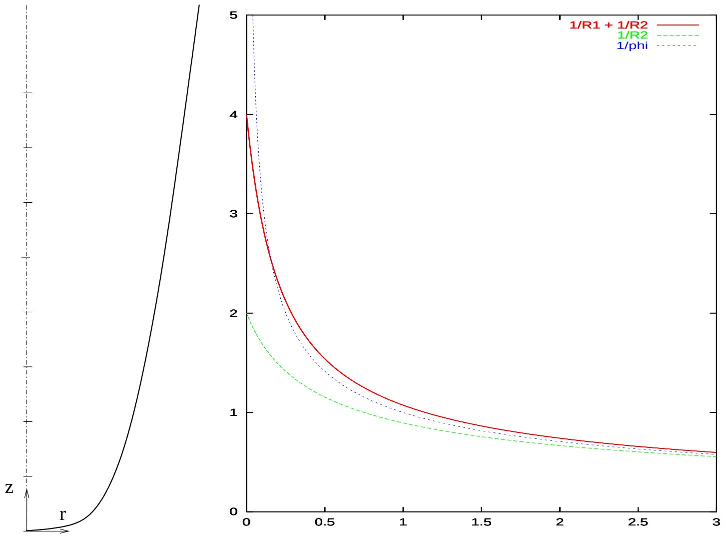


FIG. 1.6 – Courbure dans le cas d'une goutte parabolique en $z = 0$. L'approximation $\frac{1}{\varphi}$ explose en ce point alors que la valeur exacte est 2.

NB : Ce résultat est souvent approché par $-\frac{1}{\varphi}$, lorsque le rayon est grand en regard de ses variations. Cette approximation est par exemple assez bonne pour des vagues sinusoïdales, comme le montre le graphe en figure 1.7. Cependant elle n'est bien sûr plus du tout valable lorsque φ tend vers 0. Comme, physiquement, cela implique que φ' tende vers l'infini (car à l'intersection avec l'axe on doit veiller à conserver la régularité de l'interface), avec $\varphi\varphi' > C^{te}$, la valeur exacte reste pour sa part bornée (cas par exemple d'une forme parabolique, graphe en figure 1.6.)

1.3 Stabilité des écoulements axisymétriques

À l'inverse des écoulements de symétrie plane, les jets axisymétriques peuvent être déstabilisés par la force de tension superficielle. Les graphes en figure 1.7 le montrent : pour un diamètre du jet localement faible, la tension de surface tend à former de gouttelettes (rupture du jet) plutôt qu'à ramener une surface cylindrique (ce qu'elle fait pour une perturbation plus faible.)

Supposons un jet cylindrique perturbé en surface par des vagues sinusoïdales, de telle sorte que sa surface soit

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= A(1 - a\cos(\omega z)) \\ &= A\left(1 - a\cos\left(\frac{cz}{aA}\right)\right)\end{aligned}$$

où A est le rayon moyen du jet, $2aA$ l'amplitude des vagues et ω leur fréquence spatiale. Les nombres sans dimension a et c suffisent à déterminer une forme du jet invariante par changement d'échelle, où a est l'amplitude relative des vagues et $c = aA\omega$ leur pente maximale.

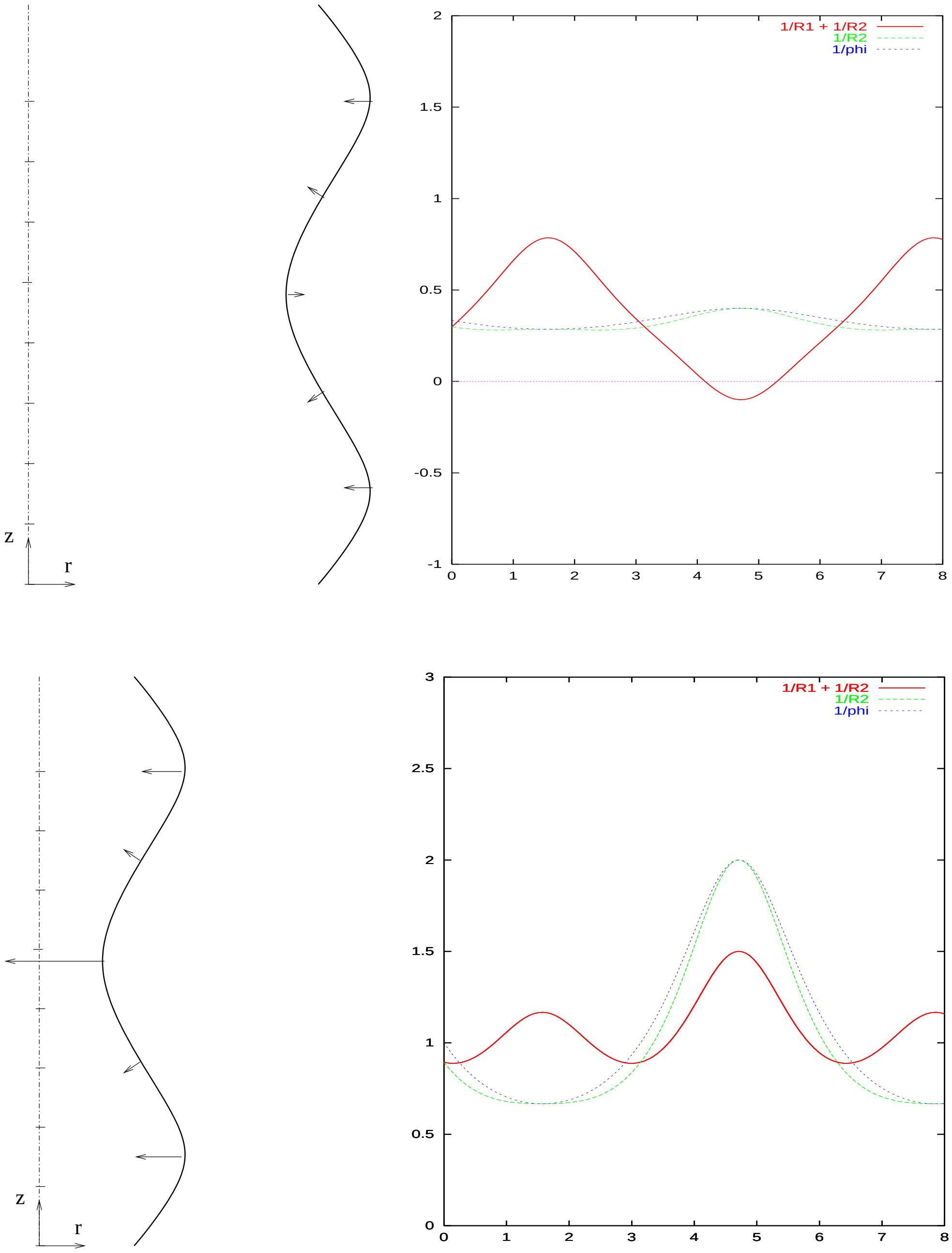


FIG. 1.7 – Courbure dans le cas de vagues sinusoïdales en surface.
En haut, l'amplitude des vagues est le tiers du rayon moyen, $\frac{1}{R}$ est le terme dominant, les forces de tension de surface tendent à ramener une interface cylindrique.
En bas, vagues d'amplitude égale au rayon moyen : les forces de tension de surface augmentent l'instabilité car $\frac{1}{R_\perp}$ est dominant et tendent à la formation de gouttelettes (rupture du jet).
– Comparaison de $\frac{1}{R_\perp}$ et de son approximation $\frac{1}{\varphi}$.

Un rapide calcul des courbures au creux de la vague (c'est-à-dire au plus faible diamètre du jet) nous donne $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_\perp} = \dfrac{1}{A}\left(1 - \dfrac{c^2}{a} + c^2\right)$. En ce point une force orientée vers l'extérieur tend à ramener une surface cylindrique, donc à amortir la perturbation. On a une telle force si et seulement si $a < \dfrac{c^2}{1+c^2}$.

À amplitude égale, les perturbations de haute fréquence sont donc amorties et celles de faible fréquence sont amplifiées, tendant à la formation de gouttes.

Bien sûr nous n'avons ici calculé que les forces de tension superficielle, et en un point seulement, on ne peut donc en déduire qu'une tendance à la stabilité ou à la rupture.

Dans le chapitre 7, les expérimentations numériques montrent l'amortissement rapide des perturbations quand seule la courbure $\frac{1}{R}$ intervient (cas plan) ; et que ces mêmes perturbations sont légèrement amplifiées quand $\frac{1}{R_\perp}$ est dominant.

Chapitre 2

Caractéristiques et quantités ALE

On va ici décrire les objets mathématiques nécessaires à la mise en place de la méthode ALE. Les équations et les objets définis ici sont en tout point les mêmes que ceux trouvés dans [Maury], notre document de référence pour la méthode, mais nous avons souhaité en faire une approche moins conceptuelle, se basant sur la description physique de l'écoulement ; et mettant en lumière ses parentés et différences avec les méthodes lagrangiennes.

2.1 Domaines à surface libre et caractéristiques

2.1.1 Particules fluides, champs de vitesse lagrangien et eulérien

Soit un ensemble de points matériels, qu'on appellera des *particules fluides*, occupant à $t = 0$ un domaine Ω^0 de l'espace. On décrit au cours du temps la position de chacun d'entre eux par la fonction $t \mapsto \xi(\mathbf{x^0}, 0; t)$, où $\mathbf{x^0} \in \Omega^0$ est la donnée de la position à $t = 0$ du point matériel, i.e. $\xi(\mathbf{x^0}, 0; 0) = \mathbf{x^0}$ (voir figure 2.1).

Le domaine au temps t est donc l'ensemble $\Omega^t = \xi(\Omega^0, 0; t)$. Le principe physique de la non-interpénétration donne la bijectivité de l'application $\Xi^{0,\tau} : \mathbf{x^0} \mapsto \xi(\mathbf{x^0}, 0; \tau)$ de Ω^0 dans Ω^τ. Il est facile d'en déduire que $\xi(\xi(\mathbf{x^0}, 0; \tau), \tau; 0) = \mathbf{x^0}$ (voir figure 2.3).

> On peut voir $t \mapsto \xi(\mathbf{x^0}, 0; t)$ comme une courbe de l'espace paramétrée par le temps[1] (voir figure 2.2). On peut aussi s'intéresser à la courbe de l'espace-temps $[\xi(\mathbf{x^0}), 0; t), t]$ (voir figure 2.1), en notant bien que la composante temporelle est strictement croissante.
>
> On la distinguera bien de l'application
>
> $$\Xi^{0,\tau} : \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mapsto & \xi(\mathbf{x}, 0; \tau) \\ \Omega^0 & \to & \Omega^\tau \end{array}$$
>
> qui est la *déformation* du domaine entre $t = 0$ et τ.

[1] Penser à ces photographies avec un très long temps d'exposition, de sorte qu'on voit sur l'image la trajectoire des étoiles ou des feux des voitures.

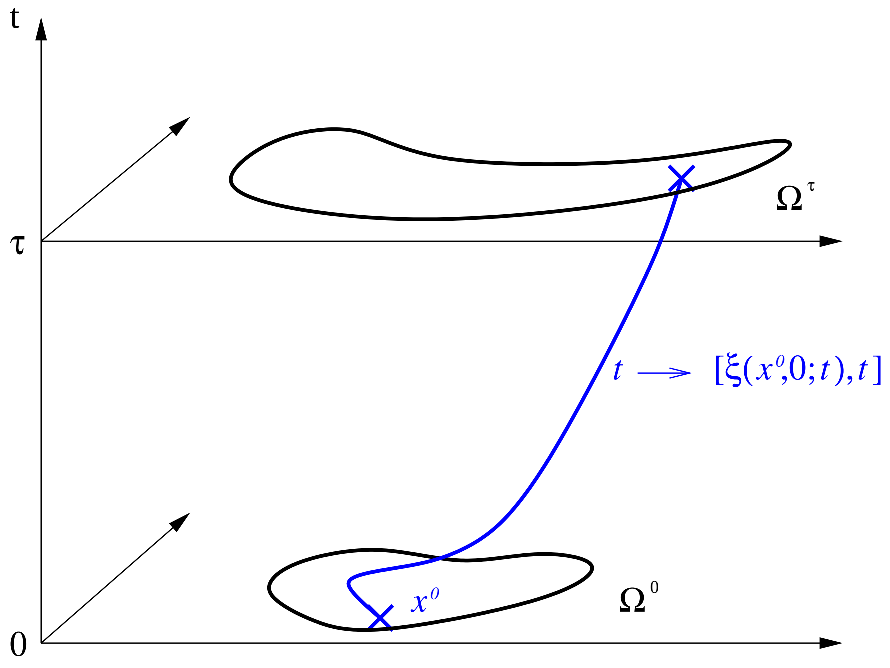


FIG. 2.1 – Trajectoire d'une particule fluide, qui est une caractéristique du champ de vitesse eulérien. La particule en question est celle qui occupe $\mathbf{x^0}$ au temps $t = 0$.

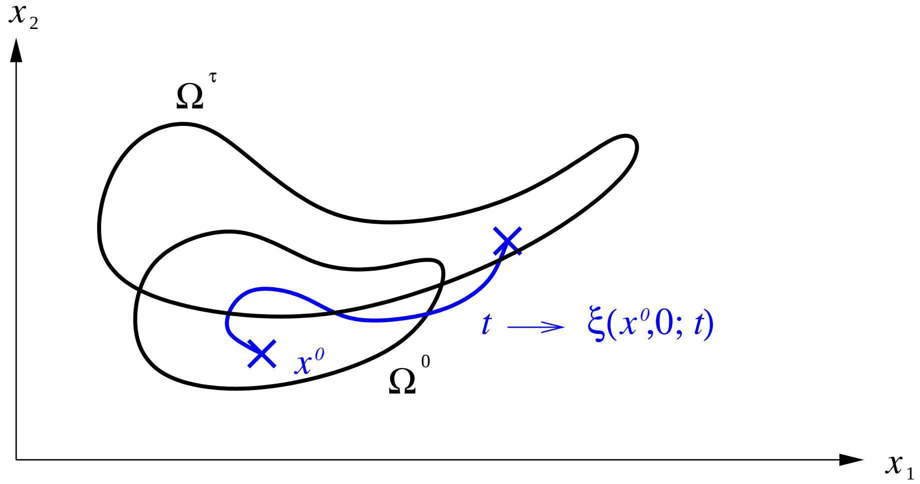


FIG. 2.2 – Caractéristique vue comme une courbe de l'espace. Remarquons qu'elle peut se couper elle-même, « faire des boucles ».

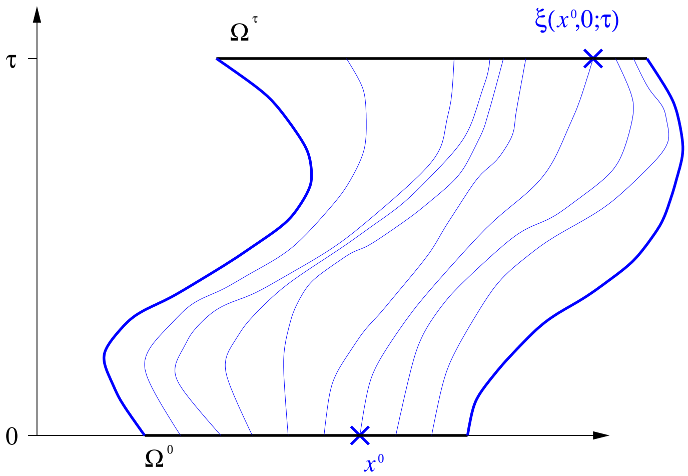


FIG. 2.3 – En dimension 1, caractéristiques d'un champ de vitesse. Le principe de non-interpénétration interdit que ces courbes de l'espace-temps ne se coupent. En particulier, leurs coordonnées spatiales pour $t = \tau$ sont différentes deux à deux.

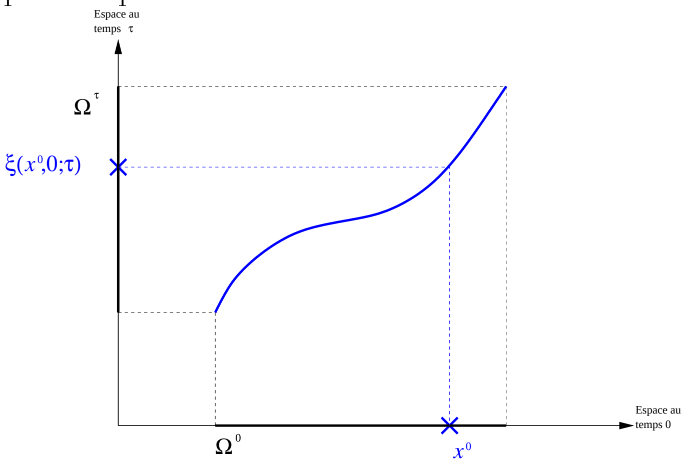


FIG. 2.4 – Bijection entre Ω^0 et Ω^τ, $\Xi : \mathbf{x} \mapsto \xi(\mathbf{x}, 0; \tau)$ appelée déformation entre $t = 0$ et τ. En dimension 1, elle est nécessairement strictement monotone (fonction numérique continue et bijective).

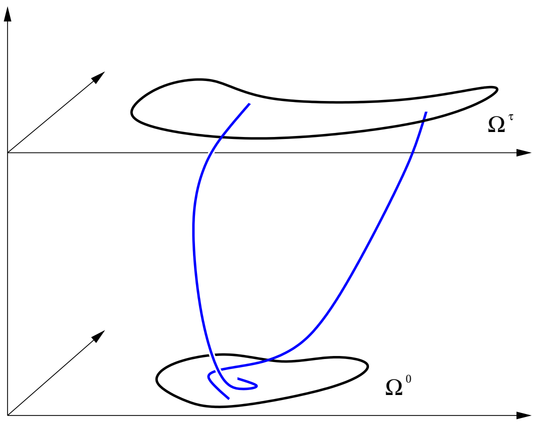


FIG. 2.5 – En dimension 2, continuité et bijectivité n'impliquent aucune sorte de « relation d'ordre » sur les coordonnées des images par la bijection.

Si l'on marque une particule, que l'on repère par $\mathbf{x}^\tau \in \Omega^\tau$, sa position au temps de référence $t = \tau$ arbitrairement choisi, sa vitesse en un instant t quelconque est :

$$\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}^\tau; t) = \frac{d\xi}{dt}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t)$$

où $\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}$ est un champ dit *lagrangien* de vitesses, c'est-à-dire qu'il est défini sur un ensemble de particules fluides et non sur un domaine de l'espace.

On relie ce champ au champ *eulérien* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ des vitesses, qui lui donne pour un temps t la vitesse de la particule occupant le point $\mathbf{x}$ en cet instant :

$$\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}^\tau; t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}(\xi(\mathbf{x}^\tau, \tau; t), t)$$

On remarquera qu'en particulier, $\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}^\tau; \tau) = \overrightarrow{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^\tau, \tau)$.

Introduisons la définition des caractéristiques, pour un champ de vecteurs quelconque d'un domaine :

Définition 1 *Une caractéristique d'un champ eulérien $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ passant par $[\mathbf{x}^\tau, \tau]$ comme la fonction $t \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t)$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t) = \overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{A}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t), t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}^\tau, \tau; \tau) = \mathbf{x}^\tau \end{cases}$$

On voit donc qu'une fonction « position de la particule fluide » occupant le point $\mathbf{x}^0$ en l'instant $t = 0$, que nous avons écrite $t \mapsto \xi(\mathbf{x}^0, 0; t)$, n'est autre que la caractéristique du champ de vitesse eulérien $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ passant par $[\mathbf{x}^0, 0]$.

2.1.2 Champ arbitraire de vitesse de déformation

On s'intéresse maintenant à la seule description de $t \mapsto \Omega^t$, c'est-à-dire que seule la « forme » de Ω^t dans l'espace nous occupe. On supposera Ω^t connexe en tout t.

Hypothèse 1 *En mécanique des fluides, l'*hypothèse de surface libre *pose que toute particule fluide de ladite surface demeure en tout instant à la surface. On peut aussi l'exprimer par :*

$$\Gamma^t = \xi(\Gamma^0, t^0; t)$$

pour $\Gamma^t = \partial\Omega^t$.

Voir par exemple [Landau].

L'ensemble Γ^t étant l'objet auquel on s'intéresse[2], on peut substituer aux caractéristiques ξ, définies dans le champ de vitesses eulérien $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, qui le transportent, tout autre ensemble de caractéristiques $\mathbf{C}$ amenant les même déformations globales du domaine, c'est-à-dire tel que

$$\Gamma^t = \mathbf{C}(\Gamma^0, t^0; t)$$

[2] Et non chacune des particules qui le composent.

Ce sont des *caractéristiques arbitraire de déformation.*

On vérifiera sans difficulté[3] que ces caractéristiques sont celles de champs $\vec{\gamma} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v_T}}$, où $\vec{\mathbf{v_T}}$ est un champ arbitraire, tangent aux frontières en tout point de celles-ci, suffisamment régulier.

On appelle ces champs $\vec{\gamma}$ des *champs de déformation.*

En particulier, on peut prendre sur la surface libre

$$\vec{\mathbf{v_T}} = \left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}}{\vec{R} \cdot \vec{n}}\right) \vec{R} - \vec{\mathbf{u}} \qquad \text{et donc} \qquad \vec{\gamma} = \left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}}{\vec{R} \cdot \vec{n}}\right) \vec{R}$$

où $\vec{n}$ est la normale à Γ^t, $\vec{R}$ un champ de vecteurs arbitrairement défini sur Γ^t et tel que $\vec{R} \cdot \vec{n} > 0$, suffisamment régulier. Sur le reste du domaine, le choix de $\vec{\gamma}$ a pour seule contrainte d'être régulier.

Les caractéristiques $\mathbf{C}$ sont définies par la donnée de ce champ et du domaine en un instant de référence τ. Par construction elles sont bien telles que :

$$\Omega^t = \{C(\mathbf{x}_\tau, \tau; t);\ \mathbf{x}_\tau \in \Omega^\tau\}$$

On a donc, par la seule donnée de $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}$ à la surface libre en tout instant, une représentation de notre domaine en tout instant.

2.2 Méthode des caractéristiques[4]

Revenons aux champs eulérien et lagrangien des vitesses, définis en 2.1.1, et qui ont pour leur part une réalité physique en tout point du domaine (frontière et intérieur.) On introduit une équation de transport par le champ $\vec{\mathbf{u}}$:

$$\frac{D\Phi}{Dt} := \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla} \Phi = F \qquad \text{sur } \Omega^{[0,T]} \tag{2.1}$$

où F peut dépendre de $\vec{\mathbf{u}}$ et de Φ.

On choisit un instant de référence τ, ce qui détermine le domaine de référence Ω^τ. À partir des caractéristiques $t \mapsto \xi(\mathbf{x}_\tau, \tau; t)$ des points de ce domaine dans le champ eulérien $\vec{\mathbf{u}}$, on peut définir le changement de variable :

$$\chi : \begin{array}{ccc} [\mathbf{x}, t] & \mapsto & [\xi(\mathbf{x}, t; \tau), t] \\ \Omega^{[0,T]} & \rightarrow & \Omega^\tau \times [0, T] \end{array}$$

qui à un point physique de l'espace-temps $[\mathbf{x}, t]$ associe le couple $[\mathbf{y}, t]$ d'un point $\mathbf{y}$ du domaine de référence et de l'instant t. C'est donc un changement de variable entre *l'espace-temps physique* et ce qu'on appellera *l'espace-temps lagrangien* $\Omega^\tau \times [0, t]$, qui a l'avantage d'être de forme cylindrique (voir figure 2.6.)

[3] À l'intérieur du domaine on n'a en effet aucune condition sur les caractéristiques $\mathbf{C}$, et à la frontière on trouvera par dérivation en temps la condition ci-dessus.

[4] On présente ici la méthode des caractéristiques d'une façon un peu différente de celle retenue habituellement – dans [Pironneau] par exemple – bien que strictement équivalente. Ceci dans le but de faciliter la présentation de la méthode ALE.

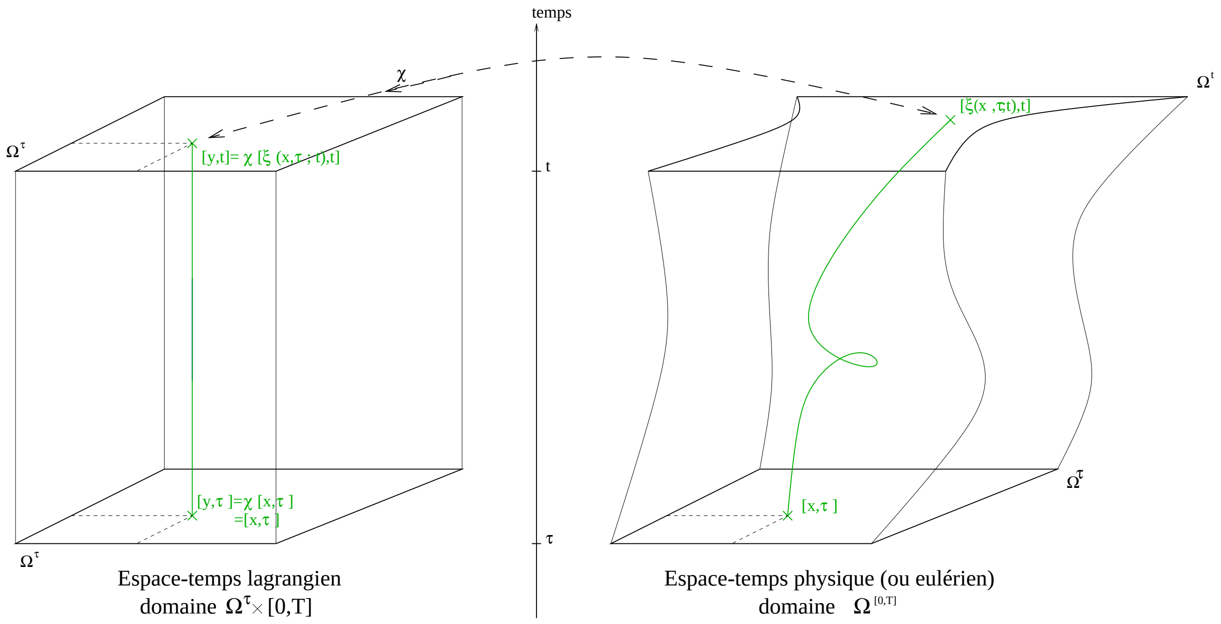


FIG. 2.6 – Méthode des caractéristiques appliquée directement : on résout pour des fonctions définies dans l'espace-temps lagrangien, et le changement de variable les relie aux fonctions eulériennes.

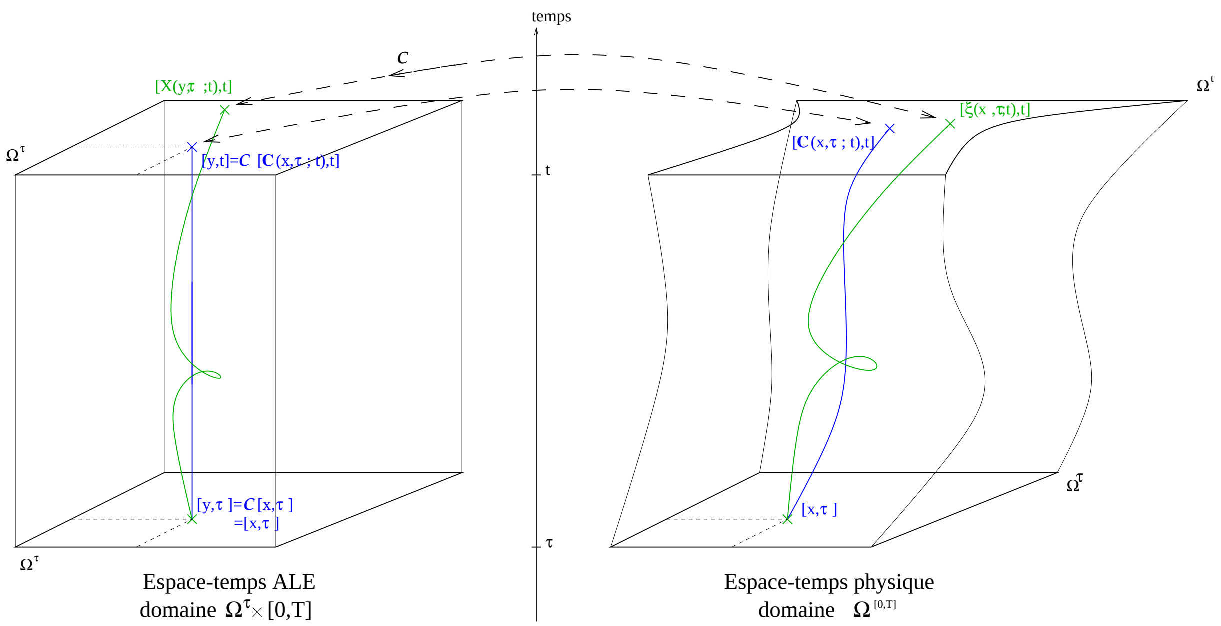


FIG. 2.7 – Méthode ALE : un changement de variable simplifié permet de se ramener à un domaine cylindrique aussi ; on résout donc de même sur des fonctions définies dans l'espace-temps ALE. On note cependant que les trajectoires des particules fluides ne sont pas rectilignes dans cet espace-temps.

Le changement de variable inverse s'écrit, grâce aux propriétés des caractéristiques :

$$\chi^{-1} : \begin{array}{ccc} [\mathbf{y}, t] & \mapsto & [\xi(\mathbf{y}, \tau; t), t] \\ \Omega^\tau \times [0, T] & \to & \Omega^{[0,T]} \end{array}$$

Au moyen de celui-ci, on peut récrire notre équation de transport sur le domaine cylindrique $\Omega^\tau \times [0, T]$. En effet, en se souvenant des propriétés vues au paragraphe 2.1.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi \circ \chi^{-1}}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \chi^{-1} + \frac{d\xi}{dt} \cdot \vec{\nabla} \Phi \circ \chi^{-1} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \chi^{-1} + \left(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \circ \chi^{-1} \end{aligned}$$

On obtient une équation équivalente à l'équation 2.1, mais définie sur un domaine spatial fixe au cours du temps (i.e. cylindrique dans l'espace-temps) :

$$\frac{\partial \Phi \circ \chi^{-1}}{\partial t} = F \circ \chi^{-1} \qquad \text{sur } \Omega^\tau \times [0, T] \tag{2.2}$$

Cette équation correspond à une vision lagrangienne (c'est-à-dire s'intéressant aux particules fluides, représentées par l'ensemble Ω^τ) du problème initialement écrit sous forme eulérienne (c'est-à-dire en tout point de l'espace appartenant au domaine mobile en un instant donné.)

2.3 Espace ALE

La méthode des caractéristiques exposée ci-avant est la base des méthodes dites lagrangiennes, qui écrivent les équations sur les particules fluides. Cependant elles ont leurs inconvénients : on ne maîtrise pas du tout la forme du champ de vitesse, et une recirculation, par exemple, si on suit les particules, désorganise dramatiquement le maillage qu'elles forment.

Notre objectif est de parvenir tout de même à travailler sur un domaine cylindrique $\Omega^\tau \times [0, T]$, mais en conservant la meilleure régularité possible des déformations à l'intérieur du domaine compte tenu de celles imposées à sa frontière.

On cherche donc à introduire un autre changement de variable $\mathcal{C}$ vérifiant comme χ la propriété $\Omega^\tau \times [0, T] = \mathcal{C}\left(\Omega^{[0,T]}\right)$

Or on a vu au paragraphe 2.1.2 que pour un bon choix de celles-ci, les caractéristiques $\mathbf{C}$ amenaient les *mêmes déformations du domaine* que les caractéristiques ξ. On peut donc définir le changement de variable $\mathcal{C}$ de la même façon qu'on a défini χ :

$$\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} [\mathbf{x}, t] & \mapsto & [\mathbf{C}(\mathbf{x}, t; \tau), t] \\ \Omega^{[0,T]} & \to & \Omega^\tau \times [0, T] \end{array}$$

$$\mathcal{C}^{-1} : \begin{array}{ccc} [\mathbf{y}, t] & \mapsto & [\mathbf{C}(\mathbf{y}, \tau; t), t] \\ \Omega^\tau \times [0, T] & \to & \Omega^{[0,T]} \end{array}$$

Interprétation : La différence tient en ce qu'ici, les caractéristiques $\mathbf{C}$ sont définies par un champ *arbitraire* de déformations $\overrightarrow{\gamma}$ plutôt que par le champ inconnu a priori $\overrightarrow{\mathbf{u}}$.

Comparativement à la méthode directe des caractéristiques, on perd la simplicité d'écriture des équations transformées, mais on conserve le domaine de résolution cylindrique dans l'espace-temps $\Omega^\tau \times [0, T]$.

Les figures 2.6 et 2.7 permettent de visualiser ces différences. Les définitions suivantes permettront de donner une dénomination précise aux objets qui y sont représentés.

Définitions : quantités définies dans l'espace-temps physique

- **Point physique** $[\mathbf{x}, t]$ — Point fixe de l'espace physique.
- **Particule fluide** $[\xi(\mathbf{x}^\tau, \tau; t), t]$ — Ces coordonnées sont définies dans l'espace physique, ce sont celles d'une particule fluide emportée par l'écoulement, dont le champ de vitesse est $\overrightarrow{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$. Cette particule fluide est identifiée par ses coordonnées spatiales $\mathbf{x}^\tau$ à l'instant τ (pied de la caractéristique).
- **Point de l'espace ALE** $[\mathbf{C}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t), t]$ — Ces points – qui, vus dans l'espace-temps ALE sont fixes – suivent dans l'espace physique une trajectoire $[\mathbf{C}(\mathbf{x}^\tau, \tau; t), t]$, comme s'ils étaient des particules emportés à une vitesse $\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x}, t)$. Le changement de variable $\mathcal{C}$ transforme cette trajectoire de l'espace-temps physique en une ligne droite dans l'espace-temps ALE, c'est-à-dire un point fixe $\mathbf{x}^\tau$ dans cet espace.

Définitions : quantités définies dans l'espace-temps ALE

- **Point ALE** $[\mathbf{y}, t]$ — Point fixe de l'espace ALE.
- **Quantités ALE** $\overrightarrow{\mathbf{u}}_\tau, p_\tau, \ldots$ — Ce sont les quantités physiques vues au travers du changement de variable $\mathcal{C}$, et donc définies sur l'espace-temps ALE. Par exemple :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{u}}_\tau(\mathbf{y}, t) &= \overrightarrow{\mathbf{u}}\,(\mathcal{C}[\mathbf{y}, t]) \\ \overrightarrow{\gamma}_\tau(\mathbf{y}, t) &= \overrightarrow{\gamma}\,(\mathcal{C}[\mathbf{y}, t]) \end{aligned}\right\} \text{ pour } [\mathbf{y}, t] \in \Omega^\tau \times [0, T]$$

- **Particule ALE** $[\mathbf{X}(\mathbf{y}, \tau; t), t]$ — Particule de l'espace-temps ALE transportée dans celui-ci par le champ de vitesse relative $(\overrightarrow{\mathbf{u}}_\tau - \overrightarrow{\gamma}_\tau)(\mathbf{y}, t)$. On montre ci-après que la trajectoire d'une particule ALE est une approximation à l'ordre 1 en $(t - \tau)$ de l'image par $\mathcal{C}$ de la trajectoire d'une particule fluide.

2.3.1 Lien entre particules ALE et particules physiques

Le passage à l'espace-temps ALE ci-dessus n'a pas changé la nature des équations régissant l'écoulement – qui sont du type de (2.1) – même si elles sont désormais définies sur un domaine à frontières fixes.

Ayant en vue leur résolution dans ce nouvel espace-temps, on étudie la trajectoire $\mathbf{X}$ de particules fluides dans l'espace-temps ALE, en vue d'appliquer une méthode des caractéristiques *sur les équations écrites dans l'espace-temps ALE.*

On a par définition de $\mathbf{X}$:

$$[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t] = \mathcal{C}\,[\xi(\mathbf{x},\tau;t),t]$$

et donc :

$$\mathcal{C}^{-1}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t] = [\xi(\mathbf{x},\tau;t),t] \tag{2.3}$$

À $t=\tau$, on a $\mathcal{C}^{-1}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;\tau),\tau] = [\xi(\mathbf{x},\tau;\tau),\tau] = [\mathbf{x},\tau]$. Montrons que de plus les deux membres de l'intégrale vérifient une même équation différentielle du premier ordre.

Par dérivation en temps du membre de gauche on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d[\xi(\mathbf{x},\tau;t),t]}{dt} &= \frac{d\mathcal{C}^{-1}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t]}{dt}\\ &= \frac{\partial\mathcal{C}^{-1}}{\partial t}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t] + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x},\tau;t)\,\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla\mathcal{C}}}^{-1}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t]\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla\mathcal{C}}}^{-1} = Id$ à l'ordre 1 en $(t-\tau)$, en effet cette relation est évidemment exacte à $t=\tau$ et on a la relation $\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla\mathcal{C}}}^{-1} - Id\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}\gamma$. En utilisant la définition de $\mathcal{C}^{-1}$:

$$\frac{d[\xi(\mathbf{x},\tau;t),t]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{C}}{dt}(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),\tau;t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x},\tau;t),\ 1\right]$$

Puis celle de $\mathbf{C}$, en se souvenant de la définition des quantités ALE :

$$\frac{d\xi(\mathbf{x},\tau;t)}{dt} = \overrightarrow{\gamma_\tau}(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x},\tau;t)$$

Par définition de ξ, dans l'autre membre de (2.3) :

$$\frac{d\xi(\mathbf{x},\tau;t)}{dt} = \overrightarrow{\mathbf{u}}(\xi(\mathbf{x},\tau;t),t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}\circ\mathcal{C}^{-1}\,[\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t] = \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}\,(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t)$$

En identifiant on obtient $\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x},\tau;t),t) = (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma_\tau})(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau;t),t)$, à l'ordre 1, on en déduit que $\mathbf{X}$ est en fait une caractéristique du champ $(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma_\tau})$ dans l'espace-temps ALE, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x}^\tau,\tau;t) = (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma_\tau})(\mathbf{X}(\mathbf{x}^\tau,\tau;t),t)\\ \mathbf{X}(\mathbf{x}^\tau,\tau;\tau) = \mathbf{x}^\tau\end{cases}$$

Interprétation : On a montré qu'un champ de vitesse eulérien $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ dans l'espace physique correspondait à un champ de vitesse $\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau$ dans l'espace ALE.

Cela nous permettra, au chapitre 4, d'appliquer la méthode des caractéristiques dans cet espace.

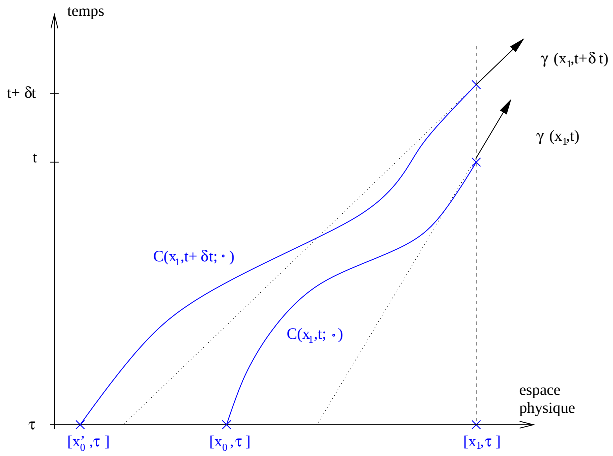
2.3.2 Dérivation des quantités ALE

Pour résoudre les équations gouvernant l'écoulement dans l'espace ALE, il nous faut évidemment et avant toute chose pouvoir écrire ces équations dans cet espace. Hors ces équations font intervenir les dérivées des quantités telles que la vitesse, la pression, pour écrire en terme de dérivées de quantités ALE il faut donc connaître le lien qu'elles ont entre elles.

On a défini les quantités ALE au paragraphe 2.3 à l'aide du changement de variable $\mathcal{C}$. Or ce dernier n'est pas connu explicitement, mais seulement à l'aide des caractéristiques $t \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{y}^\tau, \tau; t)$ où $\mathbf{y}^\tau, \tau$ sont des données.

C'est pourquoi le calcul des dérivées de $\mathcal{C}$ n'est pas direct.

Dérivées en temps



On se reportera à la figure ci-dessus. On a par définition :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \left[\lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{\Delta}_{\delta \mathbf{t}}}}{\delta t}, 1 \right]$$

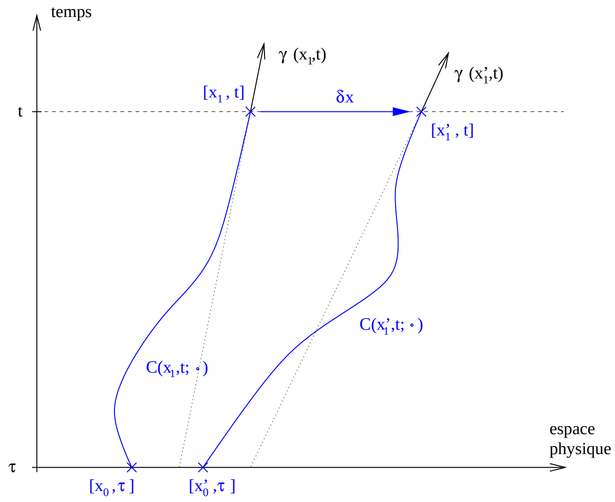
où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{\Delta}_{\delta \mathbf{t}}} &= \mathbf{C}(\mathbf{x_1}, t+\delta t; \tau) - \mathbf{C}(\mathbf{x_1}, t; \tau) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{x_0 x_0'}} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{x_0 x_1}} - \overrightarrow{\mathbf{x_0' x_1}} \\
&= (t-\tau)\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t) - (t+\delta t-\tau)\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t+\delta t) \\
&= -\delta t \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t+\delta t) + (t-\tau)[\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t) - \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t+\delta t)] \\
&= -\delta t \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t+\delta t) + \delta t(t-\tau)\frac{\partial \overrightarrow{\gamma}}{\partial t}(\mathbf{x_1}, t)
\end{aligned}$$

En divisant par δt et en passant à la limite, on obtient à l'ordre 1 en $(t-\tau)$:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = [-\overrightarrow{\gamma}, 1]$$

Dérivées en espace



Soient $\mathbf{x_1}$, δx et $\mathbf{x_1'} = \mathbf{x_1} + \delta x \vec{e_i}$ représentés ci-dessus.
On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{\Delta}_{\delta\mathbf{x}}} &= \mathbf{C}(\mathbf{x_1} + \overrightarrow{\delta\mathbf{x}}, t; \tau) - \mathbf{C}(\mathbf{x_1}, t, \tau) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{x_0}\mathbf{x_0'}} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{x_0}\mathbf{x_1}} + \overrightarrow{\mathbf{x_1}\mathbf{x_1'}} - \overrightarrow{\mathbf{x_0'}\mathbf{x_1'}} \\
&= \overrightarrow{\delta\mathbf{x}} + (t-\tau)\left(\overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1}, t) - \overrightarrow{\gamma}(\mathbf{x_1'}, t)\right) \\
&= \overrightarrow{\delta\mathbf{x}} + (t-\tau)\, \overset{\Longrightarrow}{\nabla}\gamma\, \overrightarrow{\delta\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

On obtient donc en divisant par δx et en passant à la limite :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial e_i} = [\vec{e_i}, 0]$$

à l'ordre 1 en $(t-\tau)$.

2.4 Récapitulons...

Pour permettre la mise en œuvre pratique de la méthode brièvement exposée en introduction, page 8, nous avons défini sur la base d'un instant de référence un domaine fixe, appartenant à un espace-temps dit « ALE », et lié à l'espace-temps physique par les relations ci-dessus (vraies à l'ordre 1 en temps).

On a rapidement écarté la possibilité de définir cet espace-temps à la façon des méthodes lagrangiennes, car cela amènerait des complications que nous ne maîtrisons pas, alors qu'il est possible de les éviter par le moyen terme exposé ici – même s'il conduit à des définitions assez lourdes, mais qui ne sont en rien inutiles.

On possède maintenant des outils nécessaires à la transformation de tout problème à frontières mobiles en un problème à frontières fixes, pour la résolution duquel on dispose de méthodes éprouvées.

Chapitre 3

Formulation ALE d'un écoulement newtonien en sortie de filière

La figure 3.1 représente la coupe d'une filière par un demi-plan $\vec{e_r}, \vec{e_z}$. Cette filière peut-être :

- soit plane, c'est-à-dire invariante dans une direction $\vec{e_y}$ perpendiculaire au demi-plan $\vec{e_r}, \vec{e_z}$ de la feuille ; et on suppose alors l'écoulement symétrique par rapport au plan $\vec{e_y}, \vec{e_z}$;
- soit à symétrie axiale, et dans ce cas on travaille en coordonnées cylindriques $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$.

Dans ces deux cas, la symétrie permet de se ramener au seul domaine Ω^t du demi-plan $\vec{e_r}, \vec{e_z}$ pour décrire D^t le domaine tridimensionnel effectivement occupé par le fluide.

On travaillera donc avec $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \in \Omega^t$, en gardant à l'esprit que les opérateurs de dérivation sont eux tridimensionnels, ce qui importe dans le cas axisymétrique.

De plus on suppose qu'en tout instant la surface libre peut-être décrite par une fonction φ de z, qui ne s'annule pas : on ne simulera donc pas une éventuelle rupture du jet.

L'objectif est ici d'appliquer le savoir-faire acquis au chapitre précédent pour obtenir une formulation des équations de Navier-Stokes, qui gouvernent cet écoulement, dans l'espace-temps ALE, pour un instant de réfrence quelconque, et permettre ainsi dans la suite la mise en œuvre de la méthode numérique ALE.

3.1 Formulation du problème

Pour un fluide newtonien incompressible de densité constante ρ_0, et en notant $\vec{\vec{D}}(\vec{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\vec{\vec{\nabla}}\vec{\mathbf{u}} + \vec{\vec{\nabla}}\vec{\mathbf{u}}^T)$, les équations de Navier-Stokes sans dimension appliquées au fluide s'écrivent :

$$(\mathrm{NS}) \left\{ \begin{array}{rcl} Re\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{u}}\right) + \vec{\nabla} p - 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\, \vec{\vec{D}}(\vec{\mathbf{u}}) & = & G\vec{e}_z \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} & = & 0 \end{array} \right.$$

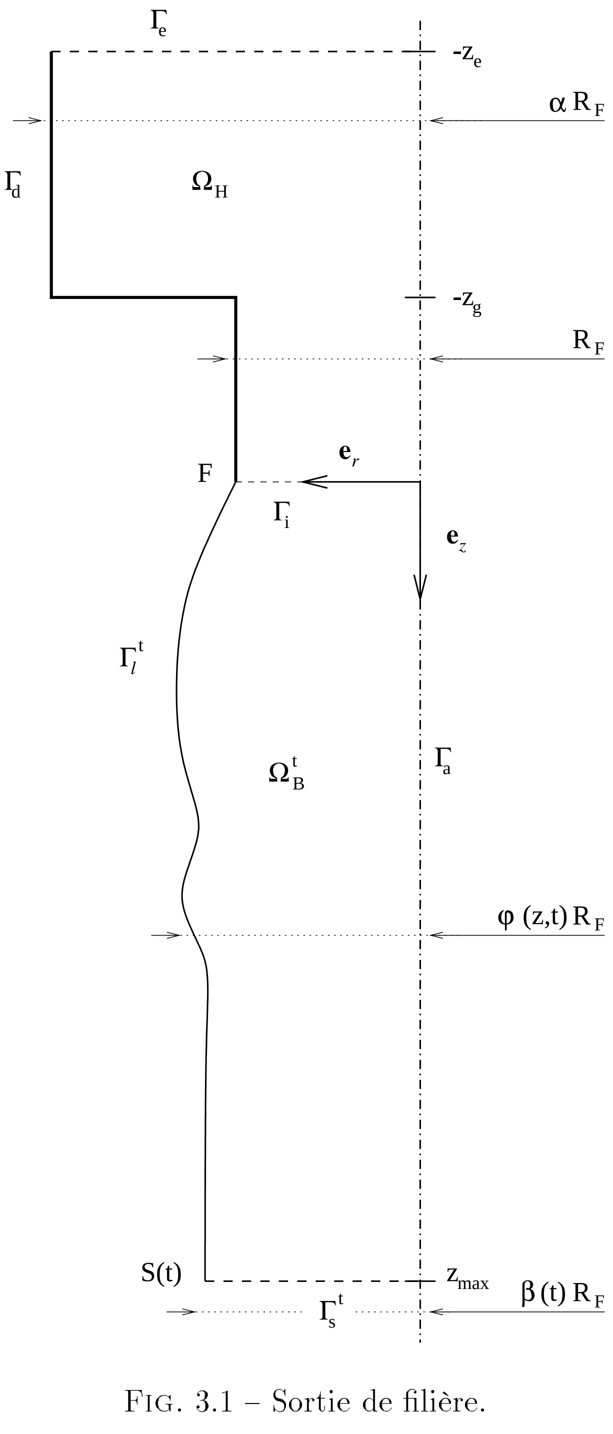


FIG. 3.1 – Sortie de filière.

en chaque instant, avec les conditions aux limites :

$$\begin{array}{rcll} \vec{\mathbf{u}} & = & \vec{\mathbf{u}}_e & \text{sur } \Gamma_e \\ \vec{\mathbf{u}} & = & \vec{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_d \\ 2\,\vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}})\vec{n} - p\vec{n} & = & -p_{ext}\vec{n} + Ca^{-1}\kappa^t\vec{n} & \text{sur } \Gamma_\ell^t \\ 2\,\vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}})\vec{n} - p\vec{n} & = & \vec{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_s^t \end{array}$$

où on a utilisé les nombres sans dimension de Reynolds, de gravité et de tension de surface ainsi définis :

$$Re = \frac{UR_F}{\nu} = \frac{\rho_0 U R_F}{\mu} \qquad G = \frac{gR_F^2}{\nu U} = \frac{\rho_0 g R_F^2}{\mu U} \qquad Ca^{-1} = \frac{\sigma_0}{\rho_0 \nu U} = \frac{\sigma_0}{\mu U}$$

en notant μ la viscosité dynamique du fluide, σ_0 le coefficient dimensionnel de tension superficielle.

On retrouve les inconnues du problème dimensionnel (marquées ici d'un ˆ) par les relations :

$$\begin{array}{rclcrcl} \hat{\mathbf{x}} & = & R_F\mathbf{x} & \qquad & \hat{t} & = & \dfrac{R_F}{U}t \\ \hat{\mathbf{u}} & = & U\mathbf{u} & & \hat{p} & = & \dfrac{\rho_0\nu U}{R_F}p \end{array}$$

où U est une vitesse caractéristique du flux entrant. La normalisation de p ici choisie est adaptée pour des écoulements à faible Reynolds.

Surface libre

Pour représenter Ω^t on suppose qu'on peut représenter la surface libre par la fonction φ qui à z et t associe la coordonnée r de la surface libre, ce qui est possible si celle-ci n'admet pas de tangente horizontale. L'hypothèse physique de surface libre (qui s'énonce : « les particules se trouvant sur la surface libre y demeurent ») impose pour une particule $\xi = (\xi_r(t), \xi_z(t))$ de la surface :

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(\xi_z(t), t) - \xi_r(t)\right) = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\xi_z(t), t) + \frac{d\xi_z}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\xi_z(t), t) = \frac{d\xi_r}{dt}(t)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\xi_z(t), t) + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\xi_z(t), t) = u_r$$

On obtient pour les points de $[0, z_{\max}]$, en gardant à l'esprit que $u_z(z=0) = 0$ et en supposant la surface libre rectiligne au-delà de $z_{\max}$:

$$(\mathrm{SL})\left\{\begin{array}{l} \text{Pour } z \in [0, z_{\max}], t \in [0, T], \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(z, t) + u_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z, t) = u_r \\ \varphi(z, 0) = \varphi_0(z); \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z_{\max}, t) = 0 \end{array}\right.$$

À partir de φ on peut exprimer la tension de surface κ^t qui apparaît dans les conditions limite sur Γ_ℓ^t :

$$(\mathrm{TS})\left\{\begin{array}{l}\text{Pour } t \in [0,t],\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_\ell^t, \\ \kappa(\varphi)(z,t) = -\dfrac{1}{\varphi\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}(z,t) + \dfrac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}{\left(1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(z,t)\end{array}\right.$$

Le problème de la sortie de filière se formule donc ainsi :

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \vec{\mathbf{u}}, p, \varphi \text{ à partir des conditions initiales et tels que :} \\ \text{– En tout instant } t \text{ pour } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \in \Omega^\varphi \text{ on ait :} \\ \begin{array}{rcl} Re\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathbf{u}}\right) + \vec{\nabla}p - 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\,\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) & = & G\vec{e}_z \\ \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{u}} & = & 0 \end{array} \\ \text{– En tout instant } t \text{ pour } z \in [0, z_{\max}] \text{ :} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(z,t) + u_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t) = u_r \\ \\ \text{avec en tout instant } t \text{ les conditions aux limites :} \\ \begin{array}{rcll} \vec{\mathbf{u}} & = & \vec{\mathbf{u}}_e & \text{sur } \Gamma_e \\ \vec{\mathbf{u}} & = & \vec{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_d \\ 2\,\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}})\vec{n} - p\vec{n} & = & \vec{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_s^t \\ 2\,\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}})\vec{n} - p\vec{n} & = & -p_{ext}\vec{n} + Ca^{-1}\kappa(\varphi)\vec{n} & \text{sur } \Gamma_\ell^t \end{array} \\ \text{et :} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z_{\max}, t) = 0 \end{array}\right.$$

3.2 Écriture ALE

3.2.1 Déformation du domaine

On souhaite maintenant définir un champ arbitraire de vitesses de déformations $\vec{\gamma}(\mathbf{x},t)$ comme au paragraphe 2.1.2, auquel on invite le lecteur à se reporter.

En tout instant t, sur Γ_ℓ^t on prend :

$$\begin{array}{rcl} \vec{\gamma}(\mathbf{x},t) & = & \left(\dfrac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{n}}{\vec{e_r}\cdot\vec{n}}\right)\vec{e}_r \\ & = & u_N\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,\vec{e}_r \end{array}$$

qui est bien défini dans notre cas (car $\vec{e}_r\cdot\vec{n} > 0$ en tout point) et vérifie $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{n} = \vec{\gamma}\cdot\vec{n}$.

Les autres conditions au bord sont la nullité de $\overrightarrow{\gamma}$ sur les frontières d'entrée et de Dirichlet, de $\overrightarrow{\gamma} \cdot \vec{n}$ sur la frontière de sortie.

On voit donc qu'on peut prendre un champ $\overrightarrow{\gamma} = \gamma(r,z)\vec{e}_r$ purement radial, défini par un relèvement dans Ω^t. Arbitrairement[1], on définit le champ scalaire γ en tout instant comme l'unique solution du problème aux limites :

$$(\mathrm{R}_\gamma)\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2\gamma(\mathbf{x},t)}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2\gamma(\mathbf{x},t)}{\partial z^2} & = & 0 & \text{dans } \Omega^t \\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & u_N\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} & \text{sur } \Gamma_\ell^t \\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_i \\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_a \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z}(\mathbf{x},t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_s^t \end{array}\right.$$

On en déduit les caractéristiques du champ arbitraire de vitesses de déformations, les courbes $t \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x},\tau;t)$, définies au paragraphe 2.1.2.

3.2.2 Formulation ALE

On choisit maintenant un instant de référence τ quelconque. Le domaine en cet instant Ω^τ sera appelé *domaine de référence.* Comme dans 2.3, on définit un changement de variable entre le domaine physique à l'instant t, Ω^t et le domaine de référence :

$$\mathcal{C} : \begin{array}{ccc} [\mathbf{x},t] & \mapsto & [\mathbf{C}(\mathbf{x},t,\tau);t] \\ \\ \Omega^{[0,T]} & \rightarrow & \Omega^\tau \times [0,T] \end{array}$$

On exprime (NS, p. 33) en terme des quantités ALE définies au moyen de ce changement de variable (cf. paragraphe 2.3) :

$$(\mathrm{NS}_\tau)\left\{\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Trouver } \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} \text{ et } p_\tau \text{ tels que dans } \Omega^\tau \text{ on ait en tout instant } t :} \\ Re\left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}}{\partial t} + (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}\right) + \overrightarrow{\nabla}p_\tau - 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}) & = & G\vec{e}_z \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque que ces équations sont définies sur un domaine fixe, qui est Ω^τ, le domaine de référence. On a également les conditions aux limites, obtenues de la même manière :

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} & = & \overrightarrow{\mathbf{u}}_e & \text{sur } \Gamma_e \\ \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} & = & \overrightarrow{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_d \\ 2\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})\vec{n} - p_\tau\vec{n} & = & -p_{ext}\vec{n} + Ca^{-1}\kappa^\tau\vec{n} & \text{sur } \Gamma_\ell^\tau \\ 2\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})\vec{n} - p_\tau\vec{n} & = & \overrightarrow{\mathbf{0}} & \text{sur } \Gamma_s^\tau \end{array}$$

En effet on a $\kappa^\tau = \kappa^t$ à l'ordre 1, puisque l'on considère le changement de variable comme une transformation solide à cet ordre (paragraphe 2.3.2).

La solution composée par le changement de variable $(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}, p_\tau)\circ\mathcal{C}$ sera ainsi une approximation au premier ordre de la solution de (NS).

[1]Ce choix sera discuté lors de l'exploitation du code, dans la section 7.4.3.

Chapitre 4

Discrétisation en temps

À partir de la formulation ALE des équations de Navier-Stokes, il devient possible de découpler le problème à frontière mobile, qu'on ne sait pas résoudre tel quel, en un problème à frontière fixe et un déplacement de la frontière. On va voir ici comment on résoud chacun de ces deux sous-problèmes, et, en fonction des données nécessaires à chacun, de quelles façons ils peuvent s'articuler au sein d'une algorithmique.

On se place à l'instant $\tau = t^m$ que l'on choisit comme instant de référence. Le domaine de référence est donc Ω^m, dont la frontière libre

$$\Gamma^m = \left\{ \mathbf{x}, \text{ tel que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi(z, t^m) \\ z \end{pmatrix}, z \in [0, z_{\max}] \right\}$$

est connue. De même, on suppose connaître un couple $(\mathbf{u}^m, p^m)$ approchant à l'ordre 1 la solution à cet instant.

À partir de ces données on veut déterminer $\Gamma^{m+1}, \mathbf{u}^{m+1}$ et p^{m+1}. On procède par étapes :

1. Calcul de $(\bar{\mathbf{u}}^{m+1}, \bar{p}^{m+1})$, qui approche la solution $(\vec{\mathbf{u}}_\tau(\cdot, t^{m+1}), p_\tau(\cdot, t^{m+1}))$ du problème ALE (NS_τ, page 37).

C'est un calcul qui se fait sur Ω^m.

2. Approximation du changement de variable $\mathcal{C}^m$ passant de Ω^m à Ω^{m+1}.

Ce qui nous permet d'obtenir $(\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1}) = (\bar{\mathbf{u}}^{m+1}, \bar{p}^{m+1}) \circ \mathcal{C}^m$.

La première étape va être traitée par une méthode des caractéristiques, on verra comment elle influe sur la seconde en faisant apparaître la nécessité de connaître le contour du domaine Ω^{m+1}, représenté par φ^{m+1}.

Par avance on peut se reporter aux deux algorithmes en figure 4.2 pour mieux situer les étapes nécessaires. Le second algorithme sera finalement retenu.

4.1 Application d'une méthode des caractéristiques au problème ALE

Connaissant un champ arbitraire des vitesses de déformations $\overrightarrow{\gamma}_\tau$ qui soit conforme à la définition du paragraphe 2.1.2, page 24, le problème ALE s'écrit sur le domaine espace-temps ALE $\Omega^\tau \times [0,T]$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Re\left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}}{\partial t}(\mathbf{x},t) + (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau)\cdot \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x},t)\right) + \overrightarrow{\nabla} p_\tau(\mathbf{x},t) - 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}\,(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})(\mathbf{x},t) & = & G\vec{e}_z \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x},t) & = & 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît dans le membre gauche de la première équation un terme de transport de $\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}$ dans le champ $(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau)(\mathbf{x},t)$, on récrit alors le système avec la dérivée particulaire dans ce champ, notée $\dfrac{\bar{D}}{\bar{D}t}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Re\dfrac{\bar{D}\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}}{\bar{D}t}(\mathbf{x},t) & = & -\overrightarrow{\nabla} p_\tau(\mathbf{x},t) + G\vec{e}_z + 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}\,(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})(\mathbf{x},t) \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x},t) & = & 0 \end{array} \right.$$

L'équation est donc du même type que celle du paragraphe 2.2. Nous appliquons la méthode décrite dans ce paragraphe pour définir le changement de variable approprié[1].

Reformulation par la méthode des caractéristiques

Les caractéristiques du champ $(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau)$ sont définies, pour tout point $[\mathbf{x_0}, t_0]$ du domaine espace-temps ALE $\Omega^\tau \times [0,T]$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x_0}, t_0; t) = (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} - \overrightarrow{\gamma}_\tau)\,(\mathbf{X}(\mathbf{x_0}, t_0; t), t) \\ \mathbf{X}(\mathbf{x_0}, t_0; t_0) = \mathbf{x_0} \end{array} \right.$$

Fixons t_0 dans $[0,T]$. Le changement de variable $\mathcal{X}^{-1}$ associé est :

$$\mathcal{X}^{-1} : [\mathbf{x}, t] \longrightarrow [\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_0; t), t]$$

On remarque que $\mathcal{X}^{-1}[\mathbf{x}, t_0] = [\mathbf{x}, t_0]$.

À l'aide de ce changement de variable, les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Re\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}\circ\mathcal{X}^{-1}}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = & -\overrightarrow{\nabla} p_\tau\circ\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x},t) + G\vec{e}_z + 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}\,(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})\circ\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x},t) \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}\circ\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x},t) & = & 0 \end{array} \right.$$

[1]À la différence qu'ici, les espaces domaine de départ et d'arrivée sont les mêmes, notre équation de départ étant déjà définie sur $\Omega^\tau \times [0,T]$.

Discrétisation en temps : méthode d'Euler implicite

On prend maintenant $\tau = t^m$ et $t_0 = t^{m+1}$, et on écrit les équations au temps t^{m+1}, en utilisant $\mathcal{X}^{-1}[\mathbf{x}, t^{m+1}] = [\mathbf{x}, t^{m+1}]$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Re\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} \circ \mathcal{X}^{-1}}{\partial t}(\mathbf{x}, t^{m+1}) & = & -\overrightarrow{\nabla} p_\tau(\mathbf{x}, t^{m+1}) + G\vec{e}_z + 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\ \overset{\Rightarrow}{D}\ (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})(\mathbf{x}, t^{m+1}) \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}, t^{m+1}) & = & 0 \end{array}\right.$$

On peut discrétiser en temps cette équations par la méthode d'Euler implicite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{Re}{\Delta t}\left(\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}, t^{m+1}) - \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau} \circ \mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}, t^m)\right) & & \\ & = & -\overrightarrow{\nabla} p_\tau(\mathbf{x}, t^{m+1}) + G\vec{e}_z + 2\overrightarrow{\mathbf{div}}\ \overset{\Rightarrow}{D}\ (\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau})(\mathbf{x}, t^{m+1}) \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{x}, t^{m+1}) & = & 0 \end{array}\right.$$

Cependant les caractéristiques $\mathbf{X}$ ne sont pas calculables exactement, puisque leur définition fait intervenir la vitesse $\overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}$ pour $t > t^m$. On en fait une approximation $\mathbf{X}^m$ à l'ordre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathbf{X}^m}{dt}(\mathbf{x}_0, t_0; t) = \overrightarrow{\mathbf{u}_\tau}(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}_0, t_0; t), \tau) - \overrightarrow{\gamma}_\tau(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}_0, t_0; t), t) \\ \mathbf{X}^m(\mathbf{x}_0, t_0; t_0) = \mathbf{x}_0 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi une approximation $\mathcal{X}^{-1,m}$ à l'ordre 1 de $\mathcal{X}^{-1}$. Seules les valeurs $\tilde{\mathcal{X}}_m(\mathbf{x})$ telles que $[\tilde{\mathcal{X}}_m(\mathbf{x}), t^m] = \mathcal{X}^{-1,m}[\mathbf{x}, t^m]$ nous sont utiles, elles nous permettent d'écrire la discrétisation en temps du problème ALE :

$$(\mathrm{NS}_\tau^m)\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } \mathbf{x} \in \Omega^m, \\ \begin{array}{rcl} -2\mathbf{div}D(\bar{\mathbf{u}}^{m+1}) + \nabla \bar{p}^{m+1}(\mathbf{x}) + \dfrac{Re}{\Delta t}\bar{\mathbf{u}}^{m+1}(\mathbf{x}) & = & \dfrac{Re}{\Delta t}\mathbf{u}^m\left(\tilde{\mathcal{X}}_m(\mathbf{x})\right) + G\mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{m+1}(\mathbf{x}) & = & 0 \end{array} \\ \text{avec les conditions aux limites :} \\ \begin{array}{rcll} \bar{\mathbf{u}}^{m+1} & = & \mathbf{u}_e & \text{sur } \Gamma_e \\ \bar{\mathbf{u}}^{m+1} & = & \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_d \\ 2D(\bar{\mathbf{u}}^{m+1})\mathbf{n} - \bar{p}^{m+1}\mathbf{n} & = & -p_{ext}\mathbf{n} + Ca^{-1}\kappa(\varphi^{m+1})\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_\ell^m \\ 2D(\bar{\mathbf{u}}^{m+1})\mathbf{n} - \bar{p}^{m+1}\mathbf{n} & = & \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_s^m \end{array} \end{array}\right.$$

Remarquons que la méthode des caractéristiques, jointe à celle d'Euler implicite, nous a ramenés à la résolution d'un problème de type Stokes.

4.2 Suivi de la surface libre

Pour calculer $(\bar{\mathbf{u}}^{m+1}, \bar{p}^{m+1})$ ci-dessus, nous avons supposé connaître un champ arbitraire des vitesses de déformations $\overrightarrow{\gamma}_\tau(\mathbf{x}, t)$ entre $t^m = \tau$ et t^{m+1} pour résoudre le problème ALE. Pour déterminer $\overrightarrow{\gamma}$, on utilise (R_γ, page 37). On voit que cette définition fait intervenir la vitesse normale $\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}$ à la surface libre, qui est justement une inconnue pour $t > t^m$.

On voit aussi ci-dessus que la fonction φ^{m+1} qui décrit l'interface au temps t^{m+1} est nécessaire au calcul de $(\bar{\mathbf{u}}^{m+1}, \bar{p}^{m+1})$.

Il est évident que φ et $\overrightarrow{\gamma}$ sont liés : le premier décrit la surface libre délimitant l'ensemble advecté par le second.

Montrons exactement quel est ce lien.

φ est défini par l'équation physique de surface libre (SL, page 35) :

$$(\mathrm{SL}) \begin{cases} \text{Pour } z \in [0, z_{\max}], t \in [0, T], \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(z,t) + u_z \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(z,t) = u_r \\ \varphi(z, 0) = \varphi_0(z) \quad \varphi(0,t) = 1 \end{cases}$$

D'autre part, et par définition, pour les points $\mathbf{x}$ de Γ_ℓ^t, le champ γ vérifie :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{x}, t) &= \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_r \cdot \vec{n}} \\ &= \frac{u_r \vec{e}_r \cdot \vec{n} + u_z \vec{e}_z \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Or, géométriquement, on a $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_r \cdot \vec{n}$, d'où :

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = u_r(\mathbf{x}, t) - u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\mathbf{x}, t) \qquad \text{sur } \Gamma_\ell^t$$

On reconnaît le membre de droite de (SL), et on a :

$$\frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t} = \gamma|_{\Gamma_\ell^t}(z,t) \tag{4.2}$$

Il suffit donc de trouver, pour $t \in [t^m, t^{m+1}]$, et avec la donnée de φ^m et $\overrightarrow{\mathbf{u}}^m$, une approximation :

- *soit de $\gamma|_{\Gamma_\ell^t}$ à l'aide de (4.1), ce qui permettra de calcul $\overrightarrow{\gamma}$ sur Ω^t par (R_γ) et de φ^{m+1} par (4.2).*
- *soit de φ par discrétisation de (SL), ce qui donnera $\gamma|_{\Gamma_\ell^t}$ puis $\overrightarrow{\gamma}$ sur Ω^t.*

Les deux approches sont présentées ici, les algorithmes correspondants sont en figure 4.2.

4.2.1 Approximation de γ

À partir des données disponibles, on ne peut que prendre la valeur de γ à $t = t^m$.

Le calcul de φ^{m+1} se fait donc par différences finies explicites entre $t^m = \tau$ et t^{m+1} :

$$\varphi^{m+1}(z) = \varphi^m(z) + \Delta t \gamma(\varphi^m(z), z, t^m)$$

Ce schéma, testé dans [Maury], s'avère instable dès que les vitesses tangentielles sont prédominantes.

4.2.2 Approximation de φ : une méthode lagrangienne

Du fait de l'instabilité de la méthode ci-dessus, B. Maury propose une méthode lagrangienne, qui revient en fait à chercher la coordonnée r à t^{m+1} des particules fluides appartenant à la surface libre Γ_ℓ^m l'instant t^m.

Écrivons (SL) en terme de dérivée particulaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{D\varphi}{Dt}(z,t) & = & u_r(\varphi(z,t), z, t) \quad \text{dans } [0, z_{\max}] \\ \varphi(0,t) & = & 1 \end{array} \right.$$

On peut approcher $\frac{D\varphi}{Dt}$ de la façon suivante, à l'ordre 1 pour t voisin de t^m :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_z^m \frac{\partial \varphi}{\partial z} =: \frac{D^m \varphi}{D^m t}$$

Au vu de la figure 4.1, il est naturel de prendre $\varphi(z, \cdot) = 1$ sur $[-z_g, 0]$.

On introduit alors $t \longrightarrow Z(z_1, t^{m+1}; t)$ comme suit pour tout $z_1 \in [0, z_{\max}]$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dZ}{dt}(z_1, t^{m+1}; t) & = & u_z^m(\varphi^m(Z(z_1, t^{m+1}; t)), Z(z_1, t^{m+1}; t)) \\ Z(z_1, t^{m+1}; t^{m+1}) & = & z_1 \end{array} \right.$$

La courbe NM ainsi définie le long de la surface Γ^m

$$t \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi^m(Z(z_1, t^{m+1}; t)) \\ Z(z_1, t^{m+1}; t) \end{pmatrix}$$

et qui passe par le point $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varphi^m(z_1) \\ z_1 \end{pmatrix}$, est une approximation de la projection selon $\vec{e_r}$ sur Γ_ℓ^m de la caractéristique $t \to \xi(\mathbf{M}', t^{m+1}; t)$ passant par le point $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \varphi(z_1, t^{m+1}) \\ z_1 \end{pmatrix}$, qui est la trajectoire exacte d'une particule fluide de la surface. Voir figure 4.1.

On note z_0 la coordonnée z à t^m de cette particule :

$$z_0 = Z(z_1, t^{m+1}; t^m)$$

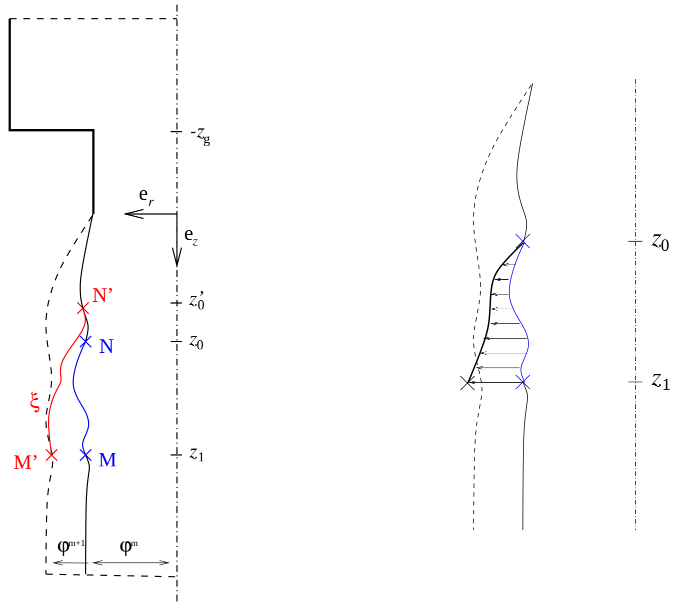


FIG. 4.1 – La courbe NM définie sur Γ_ℓ^m à partir de Z. À l'aide de cette courbe, c'est en fait $\mathbf{M}'$ que l'on cherche à approcher par intégration des vitesses radiales, comme schématisé à droite.

Pour Δt assez petit, on aura $z_0 > -z_g$.

On remarque

$$\frac{D^m\varphi}{D^m t}(Z(t),t) = \frac{d\varphi(Z(t),t)}{dt}$$

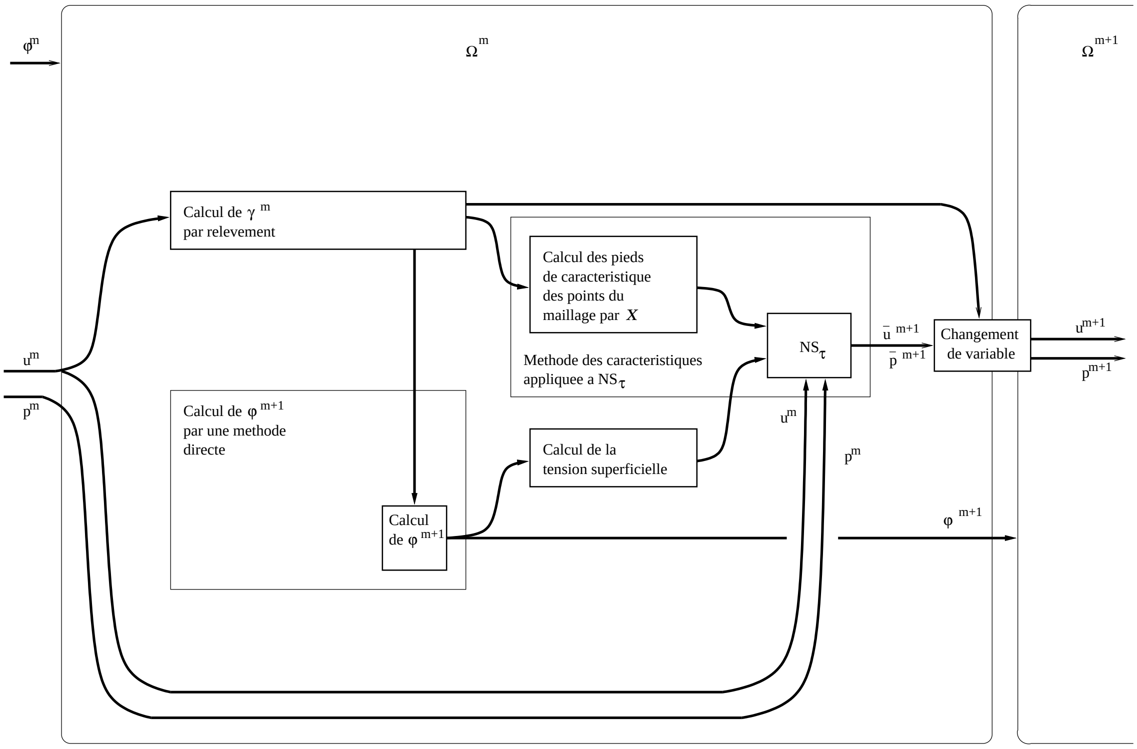
Par intégration entre t^m et t^{m+1}, on trouve[2]

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1,t^{m+1}) - \varphi(z_0,t^m) &= \int_{t^m}^{t^{m+1}} \frac{d\varphi(Z(t),t)}{dt}dt \\
&= \int_{t^m}^{t^{m+1}} u_r^m(\varphi^m(Z(t)),Z(t))dt \\
&= \int_{z_0}^{z_1} \frac{u_r^m(\varphi^m(z),z)}{u_z^m(\varphi^m(z),z)}dz \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

À partir de ce résultat, on peut approcher $\overrightarrow{\gamma} = \frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{\mathbf{MM}'}$ sur Γ_ℓ^m par :

$$\frac{1}{\Delta t}(\varphi(z_1,t^{m+1}) - \varphi(z_1,t^m))$$

[2]À supposer que la vitesse selon z est non-nulle en z_1, elle le sera alors par construction sur $[z_0,z_1]$. Dans le cas contraire le résultat est évidemment $u_r^m(\varphi^m(z),z)(t^{m+1}-t^m)$.



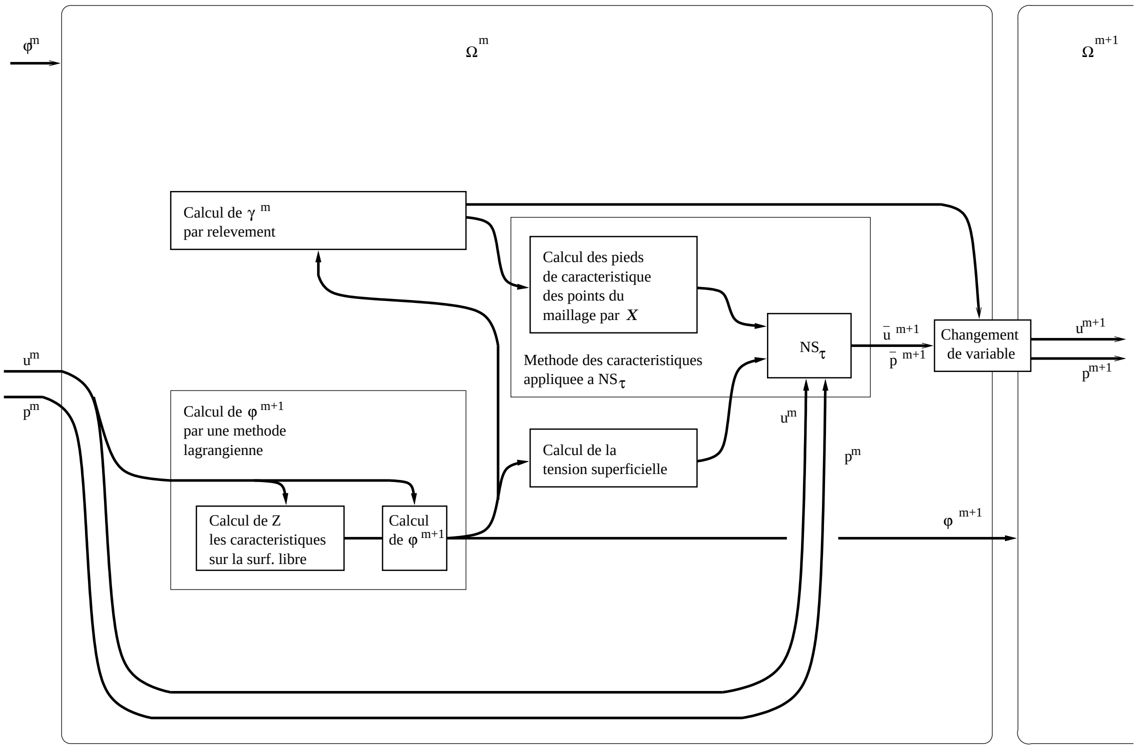


FIG. 4.2 – Deux algorithmes possibles sur un pas de temps : calcul préalable de $\vec{\gamma}$, en haut, ou de φ^{m+1}, en bas – ce dernier étant finalement retenu.

Chapitre 5

Discrétisation en espace

On s'intéresse ici à la résolution du problème stationnaire à frontière fixe obtenu à la page 41. Il a la forme tout-à-fait classique du problème de Stokes, nous pouvons donc le résoudre efficacement par une méthode d'éléments finis : pour ce faire nous en écrivons ici la formulation variationnelle.

Il faut à ce stade différencier les deux cas que nous considérons, à savoir écoulements à symétrie plane et à symétrie axiale. Nous retrouvons ici les conditions de symétrie dans chaque cas par des considérations géométriques simples, après avoir appliqué la formule de Green aux formulations faibles des équations de chaque cas.

5.1 Formulation variationnelle dans le cas plan

On se place à l'instant t, on connaît le domaine occupé par le fluide D à cet instant par le biais de $\Omega = \Omega^t$:

$$\mathsf{D} = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \text{ tel que } \begin{pmatrix} |x| \\ z \end{pmatrix} \in \Omega\}$$

Les grandeurs physiques définies sur D obéissent aux conditions de symétrie plane, c'est-à-dire pour les champs scalaires tels que la pression $p(x,z) = p(-x,z)$ et pour les champs de vecteurs tels la vitesse $u_x(x,z) = -u_x(-x,z)$ et $u_z(x,z) = u_z(-x,z)$.

5.1.1 Quelques notations et propriétés de la symétrie plane

Pour un vecteur $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, on définit $\underline{\vec{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

On a $\underline{\vec{\mathbf{a}}} \cdot \underline{\vec{\mathbf{b}}} = (-a_1)(-b_1) + a_2 b_2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$.

Pour une matrice $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$ on définit $\underline{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{12} \\ -D_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$.

On a $\underline{D} : \underline{E} = D : E$ et

$$\underline{\vec{\mathbf{a}}}\,\underline{D}\,\underline{\vec{\mathbf{b}}} = (-b_1)D_{11}(-a_1) + (-b_1)(-D_{12})a_2 + b_2(-D_{12})(-a_2) + b_2 D_{22} a_2 = \vec{\mathbf{a}} D \vec{\mathbf{b}}$$

5.1.2 Formulation variationnelle

On écrit la formulation variationnelle sur D avant d'utiliser les conditions de symétrie pour réduire le problème à Ω. En notant $\lambda = \frac{Re}{\Delta t}$, et $\vec{\mathbf{f}}$ le second membre connu[1] de (NS^m_τ, page 41), en sommant sur D le produit avec $(\vec{\mathbf{v}}, q) \in \left\{\vec{\mathbf{v}} \in H^1(\mathsf{D}),\ \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_e \cup \Gamma_d} = 0\right\} \times L^2(\mathsf{D})$:

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathsf{D}} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} - 2\int_{\mathsf{D}} \overrightarrow{\mathbf{div}}\, \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} + \int_{\mathsf{D}} \vec{\nabla} p \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} &= \int_{\mathsf{D}} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} \\
\int_{\mathsf{D}} q \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}\, d\mathbf{x} &= 0
\end{aligned}$$

La formule de Green nous donne alors :

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda \int_{\mathsf{D}} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} \\
&+2\int_{\mathsf{D}} \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{v}})\, d\mathbf{x} - 2\int_{\partial \mathsf{D}} \vec{\mathbf{v}}\, \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) \vec{n}\, d\mathbf{s} \\
&- \int_{\mathsf{D}} p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial \mathsf{D}} p \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{n}\, d\mathbf{s} = \int_{\mathsf{D}} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} \\
&\int_{\mathsf{D}} q \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}\, d\mathbf{x} = 0
\end{aligned}\right.$$

Avec les notations ci-avant, on voit que la condition de symétrie s'écrit $\vec{\mathbf{u}}(x,z) = \underline{\vec{\mathbf{u}}}(-x,z)$. On décompose les fonctions-test en $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{w}}$ avec $\vec{\mathbf{m}}(x,z) = \underline{\vec{\mathbf{m}}}(-x,z)$ et $\vec{\mathbf{w}}(x,z) = -\underline{\vec{\mathbf{w}}}(-x,z) = w(x,z)\vec{e_x}$. Il est facile de vérifier l'existence et l'unicité d'une telle décomposition. Remarquons que ces conditions sur $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{m}}$ entraînent que leurs composantes selon $\vec{e_x}$ sont nulles sur l'axe.

En notant $\Omega^- = \mathsf{D} \setminus \Omega$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathsf{D}} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{w}})\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} \underline{\vec{\mathbf{u}}} \cdot (\underline{\vec{\mathbf{m}}} - \underline{\vec{\mathbf{w}}})(-x,z)\, d\mathbf{x} \\
&= 2\int_{\Omega} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{m}}\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

De même, en remarquant que $\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}(x,z)) = \overset{\Rightarrow}{D}(\underline{\vec{\mathbf{u}}}(-x,z)) = \underline{\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}})}(-x,z)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathsf{D}} \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{v}})\, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{w}})\, d\mathbf{x} \\
&\quad + \textstyle\int_{\Omega^-} \underline{\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}})} : \left(\underline{\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{m}})} - \underline{\overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{w}})}\right)(-x,z)\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D}(\vec{\mathbf{m}})\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Les autres termes se comportant de façon semblable, on finit par se ramener à une formulation variationnelle sur le seul sous-domaine Ω et ne dépendant que de la partie $\vec{\mathbf{m}}$ des fonctions-test.

---

[1]C'est dans ce second membre qu'apparaîssent les termes d'inertie, voir chapitre 4.

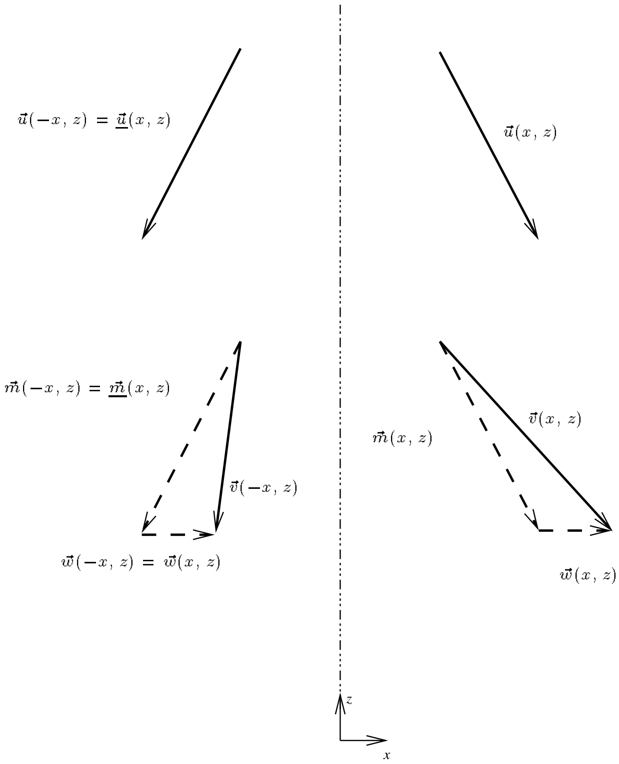


FIG. 5.1 – Symétrie plane

Le problème revient donc à trouver $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, p)$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda \displaystyle\int_\Omega \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}} d\mathbf{x} & & \\ +2 \displaystyle\int_\Omega \overset{\Rightarrow}{D} (\overrightarrow{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D} (\overrightarrow{\mathbf{m}}) d\mathbf{x} - 2 \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{\mathbf{m}} \, \overset{\Rightarrow}{D} (\overrightarrow{\mathbf{u}}) \vec{n} ds & & \\ - \displaystyle\int_\Omega p \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} p \, \overrightarrow{\mathbf{m}} \cdot \vec{n} ds & = & \displaystyle\int_\Omega \overrightarrow{\mathbf{f}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}} d\mathbf{x} \\ & & \\ \displaystyle\int_\Omega q \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} & = & 0 \end{array} \right.$$

soit vérifié pour tout couple $(\overrightarrow{\mathbf{m}}, q) \in V_0 \times Q$, où

$$\begin{array}{rcl} V_0 & = & \left\{ \overrightarrow{\mathbf{m}} \in H^1(\Omega), \ \overrightarrow{\mathbf{m}}|_{\Gamma_e \cup \Gamma_d} = 0, \ m_x(0,z) = 0 \right\} \\ Q & = & L^2(\Omega)/I\!\!R \end{array}$$

pour un couple solution $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, p) \in V \times Q$, avec

$$V = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega), \ \overrightarrow{\mathbf{v}}|_{\Gamma_e} = \overrightarrow{\mathbf{u}}_e, \ \overrightarrow{\mathbf{v}}|_{\Gamma_d} = 0, \ v_x(0,z) = 0 \right\}$$

On regroupe les termes de bord non nuls, et on utilise les conditions de type Neumann :

$$\int_{\Gamma_\ell \cup \Gamma_s} (2 \overset{\Rightarrow}{D} (\overrightarrow{\mathbf{u}}) \vec{n} - p\vec{n}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}} ds \quad = \quad \int_{\Gamma_\ell} \left(-p_{ext} \vec{n} + Ca^{-1} \frac{\vec{n}}{R} \right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}} ds$$

On peut prendre $p_{ext} = 0$, et pour la tension de surface on pourra exploiter le calcul décrit dans 1.2.1. Finalement :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\mathbf{u}}, p) \in V \times Q \text{ tels que :} \\ \lambda \int_\Omega \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{m}} d\mathbf{x} + 2 \int_\Omega \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}}) : \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{m}}) d\mathbf{x} - \int_\Omega p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{m}} d\mathbf{x} \\ \qquad\qquad = \int_\Omega \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{m}} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\ell} Ca^{-1} \frac{\vec{n}}{R} \cdot \vec{\mathbf{m}} ds \qquad \forall \vec{\mathbf{m}} \in V_0 \\ \int_\Omega q \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} d\mathbf{x} = 0 \qquad \forall q \in Q \end{array}\right.$$

5.2 Formulation variationnelle dans le cas axisymétrique

On va cette fois définir D comme un domaine tridimensionnel, qui peut se décrire à l'aide de Ω :

$$\mathsf{D} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}, \text{ tel que } \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \in \Omega,\ \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Du fait de l'axisymétrie, les espaces des solutions $\vec{\mathbf{u}}$ et p sont respectivement :

$$\begin{array}{rcl} V &=& \left\{ \vec{\mathbf{v}} = v_r(r,z)\vec{e_r}(\theta) + v_z(r,z)\vec{e_z},\ \text{où } (v_r, v_z) \in \left(H^1(\Omega)\right)^2, \quad \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_e} = \vec{\mathbf{u}_e}, \quad \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_d} = \vec{\mathbf{0}} \right\} \\ Q &=& L^2(\Omega)/I\!R \end{array}$$

et pour les fonctions-test, on prendra nécessairement $(\vec{\mathbf{v}}, q) \in V_0 \times Q$ avec

$$V_0 = \left\{ \vec{\mathbf{v}} = v_r(r,z)\vec{e_r}(\theta) + v_z(r,z)\vec{e_z},\ \text{où } (v_r, v_z) \in \left(H^1(\Omega)\right)^2, \quad \vec{\mathbf{v}}|_{\Gamma_d \cup \Gamma_e} = \vec{\mathbf{0}} \right\}$$

Reprenons l'équation (NS_τ^m, page 41), en notant $\lambda = \frac{Re}{\Delta t}$, $\vec{\mathbf{f}}$ le second membre, qui est connu, et $(\vec{\mathbf{u}}, p)$ les inconnues. On intègre le produit avec fonctions-test :

$$\begin{array}{rcll} \lambda \int_\mathsf{D} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} - 2 \int_\mathsf{D} \overrightarrow{\mathbf{div}}\, \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} + \int_\mathsf{D} \vec{\nabla} p \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} &=& \int_\mathsf{D} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} & \forall \vec{\mathbf{v}} \in V_0 \\ \int_\mathsf{D} q \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} d\mathsf{D} &=& 0 & \forall q \in Q \end{array}$$

La formule de Green appliquée sur D donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda \int_\mathsf{D} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} + 2 \int_\mathsf{D} \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}}) : \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{v}}) d\mathsf{D} - 2 \int_{\partial\mathsf{D}} \vec{\mathbf{v}}\, \vec{\vec{D}}\,(\vec{\mathbf{u}}) \vec{n} d\mathbf{S} && & \\ - \int_\mathsf{D} p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} + \int_{\partial\mathsf{D}} p \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{n} d\mathbf{S} &=& \int_\mathsf{D} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathsf{D} & \forall \vec{\mathbf{v}} \in V_0 \\ \int_\mathsf{D} q \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} d\mathsf{D} &=& 0 & \forall q \in Q \end{array}\right.$$

où les volumes élémentaires d'intégration valent $d\mathsf{D} = r d\theta\, dr\, dz$ et les éléments d'aire sur la surface axisymétrique $d\mathbf{S} = \varphi(z) d\theta \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} dz$ (voir figure 5.2).

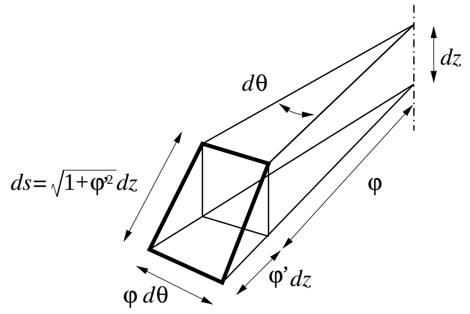


FIG. 5.2 – Élément d'aire en coordonnées cylindriques sur une surface axisymétrique

L'axisymétrie permet de simplifier les intégrations : $\int_{[0,2\pi]} d\theta = 2\pi$.

On regroupe les termes de bord et on utilise les propriétés de V_0, puis les conditions de Neumann :

$$\int_{\partial\mathsf{D}\cap\{\theta=0\}} (2 \overset{\Rightarrow}{D} (\vec{\mathbf{u}})\vec{n} - p\vec{n}) \cdot \vec{\mathbf{v}}\, \varphi ds \quad = \quad \int_{\Gamma_\ell} \left(-p_{ext}\vec{n} + Ca^{-1} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\perp} \right) \vec{n} \right) \cdot \vec{\mathbf{v}}\, \varphi ds$$

On peut prendre $p_{ext} = 0$, on renvoie au paragraphe 1.2.1 pour le calcul des courbures.

On obtient finalement la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\mathbf{u}}, p) \in V \times Q \text{ tels que :} \\ \\ \lambda \int_\Omega \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + 2 \int_\Omega \overset{\Rightarrow}{D} (\vec{\mathbf{u}}) : \overset{\Rightarrow}{D} (\vec{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_\Omega p \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \quad = \\ \qquad\qquad \int_\Omega \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + Ca^{-1} \int_{\Gamma_\ell} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\perp} \right) \vec{n} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, \varphi ds \qquad \forall \vec{\mathbf{v}} \in V_0 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \int_\Omega q \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} d\mathbf{x} \quad = \quad 0 \qquad\qquad \forall q \in Q \end{array} \right.$$

où $d\mathbf{x} = r dr\, dz$.

Chapitre 6

Résolution numérique

6.1 L'environnement C++ `Rheolef`

`Rheolef` est un environnement C++ fournissant les outils de calcul matriciel efficace et de résolution de systèmes linéaires ou non, ainsi que les objets nécessaires aux éléments finis, allant des maillages aux champs et aux formes bilinéraires discrets. Voir [Saramito].

Travailler dans cet environnement m'a permis de me concentrer sur les spécificités de la méthode ALE, dont une mise en œuvre n'aurait jamais pu être envisagée autrement dans le cadre d'un stage de quelques mois.

L'aspect générique et la flexibilité de `Rheolef` m'ont incité à observer moi-même des règles strictes de méthode, et les différentes parties de l'implémentation présentées ici dans leur application à un cas particulier (cas particulier de la sortie de filière : forme de la surface libre, etc... et cas particulier par les choix de discrétisation) ont été néanmoins écrites avec le souci de la plus grande indépendance possible vis-à-vis de ce cas particulier, pour permettre une utilisation directe ou une adaptation aisée à d'autres cas. Voir le code de la classe `surfacelibre` en annexe A.

6.2 Choix de discrétisation

Le cadre de ce travail nous imposait des choix de simplicité pour tous les aspects qui n'étaient pas fondamentaux dans la méthode ALE. Nous avons donc retenu une discrétisation de type P_1 bulle – P_1 pour les champs de vitesse et pression ; une discrétisation P_1 pour la surface libre, qui n'est autre que le bord du maillage en volume.

6.3 Implémentation

On décrit ici la mise en œuvre des étapes décrites lors de la discrétisation en temps. Voir la seconde algorithmique, figure 4.2, page 45.

6.3.1 Méthode des caractéristiques appliquée à NS_τ

Restriction d'implémentation

Nous nous sommes restreints, dans le cadre de ce stage, aux cas physiques des nombres de Reynolds faibles, où les termes d'inertie sont négligeables. Cette hypothèse est assez peu restrictive quant au domaine d'application.

Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes se réduisent à celles de Stokes et il n'est plus nécessaire de leur appliquer la méthode des caractéristiques pour le terme $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$, trop lourde à mettre en œuvre dans le cadre de ce stage.

Résolution de la formulation ALE du problème de Stokes

Le problème est (NS_τ^m, page 41) avec $Re = 0$.

Nous avons utilisé la factorisation LDL^T et l'algorithme d'Uzawa fournis par `Rheolef`.

6.3.2 Calcul de la surface libre : $\varphi^{m+1}(z)$

Ce calcul est fait dans le cadre de la classe `surfacelibre`.

Il s'agit ici de calculer la position à l'instant $m+1$ de points de la surface libre discrète. La méthode est présentée en section 4.2.2.

Étant donné une altitude z quelconque en laquelle on désire connaître le rayon de l'écoulement à l'instant $m+1$, et les données locales[1] de la surface libre à l'instant m, la fonction `saumon` remonte le « courant » (la vitesse interpolée P_1 sur la surface) jusqu'à ce que l'intervalle de temps entre t^m et t^{m+1} soit épuisé, ou que le saumon rencontre un des bords de l'arête. Elle renvoie la position atteinte et l'éventuel temps restant ; ainsi que le déplacement selon $\vec{e}_r$ du point donné initialement pendant ce laps de temps.

Dans le cas d'une vitesse P_1, ces calculs se font de façon exacte par intégration de fractions rationnelles de degré 1.

6.3.3 Calcul du champ de vitesses de déformations : $\gamma^m(r, z)$

Ce calcul est fait dans le cadre de la classe `surfacelibre`.

Il s'agit ici, connaissant le déplacement réel de la surface entre t^m et t^{m+1}, d'en déduire un champ arbitraire de vitesses, qui, appliqué au domaine Ω^m entre t^m et t^{m+1}, donnera le même domaine Ω^{m+1} que les vitesse physiques.

γ^m a été défini comme solution du relèvement (R_γ, page 37), on a fait une approximation sur la condition limite de ce relèvement au paragraphe 4.2.2. Le relèvement est résolu par `Rheolef` par factorisation LDL^T.

6.3.4 Calcul de la tension superficielle

Ce calcul est fait dans le cadre de la classe `surfacelibre`, les matrices élémentaires des arêtes sont calculées par `surface_tension`.

[1] Arête à laquelle appartient le point d'altitude z de la surface.

Voir les paragraphes 1.2.1 et suivant.

6.3.5 Conditions d'arrêt

La définition d'un problème à surface libre stationnaire est évidente : il faut et suffit que la surface n'évolue plus, nous examinons donc la vitesse maximale de déformation (norme infinie de γ, qui par construction atteint son maximum sur la surface libre).

Notre problème étant couplé, pour éviter tout risque d'arrêt intempestif, nous vérifions également que le débit en sortie de domaine est le même que celui en entrée.

6.4 La classe `surfacelibre`

Cette classe regroupe les propriétés d'une surface libre au sein d'un code bidimensionnel de type ALE.

Actuellement, elle ne permet de gérer que des surfaces pouvant être décrites comme $\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix},\ r = \varphi(z)\}$, et dont les directions de déformation sont $\vec{e_r}$.

Cette classe dérive du patron `set` de la *Standard Template Library* instanciée pour des éléments appelés `flotteurs`.

Un `flotteur` est une structure de données correspondant à un point du maillage de la surface libre, enrichie de la donnée de la vitesse eulérienne en ce point et d'une autre structure de données, appelée `watcher`, qui sert à conserver certaines valeurs calculées pour éviter les calculs redondants. Les flotteurs doivent être dotés d'une relation d'ordre permettant de reconstituer la surface libre de façon ordonnée et d'avoir accès aux flotteurs voisins, ce qui n'est pas le cas en général dans un maillage. À terme cette relation d'ordre devrait être donnée par l'utilisateur, elle est actuellement codée par défaut comme l'ordre sur les coordonnées z.

On construit la `surfacelibre` par la donnée d'un maillage, d'une frontière de ce maillage (la frontière libre), d'un champ de vitesses physiques sur ce maillage. Il faut de plus indiquer le type de relation entre la frontière libre et les frontières qui lui sont voisines : dans notre cas, Γ_d est un voisin fixe alors que Γ_s est un voisin mobile, le point S de la figure 3.1 pouvant se déplacer selon $\vec{e_r}$.

L'accesseur `gamma`, qui prend en argument un intervalle de temps, lance le calcul du déplacement des points de la frontière libre. C'est lui qui appelle la routine `saumon` décrite au paragraphe 6.3.2. Il génère ainsi le champ de vitesse de déformation de la surface libre selon $\vec{e_r}$ et calcule le relèvement de celui-ci sur l'ensemble du domaine Ω, qu'il renvoie.

Les accesseurs `tension_x_z` pour un calcul plan ; `tension_r_z` et `tension_r_theta` pour un calcul axisymétrique[2] renvoient les champs de tension de surface pour un paramètre `sigma`, actuellement constant dans l'espace mais pouvant être envisagé comme une fonction.

[2] C'est le maillage sur lequel est construite la `surfacelibre` qui contient cette dernière information, contrôlée lors de l'accès aux routines.

6.5 Le programme `filiere`

Ce programme exploite les ressources de `rheolef` et de la classe `surfacelibre` dans notre cas d'exemple de la sortie de filière.

Une utilisation typique en est :

```
filiere filiere.geo rz -stretch -1 60 -aC 30 -G 0.01 -dt .1 -adapt 10
      -eps 1e-8 -out 5 -dir Resultats/
```

Le premier argument obligatoire est le nom d'un maillage au format `geo` de `rheolef`. C'est dans ce maillage qu'est indiqué si le calcul se fait en cartésien ou en axisymétrique.

Le deuxième, également obligatoire, décide d'un écoulement à symétrie plane (`cartesian`) ou axiale (`rz`).

L'option `-stretch` permet d'étirer la partie écoulement libre d'un maillage isotrope. Ainsi on obtient en aval des mailles étirées dans la direction moyenne de l'écoulement, ce qui permet de limiter leur nombre en regard de la taille du domaine.

Le paramètre `-aC` permet de spécifier le nombre sans dimension Ca^{-1}. On peut alternativement utiliser `-Ca` pour indiquer Ca.

Le paramètre `-G` permet de spécifier le nombre sans dimension G.

Le paramètre `-dt` permet de spécifier le pas de temps par défaut.

L'option `-adapt` autorise une adaptation du pas de temps au cours du calcul. Le pas de temps par défaut est alors pris comme pas de temps minimal, et la valeur de `-adapt` comme pas de temps maximal.

Le paramètre `-eps` indique la précision à atteindre pour la condition d'arrêt.

L'option `-out` permet d'indiquer à quels pas de temps les résultats doivent être sauvegardés dans le répertoire `-dir` pour le posttraitement.

Chapitre 7

Expérimentations numériques

Le code obtenu est bien sûr restreint dans ses applications par les hypothèses faites dans les chapitres précédents, à savoir que la surface libre est définie par sa distance à l'axe des z, distance qui doit être bornée inférieurement.

Cela nous laisse néanmoins suffisamment de latitude pour mener des expériences variées sur la méthode. La possibilité de calculs aussi bien en symétrie plane qu'axiale est particulièrement intéressante, car la physique de ces deux cas est radicalement différente du fait de la tension de surface, qui est justement un des objets-clés de notre étude, et qui passe d'un rôle de stabilisation dans la cas plan à un rôle prépondérant et déstabilisant dans le cas axisymétrique.

On a ici présenté séparément les résultats de ces deux cas, tant ils sont difficiles à mettre en parallèle, les ordres de grandeur et comportements qualitatifs étant radicalement modifiés dans le passage de l'un à l'autre.

Soucieux de conserver un lien fort avec la physique d'écoulements réels, nous avons cherché des valeurs de paramètres de tension de surface, viscosité et densité de fluides newtoniens. Nous avons opté pour le miel de trèfle parmi les quelques fluides pour lesquels nous avons trouvés des caractéristiques fiables [Airborne]. Des tests comparés pour des valeurs variables des paramètres auraient été intéressants, mais le temps (humain et machine) dont nous disposions ne le permettait pas.

Mais avant d'observer le comportement de cas réalistes, il est utile de bien cerner les possibilités de la méthode telle qu'implémentée ici.

7.1 Robustesse et très faible diffusivité

Une des qualités recherchées pour ce code est la robustesse à toutes les évolutions possibles de la forme du domaine, dans les limites de conservation de la topologie que nous nous étions fixées.

Les résultats obtenus de ce point de vue sont ici très satisfaisants : la méthode ALE permet de suivre des changements radicaux dans la forme du domaine, sans nécessiter le moindre remaillage.

Toujours au chapitre des avantages purement numériques que l'on constate, la très faible diffusivité du code dans le calcul de la surface libre. Cela peut par exemple être

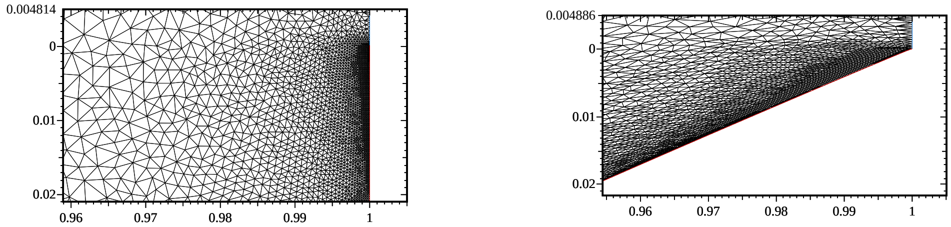


FIG. 7.1 – Une méthode robuste : Profil autour du point de sortie de filière, initial à gauche et après la première itération à droite d'un calcul de sortie de filière axisymétrique.

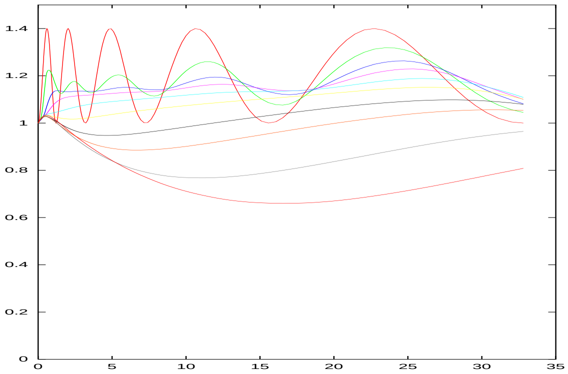


FIG. 7.2 – Une méthode robuste : Évolution de la surface libre initialement très perturbée, obtenue par un calcul sans remaillage, sur une sortie de filière dans le cas plan.

observé en superposant une perturbation sur le maillage initial, et en prenant une tension de surface nulle, comme cela a été fait en figure 7.3. On se souvient effectivement qu'il n'y a aucune interpolation de la position de celle-ci.

De plus, toujours sur la même figure, on constate que les pas de temps peuvent être très importants : c'est en effet le propre des méthodes de type remontée des caractéritiques que de *ne pas être soumises à une CFL. Dans notre cas, à chaque pas de temps, le sommet de la perturbation traverse vingt mailles environ ; et un raffinement de maillage ne nous contraindrait en aucun cas à réduire le pas de temps.*[1]

7.2 Simulations d'écoulements plans

C'est le cas d'une filière possédant une sortie en forme de fente, de largeur faible en regard de sa longueur. Ce type de filière est utilisée industriellement pour la fabrication de films (pour emballages par exemple). C'est un problème assez classique, connu sous le nom de gonflement en sortie de filière.[2]

[1]Sauf bien sûr si l'on désire avoir une grande précision non sur une solution stationnaire mais sur chaque pas de temps.

[2]En anglais « *die-swell.* »

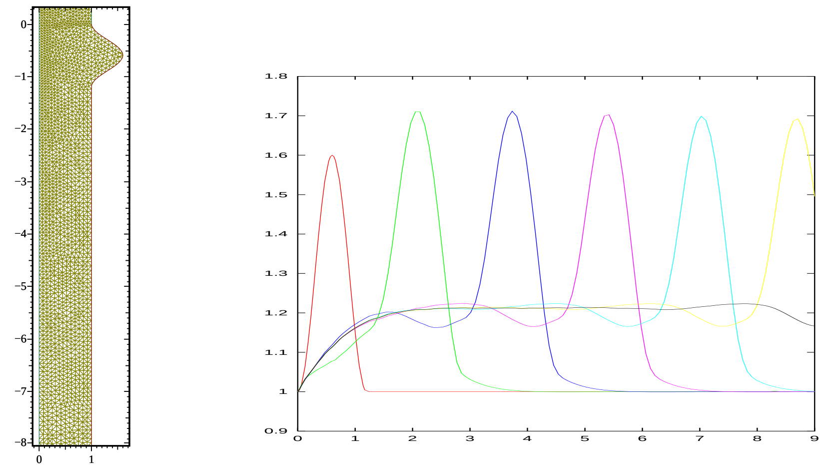


FIG. 7.3 – Une méthode très peu diffusive. On a ici superposé la surface libre calculée de *toutes* les itérations d'un calcul sur la configuration initiale montrée à gauche.

On a mené des expériences avec différentes valeurs des constantes de capillarité et de gravité, en faisant également varier le débit d'entrée et obtenu des résultats qualitativement satisfaisants, quelle que soit la forme initiale du domaine imposée.

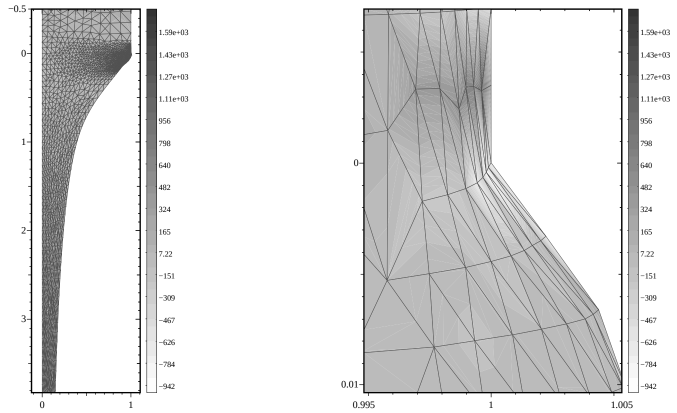


FIG. 7.4 – La singularité de pression au point de sortie (ici accompagnée d'un gonflement) et le raffinement de maillage.

Les principaux caractères d'un tel écoulement, selon les paramètres et le temps écoulé, sont :

– Dans le tube de la filière[3] se maintient le profil de type Poiseuille forcé en entrée,

[3]En général, on a procédé à des calculs avec une filière simplifie en un tube droit, la configuration complète ne posant pas de problèmes qui soient centraux dans cette étude. Certains cas ont cependant été calculés avec la filière anguleuse de la figure 3.1, pour s'assurer que tout se passait similairement bien.

avec le gradient vertical de pression correspondant.

- À la sortie du tube, on a toujours pour la pression une singularité de type dipôle, due au changement de condition-limite en ce point, conformément aux résultats théoriques de [Grisvard]. On peut voir en figure 7.4 le champ de pression et le raffinement de maillage qu'il impose pour prévenir une éventuelle propagation d'erreur.
- Toujours à la sortie du tube, il y a deux formes possibles pour l'écoulement : soit un resserrement parfois extrêmement brusque en filet fin, comme les filets de miel que l'on voit s'écoulant d'une cuiller quand il n'y a pas de rupture ; soit un gonflement lorsque la pression de l'écoulement amont, qui tend à chasser le fluide dans toutes les directions à la sortie l'emportent sur la gravité qui tend à l'accélèrer le long de l'axe.
- Plus loin, on a toujours le comportement de type « filet » accéléré par la gravité, donc de plus en plus fin (en régime établi on doit en effet avoir le même débit en tout z). Lorsqu'on annule le nombre de gravité, au contraire, l'écoulement s'établit en écoulement solide à partir du maximum de gonflement.

Dans le cas plan, l'écoulement est toujours stable, et on a vu à propos de la robustesse combien l'absorption d'une perturbation se faisait rapidement.

7.2.1 Une comparaison quantitative

Le cas d'un nombre de gravité G nul est celui du gonflement de sortie de filière et nous disposions de données d'une simulation de 1990 dans un article de [Cuvelier].

TAB. 7.1 – Comparaison du gonflement calculé dans [Cuvelier] et de nos résultats.

	Résultats Cuvelier $Re = 1$	Nos résultats Re négligé
Condition d'arrêt	10^{-3}	10^{-8}
Taille de maillage	300	10000
$Ca^{-1} = 10^{-3}$	$\beta = 1,1917$	$\beta = 1,1900$
$Ca^{-1} = 0,4$	$\beta = 1,1688$	$\beta = 1,1886$
$Ca^{-1} = 3,7$	$\beta = 1,0750$	$\beta = 1,1778$

Une confrontation de nos résultats avec des données expérimetales ou de simulation reste donc à faire, particulièrement pour les fortes tension de surface.

Notons que le calcul de la force de tension de surface a pu être validé indépendamment du reste du code, sur des géométries permettant un calcul analytique de celle-ci (cercle, exponentielle...)

7.2.2 Condition d'arrêt et résultats de convergence

Puisque la surface libre est la source de l'instationnarité, il est logique d'arrêter le calcul quand la surface libre n'évolue plus. Dans notre cas elle est même la seule source d'instationnarité – puisqu'on a négligé le nombre de Reynolds. Il suffit donc de considérer

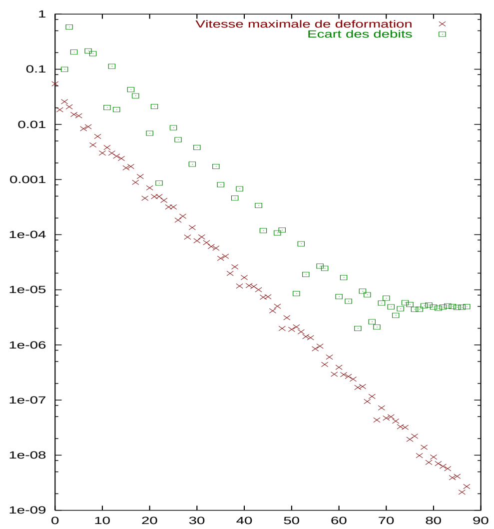


FIG. 7.5 – Convergence au cours des itérations pour un écoulement plan de miel de trèfle dans une filière plane d'écartement 1 mm, $G = 15$, $Ca^{-1} = 10$. $Re < 0,002$ est négligé.

le maximum sa vitesse, qui est $\left\| \overrightarrow{\gamma}|_{\Gamma_l^t} \right\|_\infty$. On a en figure 7.5 la loi de convergence de cette quantité.

On a également observé la différence entre débit d'entrée et débit de sortie au cours du temps, qui donne également une indication de convergence. On constate qu'un palier est atteint à 10^{-5}, qu'on explique par la méthode d'Uzawa employée pour résoudre Stokes, à laquelle on a imposé une précision de 10^{-7} sur la divergence : cette erreur de divergence s'accumule à travers le maillage entre l'entrée et la sortie.

7.3 Simulations d'écoulements axisymétriques

On a déjà mentionné que les écoulements axisymétriques étaient instables par nature. Une première conséquence est que ces écoulements sont toujours instationnaires, et on n'aura pas de résultats de convergence similaires à ceux du cas plan.

7.3.1 Condition de sortie libre

La condition de sortie retenue initialement était la condition de sortie libre, qui revient à supposer la continuité de l'écoulement en aval, donc le fluide y est par hypothèse un filet infini accéléré par la gravité, puisque telle est sa forme sur Γ_s.

On observe ici les résultats obtenus avec cette condition.

Mécanisme de la rupture

Notre code étant prévu pour des écoulements sans changement de topologie, nous nous intéressons ici aux différents états transitoires rencontrés. La figure 7.6 présente les

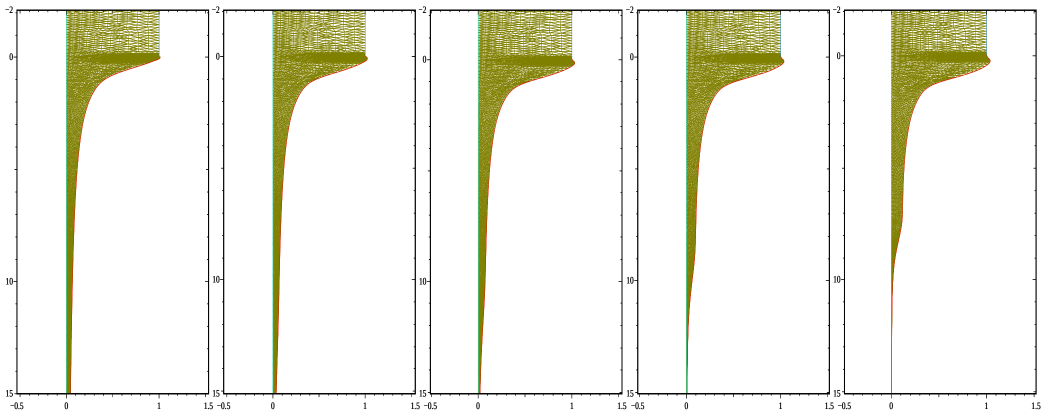


FIG. 7.6 – Évolution d'un écoulement axisymétrique de miel de trèfle. Les itérations représentées ici sont les itérations 9, 20, 25, 30 et 35. (Noter que les échelles en r et z sont différentes.)
1 – Filet de fluide très accéléré par la pesanteur ;
2 et 3 – Amplification progressive du gonflement en sortie de filière, prémice de la formation d'une goutte : noter le gonflement au point de sortie de filière ;
4 – Le phénomène de rupture est amorcé : on voit la partie du filet qui va remonter former la goutte et un « fil de rupture » en-dessous. Entre, on observe une zone intermédiaire – correspondant au « bourrelet » du phénomène physique.
5 – La rupture est presque consommée, avec une zone intermédiaire petite et un fil de diamètre extrêmement faible ; là s'arrête la compétence de notre code.

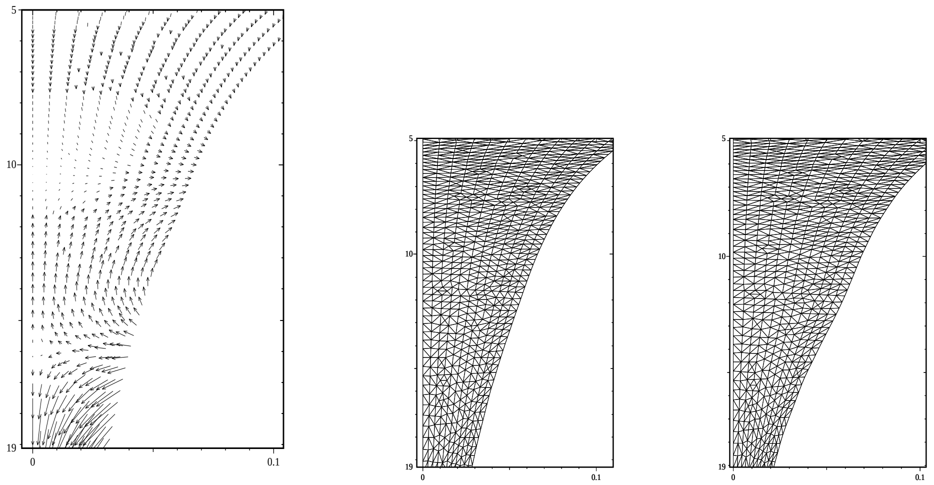


FIG. 7.7 – Détail du mécanisme de rupture : champ de vitesse à l'origine du phénomène, à l'itération 14, maillage à cette itération et à l'itération 19.

différentes étapes avant la rupture : on assiste en fait au début de la division du filet en deux parties – ce que les physiciens appellent *décoalescence*, [Chevalier] – l'une rattachée à la filière, qui tend à former une goutte, et l'autre se séparant – mais nous devons nous arrêter avant la séparation, par hypothèse sur la forme de notre écoulement.

De plus, la partie séparée en aval est « aspirée » par la condition de sortie libre : le filet censé être en aval est uniformément accéléré, il est donc toujours plus fin (puisque le débit du filet doit être le même en toute section) et plus rapide.

On note d'autre part la présence d'un « fil de rupture, » c'est-à-dire qu'avant de rompre, l'écoulement semble d'abord former un fil extrêmement fin entre les deux parties. Cela peut correspondre à un aspect du phénomène connu de la décoalescence, où l'on n'aurait simplement que la partie haute. Des expérimentations numériques et une étude plus approfondie seraient toutefois nécessaires avant d'affirmer que c'est bien ce phénomène physique qui apparaît dans nos simulations, et non un phénomène purement numérique.

Causes de la rupture

Les références dont on dispose donnent des résultats classiques sur la rupture des jets par étude de leur stabilité, en superposant une petite perturbation à un écoulement moyen supposé ; on montre alors qu'elle sera amplifiée [Crane]. Nous n'avons pas trouvé d'étude appuyée sur des résultats du type de celui que nous montrons ici.

Cependant on peut risquer une interprétation simple du phénomène.

On a vu que la tension de surface augmentait en raison de $\frac{1}{r}$ pour une surface à peu près parallèle à l'axe, telle qu'est la nôtre avant la rupture. Cette force est ici essentiellement axiale.

On comprend que, le filet s'amincissant d'instant en instant, il arrive un moment où la tension de surface d'une portion du filet en aval (qui est plus fin qu'en amont), pour $z > z_c$, sera telle qu'une partie de ce fluide, malgré la pesanteur, aura tendance à échapper à cette tension vers le haut, c'est-à-dire à remonter vers la partie gonflée en sortie de filière, où la tension de surface est moindre.

7.3.2 Écoulement d'une filière vers une plaque plane

Pour observer des filets d'écoulement ressemblant plus à ceux dont on a l'expérience quotidienne, nous avons testé une condition simple de sortie bloquée en Γ_s : nous imposons un glissement parfait sur une frontière sensée se trouver en Γ_s, comme si par exemple le filet de miel aboutissait dans le pot de miel. Notre but n'est pas ici d'étudier le fluide qui s'y amoncelle ni son recollement à cette frontière – la condition de glissement n'étant de toute façon pas réaliste physiquement – mais d'observer les effets du blocage sur l'écoulement en amont. On constate en effet sur la figure 7.8 que, les vitesses étant moindres en aval, la goutte se forme alors que le filet a un rayon plus important que le rayon critique observé dans le cas précédent. Elle finit par se détacher de la filière sous la forme d'un renflement qui « tombe » le long du filet.

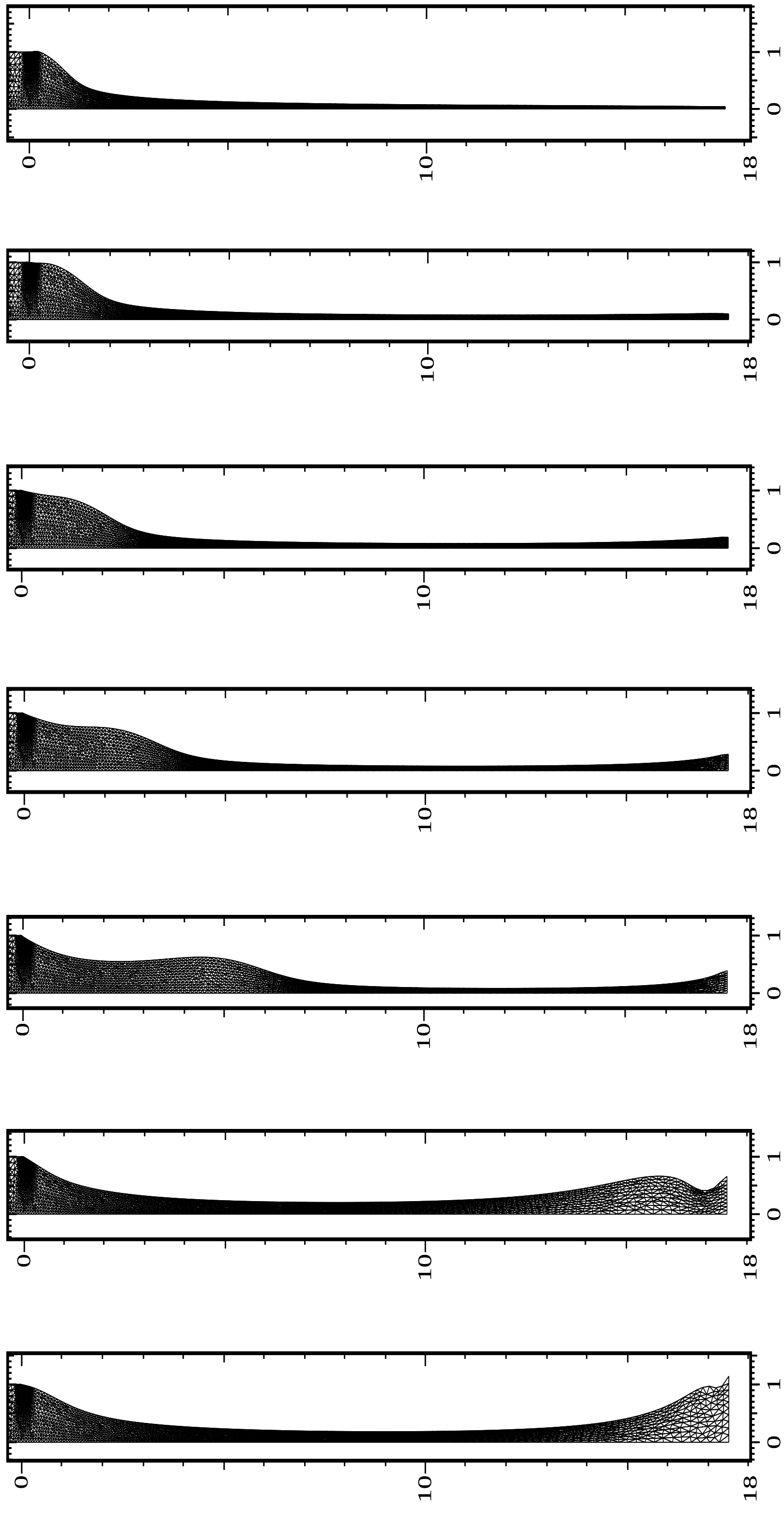


FIG. 7.8 – Évolution (de haut en bas) d'un écoulement axisymétrique de miel de trèfle avec glissement parfait sur la surface de réception, présenté à intervalles réguliers sur 0,2 seconde. On voit un renflement se former et se « détacher » rapidement de la sortie de filière, il « tombe » le long du filet sans que celui-ci ne rompe.

7.4 Limites de l'implémentation et solutions alternatives

7.4.1 Extension aux nombres de Reynolds non négligeables

L'hypothèse d'une valeur négligeable pour $\mathcal{R}e$ est très certainement l'hypothèse la plus restrictive que nous ayons faite. Elle nous a permis d'éviter un calcul de pied de caractéristique en dimension 2 lors de l'implémentation. Cependant nous avons fait l'étude théorique dans le cas général, rien ne s'oppose à l'extension du code dans cette direction.

7.4.2 Changements de topologie

La méthode ALE n'a pas pour objectif de simuler les changements de topologie. Cependant, dans notre cas particulier, il serait intéressant de pouvoir poursuivre le calcul après une rupture du jet, avec la seule partie restant en contact avec la sortie de filière. De même, notre code n'est pas capable de démarrer avec une condition physiquement naturelle, qui est l'absence de filet et sa formation progressive par le fluide sortant de la filière. Une telle extension semble possible au vu de [Maury] et de notre expérience.

7.4.3 Une alternative implémentée pour le relèvement

On a défini page 37 un problème aux limites (R_γ) qui pour une vitesse de déplacement donnée à la frontière libre nous donne un champ suffisamment régulier sur le domaine entier ; et avec lequel on procède au déplacement du maillage pour un pas de temps donné.

Cependant nous n'avons pas de garantie que ce déplacement des points du maillage soit acceptable (i.e. qu'il n'y ait pas de retournement de maille), et dans certains cas il ne l'est pas.

Évolution rapide du rayon

Par exemple, si le rayon du filet diminue très rapidement, on aura à la frontière libre une forte vitesse selon $-\vec{e}_r$, et le pas de temps devra être petit pour empêcher un retournement de maillage à travers l'axe de symétrie. Cela est cependant facilement contrôlable lors de l'advection du maillage, et on peut alors réduire le pas de temps.

On observera par ailleurs que le relèvement (R_γ) n'est pas un laplacien dans le cas axisymétrique, en effet un tel relèvement donnerait de trop fortes variations de γ au voisinage de l'axe.

Courbures extrêmes

Dans le cas de fortes courbures de la surface libre, et particulièrement dans le cas axisymétrique. Le problème apparaît alors aux points minima locaux du rayon du filet, au voisinage desquels la diminution de γ est très rapide. En effet notre relèvement régularise

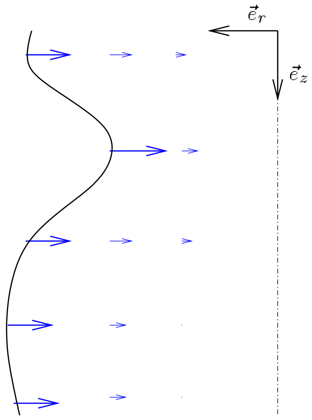


FIG. 7.9 – Champ de déplacement calculé par le relèvement (R_γ) dans le cas de fortes courbures en surface

le champ dans la direction $\vec{e}_r$ mais aussi $\vec{e}_z$, ce qui tend en ces points à donner une valeur faible, comme le montre la figure 7.9. Dans ces cas nous avons eu recours à un relèvement (R'_γ) :

$$(\mathrm{R}'_\gamma)\left\{\begin{array}{rcll}\dfrac{\partial^2\gamma(\mathbf{x},t)}{\partial r^2} & = & 0 & \text{dans } \Omega^t\\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & \gamma_\ell(\mathbf{x},t) & \text{sur } \Gamma_\ell^t\\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_d\\ \gamma(\mathbf{x},t) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_a\end{array}\right.$$

Ce relèvement présente une robustesse accrue dans le cas des courbures extrêmes. Cependant il peut générer des mailles très cisaillées, puisque le déplacement à z donné n'est pas directement dépendant de celui aux points de coordonnée z voisine, c'est pourquoi (R_γ) lui est préférable dans le cas général.

Conclusion

Le premier accomplissement notable de ce stage est la démonstration de la faisabilité de la méthode ALE : sa complexité apparente n'est donc pas un obstacle, puisqu'en un temps limité nous avons pu en faire une étude détaillée et une application pratique dans une gamme particulière de cas, pour lesquels nous obtenons des résultats intéressants.

Au-delà, cette étude montre que la méthode, telle que présentée et implémentée ici possède plusieurs atouts pratiques :

- Sa précision dans la description de la surface libre est effective, il est aisé avec une telle représentation de calculer et d'appliquer la force de tension de surface ;
- Son surcoût très raisonnable par rapport à une résolution de problème à frontière fixe – on a constaté que dans le pire des cas, les trois quart du temps machine employé correspondaient à la résolution du problème de Stokes ;
- Sa robustesse extrême quant aux configurations du domaine acceptable. Nous atteignons en effet les limites de notre modèle sans que la méthode numérique ne soit prise en défaut, ce qui est prometteur quant aux possibilités d'extensions des cas traités.

Ce travail met ainsi en lumière des directions de travail à la fois enthousiasmantes et réalistes : ne plus négliger le nombre de Reynolds, étendre les configurations possibles pour le domaine, et enfin pouvoir gérer l'évolution du jet ultérieure à la rupture.

Annexe A

Code source de la classe `surfacelibre`

Cette classe est décrite point par point au chapitre 6, elle permet de gérer des surfaces libres dans le cas général, sous réserve de petites adaptations (comme par exemple de la relation d'ordre « amont-aval », ici basée sur la coordonnée z uniquement).

Nous l'incluons pour montrer le point de vue générique et adaptable adopté lors du développement.

Interface de la classe

```
// Fichier surfacelibre.h
// Cree le 19 avril 2001
// Auteur J. Etienne

#include "rheolef/rheolef.h"
#include<set>

// structure inclue dans chaque flotteur.
struct watcher
        {
        // si un ouvreur est passe', met suiveur a' 1 et garde son chrono.
        int     suiveur;
        Float   ouvreur_t;
        Float   ouvreur_dr;
        };

// element de base d'une surface libre -- correspond a un point de discretisation.
struct flotteur
        {
        geo::size_type  s;
        point   x;
        Float   ur,uz;

        watcher* w;
        };

// relation d'ordre amont-aval sur la surface libre.
int operator< (const flotteur& fl1, const flotteur& fl2);
```

```
class surfacelibre : set<flotteur,less<flotteur>,allocator<flotteur> >
        {
        space Wh;               // espace de gamma vitesse de deformation arb du dom
        space V_libre_h;        // espace de phi description de la surface
        field phi;
        Float the_shear_time;
        Float the_maximum_velocity;

        int saumon (Float& z, Float& t, Float& dr
            , const flotteur& fl0
            , const flotteur& fl1);

        field tension_xr_z (Float sigma);

public:
        // CONSTRUCTEURS

        surfacelibre (const domain& fr_libre, const geo& omega, const field& v,
                        const domain& voisin );
                // la surface libre est en l'instant courant fr_lib \in \partial omega
                // v est le champ P1 de vitesse sur omega.
                // TO DO : generalisation de voisin (fonctions d'apport d'infomation:
                // passage d'un domain en mode "cutaway" et possibilite de condition
                // de symetrie sur la normale plutot que de continuite).


        // CALCULS ET
        // ACCESSEURS

        field gamma (Float delta_t, int special);
                // renvoie le champ P1 arbitraire de vitesses de d'eformations sur omega
                // au temps courant pour un pas de temps delta_t.

                // indicateurs d'evolution
                // de la surface.
        Float shear_time(); // indicateur de cisaillement en 1/s
        Float maximum_velocity(); // norme sup de gamma sur la surface

// indicateurs de position
                // de la surface.
        Float beta(); // coordonnee r de S(t) dans le cas filiere.
        Float phimax(); // sup |phi(z)|

        // calculs de tension de surface

        field tension_x_z (Float sigma);  // cas plan

        field tension_r_z (Float sigma);        // cas axi
        field tension_r_theta (Float sigma); // cas axi

        };
```

Implémentation de la classe

```
// Fichier surfacelibre.c
// Cree le 19 avril 2001
// Auteur J. Etienne

#include "compiler.h"
#include "surface.h"
#include "surface_tension.h"
#include<set>
#include<functional>
#include<memory>
#include<iterator>

#define EPSILON 0.000001
#define TRACE_LEVEL 1

int operator< (const flotteur& fl1, const flotteur& fl2)
        {
        return fl1.x[1]>fl2.x[1];
        }

surfacelibre::surfacelibre
(const domain& fr_libre, const geo& omega, const field& v,const domain& voisin)
        : set<flotteur,less<flotteur>,allocator<flotteur> > (),
          Wh (omega, "P1"),
          V_libre_h (omega, fr_libre, "P1"),
          phi (V_libre_h),
          the_shear_time (-1),
          the_maximum_velocity (-1)
{
  for (geo::size_type i=0 ; i != omega.n_domain() ; i++)
        if (omega.get_domain(i).name()!=voisin.name())
                {
                Wh.block(omega.get_domain(i));
                }

  geo::const_iterator_node      sommets = omega.begin_node();
  domain::const_iterator        last = fr_libre.end();
  field::size_type first_vr = v.get_space().start(0);
  field::size_type first_vz = v.get_space().start(1);

  for (domain::const_iterator q = fr_libre.begin(); q!=last; q++)
        {
        const geo_element& s = *q;
        domain::size_type s0 = s[0];
        domain::size_type s1 = s[1];

        flotteur fl;
        fl.s=s0;
```

```
        fl.x=sommets[s0];
        fl.ur=v.at(first_vr+s0);
        fl.uz=v.at(first_vz+s0);
        fl.w=new watcher;
        fl.w->suiveur=0;
        insert(fl);
        fl.s=s1;
        fl.x=sommets[s1];
        fl.ur=v.at(first_vr+s1);
        fl.uz=v.at(first_vz+s1);
        fl.w=new watcher;
        fl.w->suiveur=0;
        insert(fl);

        // on construit aussi phi, ici :
        phi.at(V_libre_h.domain_dof(s0))=sommets[s0][0];
        phi.at(V_libre_h.domain_dof(s1))=sommets[s1][0];
        }

} // surfacelibre ( domain, geo, field )

field
surfacelibre::gamma (Float delta_t, int special)
{
        field g(Wh);

        reverse_iterator first = rbegin();
        reverse_iterator last  = rend();

        the_maximum_velocity = -1;
        the_shear_time       = -1;

        // mise a zero des frontieres fixes (et aussi de la sortie, mais elle n'est pas bloquee)
        for (geo::size_type i=0 ; i != g.get_geo().n_domain() ; i++)
                if ( g.get_geo().get_domain(i).name()!=V_libre_h.get_boundary_domain().name() )
                        {
                        g[g.get_geo().get_domain(i)]=0;
                        }

        // etablir la nouvelle frontiere a t+delta_t et le champ gamma associe a t.
        for (reverse_iterator qi = first; qi !=last ; qi++ )
                {
                const flotteur& fl = (*qi);

                reverse_iterator p = qi;
                reverse_iterator q = qi;
                p++;

                Float tt=delta_t;       //
                Float z=(*qi).x[1];    // saumon dispose de tt secondes au d'epart de z1.
                Float dr=0;             // pour le calcul du <<d'enivel'e>> en rayon.

                int go_on=1;
```

```
            if (p!=last)
            {
            while((tt>0) && go_on)
                    {
                    trace_mac(4,"Appel saumon " << z << " t="<<tt<< (*p).x << (*q).x );
                    go_on=saumon(z,tt,dr,(*p),(*q));
                    if (go_on==1)
                            {
                            q++; p++;
                            if (p==last)
                            { go_on=0; q--; p--; }
                            }
                    if (go_on==-1)
                            if (q!=first)
                            { q--; p--; }
                            else
                            go_on=0;
                    } ;

            dr += (  (*p).x[0] * ((*q).x[1]-z)
                    +(*q).x[0] * (z-(*p).x[1]) )/( (*q).x[1] - (*p).x[1] );
            }
            else dr=(*qi).x[0];

            g.at(fl.s) = (dr - phi.at(V_libre_h.domain_dof(fl.s)) )/delta_t;

            the_maximum_velocity = max(fabs(g.at(fl.s)), the_maximum_velocity);

            p = qi;
            if (p!=first)
                    {
                    p--;
                    the_shear_time =
                    max(fabs((g.at((*qi).s)-g.at((*p).s))
                             / ( (*qi).x[1]-(*p).x[1] )),
                        the_shear_time);
                    }
            }

        // relevement...
        form a_gamma;
        if (special)     a_gamma = form(Wh,Wh,"dx0_dx0");
        else             a_gamma = form(Wh,Wh,"grad_grad");
        ssk<Float> fact_gamma = ldlt(a_gamma.uu);
        g.u = -fact_gamma.solve(a_gamma.ub*g.b);

        return g;
} // gamma()

int
surfacelibre::saumon ( Float& z, Float& t, Float& dr
                     ,  const flotteur& fl0
```

```
                     ,  const flotteur& fl1 )
// remonte le courant sur la surface libre jusqu'a' une extremite de l'arete
// ou jusqu'a' 'epuisement du temps t.
{
  // si les calculs ont deja ete faits :
  if (fl1.w->suiveur && (t>=fl1.w->ouvreur_t) && (z==fl1.x[1]))
        {
trace_mac(3,"Saumon suiveur");

        z=fl0.x[1];
        t-=fl1.w->ouvreur_t;
        dr+=fl1.w->ouvreur_dr;
        return(1);
        }
  else
  {
trace_mac(3,"Saumon inovateur");
  int dir = 0;

  Float z0=fl0.x[1];
  Float z1=fl1.x[1];
  Float za;
  Float ta;

  Float ur0=fl0.ur;
  Float uz0=fl0.uz;
  Float ur1=fl1.ur;
  Float uz1=fl1.uz;

  Float dr_loc = numeric_limits<Float>::min();

  assert(z1<z0);
  assert(z1<=z);
  assert(z<=z0);

  if (uz1==uz0)
        {
        za = z - uz0*t ;        // premier jet: peut sortir de l'arete

        ta = (z0<za)    ? t-(z-z0)/uz0          // sorti au-dessus
           : (za<z1)    ? t-(z-z1)/uz0          // sorti en-dessous
                        : 0;                    // pas sorti.
        dir= (z0<za)    ? 1                     // sorti au-dessus
           : (za<z1)    ? -1                    // sorti en-dessous
                        : 0;                    // pas sorti.
        za = (z0<za)    ? z0
           : (za<z1)    ? z1                    // id
                        : za;
        if (uz0==0)             // le deplacement lateral est celui du point
                                // ou se trouve le saumon immobile
                dr_loc = (ur0*(z1-z)+ur1*(z-z0))/(z1-z0) * t;

        else                    // calcul int(za,z, ur/uz dz)
```

```
                dr_loc = (  (ur1-ur0)*(z*z-za*za)/2. + (ur0*z1-ur1*z0)*(z-za)  ) / uz0 / (z1-z0) ;

        if ((za==z0) && (z==z1))
// quand on traverse de part en part vers le haut on conserve le resultat.
                {
                fl1.w->suiveur   = 1;
                fl1.w->ouvreur_t = t-ta;
                fl1.w->ouvreur_dr= dr_loc;
                trace_mac(3,"  > leader="  << fl1.s << "(z,t) " << z << ", " << t << ", dr=" << dr );
                }

        }
  else
        {
        // resultat d'une eq diff d'ordre 1:   dz/dt  =  z/tau  -  zm/tau
        Float zm = ( uz1*z0 - uz0*z1 ) / (uz1-uz0);
        Float tau= ( z1-z0 ) / ( uz1-uz0 );

        Float uzz= ( uz0*(z1-z) + uz1*(z-z0) ) / (z1-z0);       // vitesse uz en z.

        if (uzz==0)
        { za=z; ta=0; dr_loc=(ur0*(z1-z)+ur1*(z-z0))/(z1-z0) * t;}
        else
        {
        za = uzz*tau*exp(-t/tau)+zm;
        ta = 0;
        // sort-on de l'arete dans l'intervale de temps ?
        if ( z0<za )
                {
                za=z0;
                ta=t+tau*log( (z0-zm)/uzz/tau );
                dir = 1;
                }
        if ( za<z1 )
                {
                za=z1;
                ta=t+tau*log( (z1-zm)/uzz/tau );
                dir = -1;
                }

        Float uza= ( uz0*(z1-za) + uz1*(za-z0) ) / (z1-z0);

        if(uza==0)
error_macro("uza==0 " << z0 << " za="<<za<<" "<<z1<<" entre uz0="<<uz0<<" uz1="<<uz1);
        dr_loc += (ur1-ur0)/(uz1-uz0)*(z-za)
                - (ur1*uz0-ur0*uz1)*(z1-z0)/(uz1-uz0)/(uz1-uz0)
                  *log( uzz / uza );

        if ((za==z0) && (z==z1) && (uz0!=0))
                {
                fl1.w->suiveur   = 1;
                fl1.w->ouvreur_t = t-ta;
                fl1.w->ouvreur_dr= dr_loc;
```

```
                }

        }
        }

  dr+=dr_loc;

  z=za;
  t=ta;
  return(dir);
}
} // saumon( ... )

Float surfacelibre::maximum_velocity()
{
        if (the_maximum_velocity==-1)
                error_macro("Deformation not computed yet -- use surfacelibre::gamma first.")
        else
                return the_maximum_velocity;
}

Float surfacelibre::shear_time()
{
        if (the_shear_time==-1)
                error_macro("Deformation not computed yet -- use surfacelibre::gamma first.")
        else
                return the_shear_time;
}


Float surfacelibre::beta()
{
        return fabs(phi.at(V_libre_h.domain_dof((*rbegin()).s)))-1.;
}

Float surfacelibre::phimax()
{
        Float maxi =0;
        const_reverse_iterator last=rend();
        for (reverse_iterator qi = rbegin(); qi !=last ; qi++ )
                maxi = max(maxi,fabs(phi.at(V_libre_h.domain_dof((*qi).s)) ));
        return maxi;
}

field surfacelibre::tension_xr_z (Float sigma)
// tension superficielle dans le plan du calcul, que ce soit en cartesien ou en axi.
{
        space VT_libre_h = V_libre_h * V_libre_h;
        field::size_type first_Tr = VT_libre_h.start(0);
        field::size_type first_Tz = VT_libre_h.start(1);

        field T (VT_libre_h,0);
```

```
        const_reverse_iterator first = rbegin();
        const_reverse_iterator last  = rend();

        for (const_reverse_iterator qi = first; qi !=last ; qi++ )
        {
                const_reverse_iterator q = qi;
                const_reverse_iterator p = qi;
                p++;
                if (p!=last)
                {
                vec<Float> me = local_surface_tension ((*p).x,(*q).x);
                vec<Float>::const_iterator my = me.begin();
                T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*q).s))-= sigma*my[0];
                T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*q).s))-= sigma*my[1];
                T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*p).s))-= sigma*my[2];
                T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*p).s))-= sigma*my[3];
                }
        }

        // C2 continuity hypothesis on free surface
        Float x1,x2,y1,y2;
        first=rbegin();
    x2 = T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*first).s))/sigma;
    y2 = T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*first).s))/sigma;
        first++;
    x1 = x2 + T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*first).s))/sigma;
    y1 = y2 + T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*first).s))/sigma;
        // for the imaginary past-end tangent t3, the condition
// writes t3.t2=t2.t1 and t3 x t2 = t2 x t1
        // which yields :
    T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*rbegin()).s))-= sigma*( x1*(x2*x2-y2*y2) + 2*x2*y1*y2 );
    T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*rbegin()).s))-= sigma*( y1*(y2*y2-x2*x2) + 2*y2*x1*x2 );

        // doing the same at the other end
        const_iterator tsrif=begin();
    x2 = T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s))/sigma;
    y2 = T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s))/sigma;
        tsrif++;
    x1 = x2 + T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s))/sigma;
    y1 = y2 + T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s))/sigma;
        // for the imaginary past-end tangent t3, the condition
// writes t3.t2=t2.t1 and t3 x t2 = t2 x t1
        // which yields :
    T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*begin()).s))-=sigma*( x1*(x2*x2-y2*y2) + 2*x2*y1*y2 );
    T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*begin()).s))-=sigma*( y1*(y2*y2-x2*x2) + 2*y2*x1*x2 );

        return T;
}

field surfacelibre::tension_x_z (Float sigma)
// tension superficielle dans le cas plan.
{
        if ( strcmp(Wh.get_geo().coordinate_system().c_str(),"cartesian") )
```

```
                error_macro("Wrong coordinate system " <<  Wh.get_geo().coordinate_system() );
        return tension_xr_z (sigma);
}

field surfacelibre::tension_r_z (Float sigma)
// tension superficielle dans le cas axisymetrique : premier rayon de courbure.
{
        if ( strcmp(Wh.get_geo().coordinate_system().c_str(),"rz") )
                error_macro("Wrong coordinate system " <<  Wh.get_geo().coordinate_system() );
        return tension_xr_z (sigma);
}

field surfacelibre::tension_r_theta (Float sigma)
// tension superficielle dans le cas axisymetrique : second rayon de courbure.
{
        if ( strcmp(Wh.get_geo().coordinate_system().c_str(),"rz") )
                error_macro("Wrong coordinate system " <<  Wh.get_geo().coordinate_system() );

        space VT_libre_h = V_libre_h * V_libre_h;
        field::size_type first_Tr = VT_libre_h.start(0);
        field::size_type first_Tz = VT_libre_h.start(1);

        field T (VT_libre_h,0);

        const_reverse_iterator first = rbegin();
        const_reverse_iterator last  = rend();

        for (const_reverse_iterator qi = first; qi !=last ; qi++ )
        {
                const_reverse_iterator q = qi;
                const_reverse_iterator p = qi;
                p++;
                if (p!=last)
                {
                vec<Float> me = local_surface_tension ((*p).x,(*q).x);
                vec<Float>::const_iterator my = me.begin();
                T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*q).s))-= my[1]/2;
                T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*q).s))+= my[0]/2;
                T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*p).s))+= my[3]/2;
                T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*p).s))-= my[2]/2;
                }
        }

        first++;
    T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*rbegin()).s))=T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*first).s));
    T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*rbegin()).s))=T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*first).s));

        const_iterator tsrif = begin();
        tsrif++;
    T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*begin()).s))=T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s));
    T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*begin()).s))=T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*tsrif).s));

        for (const_reverse_iterator qi = rbegin(); qi !=rend() ; qi++ )
```

```
        {
                Float nr = T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*qi).s));
                Float nz = T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*qi).s));
                Float n  = sqrt(nr*nr+nz*nz);
                nr=nr/n;        nz=nz/n;
                if (nr*(*qi).x[0]<0) { nr=-nr; nz=-nz; };

                T.at(first_Tr+V_libre_h.domain_dof((*qi).s)) = -sigma/(*qi).x[0]*nr*nr;
                T.at(first_Tz+V_libre_h.domain_dof((*qi).s)) = -sigma/(*qi).x[0]*nr*nz;
        }

        return T;
}
```

Bibliographie

[Maury]
B. MAURY. *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes 2D et 3D avec surface libre par une méthode Euler-Lagrange arbitraire.*
Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1995.

[Pironneau]
O. PIRONNEAU. *Méthode des éléments finis pour les fluides.*
Collection recherche en mathématiques appliquées, Masson, 1988.

[Landau]
L. LANDAU, E. LIFCHITZ. *Physique théorique VI : mécanique des fluides.*
Éditions MIR, 1971.

[Crane]
L. CRANE. *Mechanics of Newtonian Fluids.*
Cours du département de mathématiques de Trinity College, Dublin, 2000.

[Verdier]
C. VERDIER. *Coalescence of polymer droplets : experiments on collision.*
Workshop on multicomponent and multiphasic fluid dynamics, Philadelphie, mars 1999.

[Chevalier]
G. CHEVALIER. *La physique des gouttes*, in *Un savant nommé Pierre-Gilles de Gennes.*
Science-et-Vie hors-série numéro 192, septembre 1995.

[Cuvelier]
C. CUVELIER, M. SCHULKES. *Some numerical methods for the computation of capillary free boundaries governed by the Navier-Stokes equations.*
SIAM Review, vol. 32, #3, pp 355-423, 1990.

[Grisvard]
P. GRISVARD. *Problèmes aux limites dans les polygônes. Mode d'emploi.*
EDF, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C, 1986.

[Saramito]
P. SARAMITO, N. ROQUET. *Rheolef reference manual.*
`http ://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef`, 2001.

[Maluski]
M. MALUSKI, B. BOUCHENY. *Courbure* in *Nouveau Larousse Illustré, dictionnaire*

encyclopédique.
Librairie Larousse, Paris, 1903.

[Hughes]
T. J. R. Hughes, W. Liu, T. K. Zimmermann. *Lagrangian-Eulerian Finite Elements formulation for incompressible viscous flows.*
Comp. Methods in App. Mech. and Eng., **29**, pp 329-349, 1981.

[Sussman]
M. Sussman, P. Smereka, S. J. Osher. *A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow.*
J. Comput. Phys., **114**, 146, 1994.

[Airborne]
Airborne Honey Ltd Laboratories. *Physical characteristics of Honey.*
`http ://www.airborne.co.nz/airborne_honey_technical.html`, 1999.

[Stroupstrup]
B. Stroupstrup. *The* C^{++} *Programming Language.*
Addison Wesley, Reading Mass. USA, 2000.