Morgan Brassel
morgan.brassel@imag.fr

juin 2003

Le problème du talus en analyse de charge limite.

Application à la rupture du manteau neigeux lors des départs d'avalanches.

Stage effectué dans le cadre du *DEA de Mathématiques Appliquées* de l'UJF Grenoble, soutenu le 25 juin 2003 devant un jury composé de :

Valérie Perrier	LMC Grenoble
Eric Bonnetier	LMC Grenoble
Eric Blayo	LMC Grenoble
Pierre Saramito	LMC Grenoble

Thèmes abordés :

- modèle du fluide de Bingham
- méthode de lagrangien augmenté
- simulation numérique par éléments finis
- adaptation de maillage

Contenu du document

1 Introduction **5**

2 Présentation du modèle utilisé et position du problème **7**
2.1 Le modèle du fluide de Bingham . . . 7
2.2 Description du domaine du problème . . . 8
2.3 Position du problème . . . 9
2.4 Dimensionnement du problème . . . 10

3 Méthode de résolution du problème **13**
3.1 Problème de minimisation équivalent à (P) . . . 13
3.2 Le lagrangien augmenté : principe de la méthode . . . 13
3.3 Recherche des points-de-selle du lagrangien augmenté . . . 16
3.3.1 Minimiser par rapport à $\mathbf{v}$ . . . 16
3.3.2 Minimiser par rapport à ξ . . . 16
3.3.3 Maximiser par rapport à τ . . . 17
3.4 Obtention d'un système variationnel et résolution . . . 17
3.4.1 Apparition d'un sous-problème de Stokes . . . 18
3.4.2 Résolution explicite de la minimisation en ξ . . . 18
3.5 Algorithme du lagrangien augmenté . . . 19
3.6 Approximation par éléments finis mixtes . . . 21

4 Implémentation avec Rheolef **25**
4.1 Résolution du sous-problème de Stokes par lagrangien augmenté . . . 25
4.2 Calcul du critère pour l'adaptation de maillage . . . 26
4.3 Utilisation du programme principal . . . 26
4.4 Calculs pour la visualisation des résultats . . . 26
4.4.1 Calcul d'un critère permettant d'exhiber les zones rigides . . . 27
4.4.2 Calcul de la vorticité . . . 27
4.4.3 Calcul de la fonction de courant . . . 28

5 Expérimentations et résultats **31**
5.1 Influence de r sur la vitesse de convergence . . . 31
5.2 Etude de la convergence suivant la taille des mailles (maillage régulier) . . . 32
5.3 Recherche du seuil critique Bi_c avec un maillage régulier . . . 34
5.4 Adaptation de maillage . . . 36
5.5 Recherche du seuil critique Bi_c avec un maillage adaptatif . . . 38

6 Conclusion et perspectives **41**

A Programme principal **43**

1 Introduction

Les fluides viscoplastiques interviennent dans un très grand nombre de problèmes physiques. Ils permettent en effet de représenter un panel important de matériaux, comme la boue, la purée, ou certains métaux à l'état liquide, et occupent donc une place essentielle dans l'étude de ces mêmes matériaux. On les retrouve souvent dans la compréhension et la prévision des risques naturels : coulées de boue ou de lave, avalanches, glaciers. Mais ils sont également présents dans le monde de l'industrie, comme en agro-alimentaire avec les aliments en conserve et la pâte à biscuits, ou dans la construction avec la fabrication des briques et des tuiles en argile, ou même dans l'industrie pétrolière avec les pipelines.

Ces enjeux écologiques et industriels justifient à eux seuls l'étude des fluides viscoplastiques au niveau simulation numérique.

Dans le cadre de ce travail, le fluide viscoplastique considéré est la neige, et on en étudie l'écoulement lors de l'initiation des avalanches, c'est-à-dire au moment de la rupture du manteau neigeux. Le but serait de parvenir à déterminer la pente critique où s'effectue justement la fracture du manteau.

Dans une première partie de cet exposé, on présente le modèle choisi pour représenter le fluide viscoplastique, et on construit un problème aux limites connu sous le nom de «problème du talus». On donne également une version sans dimension de ce problème, qui sera utile lors de l'implémentation.

Puis, on décrit la méthode utilisée pour résoudre numériquement le problème. On commence par en proposer un équivalent sous forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle. Puis, on présente la méthode du lagrangien augmenté, dont on se sert pour résoudre le problème de minimisation. Cette méthode aboutit à un algorithme de recherche de points-de-selle, que l'on détaille dans le cas de notre problème. On décrit alors les éléments finis utilisés pour discrétiser cet algorithme.

Viennent ensuite quelques remarques et quelques précisions sur la façon dont on a implémenté l'algorithme discrétisé à l'aide de la librairie C++ Rheolef. Ce chapitre est particulièrement destiné aux lecteurs susceptibles de réutiliser les programmes écrits ici, ou souhaitant s'initier à la programmation avec Rheolef. Les autres peuvent éventuellement passer ce chapitre lors d'une première lecture.

Enfin, les résultats obtenus à partir des programmes implémentés sont présentés. L'accent est mis en particulier sur la visualisation des zones rigides qui se forment pendant l'écoulement, et sur l'intérêt d'utiliser des maillages adaptatifs.

2 Présentation du modèle utilisé et position du problème

2.1 Le modèle du fluide de Bingham

Un fluide de Bingham est un fluide viscoplastique rigide qui a la propriété suivante : il ne commence à s'écouler que lorsque les forces qui s'exercent sur lui dépassent une certaine valeur σ_0, appelée seuil de contraintes. On parle alors de fluide à seuil.

Un fluide de Bingham obéit bien-sûr aux équations générales de la mécanique des milieux continus : conservation du moment et conservation de la masse.

On décompose le tenseur des contraintes de Cauchy en :

$$\sigma_{tot} = -p \cdot I + \sigma$$

où σ est la partie déviatrice du tenseur et p sa partie sphérique, identifiée à une pression. La conservation du moment s'écrit alors :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}\, \sigma + \nabla p = \mathbf{f}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, ρ sa densité supposée constante, et $\mathbf{f}$ les forces extérieures qui s'exercent sur lui. Comme on s'intéresse ici à l'initiation des avalanches, on peut supposer que le fluide se déplace suffisament lentement pour faire l'hypothèse d'un écoulement quasi-stationnaire. Cela permet également de négliger les effets d'inertie, de sorte que la conservation du moment se simplifie en :

$$\mathbf{div}\, \sigma - \nabla p = -\mathbf{f} \tag{2.1}$$

La densité du fluide étant supposée constante, la conservation de la masse conduit à l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{2.2}$$

On adopte maintenant les notations suivantes :

- $\eta > 0$ est la viscosité plastique du fluide
- $D(\mathbf{u}) = \dfrac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$ est le tenseur des taux de déformation
- pour un tenseur $\tau = (\tau_{ij})$ donné, $\|\tau\|$ représente la norme suivante :

$$\|\tau\| = \sqrt{\tau : \tau} = \left(\sum_{ij} {\tau_{ij}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Une façon d'écrire la loi constitutive d'un fluide de Bingham est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma = 2\eta D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \dfrac{D(\mathbf{u})}{\|D(\mathbf{u})\|} & \text{si } \|D(\mathbf{u})\| \neq 0 \qquad \text{(a)} \\ \|\sigma\| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \qquad \text{(b)} \end{cases}$$

On peut interpréter ces formules de la manière suivante :

- Tant que $\|D(\mathbf{u})\|$ est nul, i.e. tant que le fluide ne se déforme pas, on ne peut pas connaître les contraintes qui s'exercent sur lui. Le tenseur σ reste indéterminé. On sait seulement que la valeur seuil σ_0 n'est pas encore atteinte. C'est ce qu'exprime la 2$^{\text{e}}$ formule.
- Dès que $\|D(\mathbf{u})\|$ n'est plus nul, i.e. dès que le fluide se déforme, on peut retrouver les contraintes qui s'exercent sur lui à partir des taux de déformation grâce à une relation linéaire. C'est la 1$^{\text{ère}}$ des deux formules.

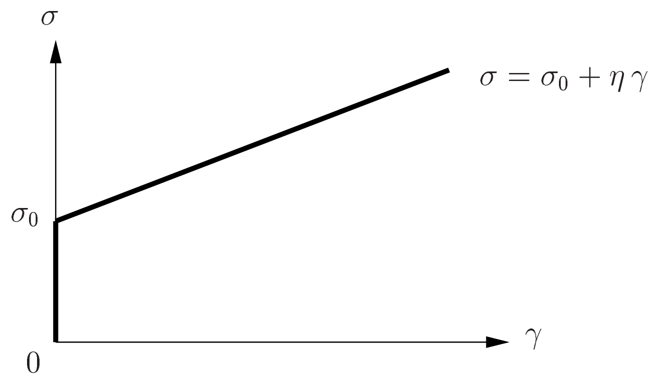


Figure 1: *Contraintes σ en fonction des déformations γ - Cas simple à 1 dimension*

Pour se fixer les idées, on peut tracer la courbe de la figure 1 dans le cas très simplifié d'une seule dimension.

L'indétermination de σ quand $\|D(\mathbf{u})\| = 0$ incite à inverser la relation constitutive, i.e. à exprimer $D(\mathbf{u})$ en fonction de σ plutôt que le contraire.

Si $\|D(\mathbf{u})\| \neq 0$, on peut écrire d'après (a) :

$$\|\sigma\| = 2\eta\|D(\mathbf{u})\| + \sigma_0$$

d'où en particulier $\|\sigma\| > \sigma_0$, et dans ce cas, on peut inverser (a) en :

$$D(\mathbf{u}) = \left(1 - \frac{\sigma_0}{\|\sigma\|}\right)\frac{\sigma}{2\eta}$$

Si $\|D(\mathbf{u})\| = 0$, i.e. si $D(\mathbf{u}) = 0$, σ reste indéterminé mais avec forcément $\|\sigma\| \leq \sigma_0$, car sinon la dernière égalité fournit un $D(\mathbf{u})$ de norme strictement positive.

Au final, la loi constitutive d'un fluide de Bingham peut donc se réécrire :

$$D(\mathbf{u}) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\sigma\|}\right)\dfrac{\sigma}{2\eta} & \text{si } \|\sigma\| > \sigma_0 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3}$$

Ces deux équations expriment mieux que les précédentes ce qu'est l'effet de seuil :

- Tant que $\|\sigma\|$ reste inférieur à σ_0, i.e. tant que les contraintes qui s'exercent sur le fluide n'atteignent pas leur valeur seuil, le fluide ne se déforme pas : il se comporte comme un solide avec $D(\mathbf{u}) = 0$.
- Dès que $\|\sigma\|$ devient supérieur à σ_0, i.e. dès que les contraintes dépassent leur valeur seuil, le fluide se déforme, et $D(\mathbf{u})$ n'est plus nul. Les taux de déformation varient alors linéairement avec les contraintes.

2.2 Description du domaine du problème

Le problème que l'on va étudier ici est connu sous le nom de *problème du talus*. Pour ce problème, on considère le domaine rectangulaire Ω représenté sur la figure 2.

On note (O_{xy}) le plan contenant Ω, où les axes O_x et O_y portent les longueur et largeur du rectangle. On choisit alors O_z de façon à ce que le repère (O, x, y, z) soit direct.

On note $\Gamma_{top}, \Gamma_{bottom}, \Gamma_{left}$ et Γ_{right} les quatre côtés du rectangle Ω, et on impose les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur} & \Gamma_{bottom} & \text{(condition de Dirichlet homogène)} \\ u_x = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = 0 & \text{sur} & \Gamma_{left} & \text{(condition mixte : glissement sur } O_y\text{)} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur} & \Gamma_{top} \cup \Gamma_{right} & \text{(condition de Neumann homogène)} \end{cases} \tag{2.4}$$

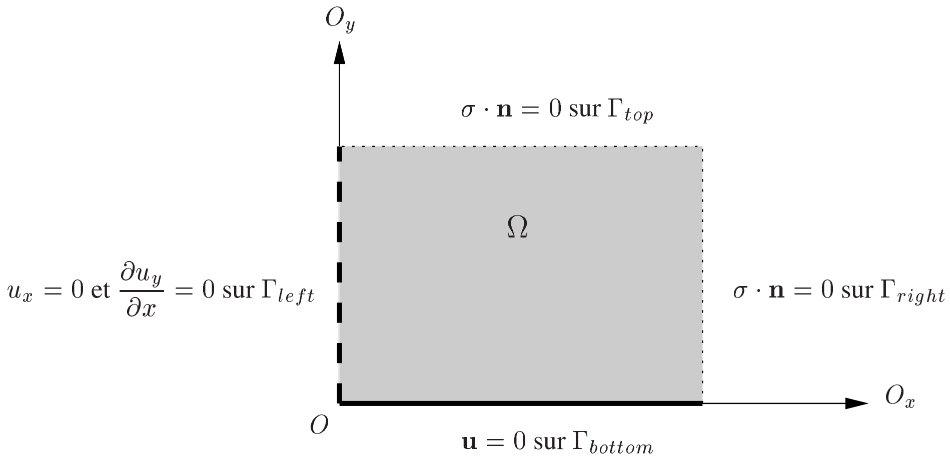


Figure 2: *Domaine du problème et conditions aux limites*

2.3 Position du problème

Le problème aux limites que l'on se propose de résoudre ici s'écrit directement à partir de ce qui précède :

(P) : trouver $\mathbf{u}$ et σ vérifiant (2.1)–(2.4)

c'est-à-dire :

(P) : trouver $\mathbf{u}$ et σ tels que :

$$D(\mathbf{u}) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\sigma\|}\right) \dfrac{\sigma}{2\eta} & \text{si } \|\sigma\| > \sigma_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{div}\, \sigma - \nabla p = -\mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{bottom}$$

$$u_x = 0 \text{ et } \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{left}$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{top} \cup \Gamma_{right}$$

Dans le cadre ce cette étude, la seule force extérieure considérée est la force de gravitation. On a donc :

$$\mathbf{f} = -\rho g\, \mathbf{e_y}$$

où $\mathbf{e_y}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe O_y. Par ailleurs, comme on étudie le problème dans le plan (O_{xy}), la composante de la vitesse $\mathbf{u}$ suivant O_z sera nulle :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans le repère (O,x,y,z). De même, le tenseur des contraintes σ, symétrique, se résumera à :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

L'existence et l'unicité de la solution de (P) sont démontrées par Duvaut et Lions dans [2]. Les arguments de cette démonstration sont donnés un peu plus loin, grâce à une autre formulation du problème.

2.4 Dimensionnement du problème

Pour que le problème (P) soit le plus général possible et qu'il soit réutilisable dans un grand nombre d'applications, il peut être intéressant de le présenter dans une version «sans dimension». Pour cela, on va écrire la variable x sous la forme :

$$x = H\,\tilde{x}$$

où $\tilde{x}$ est la nouvelle variable sans dimension, et H est une grandeur caractéristique du problème. Ici, H représente par exemple la hauteur du rectangle Ω considéré. On va également poser :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U\,\tilde{\mathbf{u}} \\ p &= P\,\tilde{p} \\ \sigma &= \Sigma\,\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{p}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des variables sans dimension, tandis que U, P et Σ sont des grandeurs caractéristiques du problème. Au vu de la conservation du moment (2.1), on remarque qu'on peut imposer la même grandeur caractéristique à la pression p et au tenseur des contraintes σ, i.e. qu'on peut écrire :

$$\boxed{P = \Sigma} \tag{i}$$

Il reste à définir une force extérieure sans dimension :

$$\mathbf{f} = F\,\tilde{\mathbf{f}}$$

où $\tilde{\mathbf{f}}$ sans dimension sera égal à $-\mathbf{e_y}$ et F sera défini par :

$$\boxed{F = \rho g} \tag{ii}$$

Maintenant, pour rester cohérent, on définit les opérateurs sans dimension $\tilde{\text{div}}$, $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{D}$:

$$\begin{aligned} \text{div} &= \frac{1}{H}\,\tilde{\text{div}} \\ \nabla &= \frac{1}{H}\,\tilde{\nabla} \\ D &= \frac{1}{H}\,\tilde{D} \end{aligned}$$

en partant du fait que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{H}\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$$

On a désormais tout ce qu'il faut pour écrire le problème sans dimension.
La conservation du moment (2.1) devient :

$$\frac{\Sigma}{H}\,\tilde{\mathbf{div}}\,\tilde{\sigma} - \frac{\Sigma}{H}\,\tilde{\nabla}\tilde{p} = -F\,\tilde{\mathbf{f}}$$

On aimerait évidemment obtenir :

$$\tilde{\mathbf{div}}\,\tilde{\sigma} - \tilde{\nabla}\tilde{p} = -\tilde{\mathbf{f}}$$

Il suffit de prendre :

$$\boxed{\Sigma = HF = H\rho g} \tag{iii}$$

La conservation de la masse (2.2) devient naturellement :

$$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathbf{u}} = 0$$

Et la loi constitutive (2.3) donne :

$$\frac{U}{H}\,\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = \left(1 - \frac{\sigma_0}{\Sigma\,\|\tilde{\sigma}\|}\right)\frac{\Sigma\,\tilde{\sigma}}{2\eta}$$

On voudrait avoir un coefficient 1 devant le terme $\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}})$. Pour cela, on prend tout simplement :

$$\boxed{U = \frac{H\Sigma}{\eta} = \frac{H^2\rho g}{\eta}} \tag{iv}$$

On définit par ailleurs le nombre de Bingham sans dimension Bi comme le rapport du seuil de contraintes σ_0 sur la contrainte caractéristique Σ :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{\Sigma} = \frac{\sigma_0}{H\rho g}$$

La condition $\|\sigma\| > \sigma_0$ devient : $\Sigma\,\|\tilde{\sigma}\| > \sigma_0$, i.e. : $\|\tilde{\sigma}\| > Bi$.

Avec les formules (i)-(iv), on a déterminé toutes les grandeurs caractéristiques introduites à partir des données du problème. Au final, on s'est réduit au problème sans dimension suivant :

($\tilde{\mathrm{P}}$) : trouver $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\sigma}$ tels que :

$$\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{Bi}{\|\tilde{\sigma}\|}\right)\dfrac{\tilde{\sigma}}{2} & \text{si } \|\tilde{\sigma}\| > Bi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{div}}\,\tilde{\sigma} - \tilde{\nabla}p = -\tilde{\mathbf{f}} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{bottom}$$

$$\tilde{u}_x = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{left}$$

$$\tilde{\sigma}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{top} \cup \Gamma_{right}$$

L'intérêt de toute cette démarche est le suivant : le nouveau problème ($\tilde{\mathrm{P}}$) ne dépend plus que du seul paramètre Bi. Ce paramètre rend à la fois compte du seuil de contraintes σ_0, de la dimension du domaine avec H, et de l'ampleur de la gravitation avec le terme ρg. Autrement dit, il suffit de fixer toutes les constantes du problème à 1 et de modifier cet unique paramètre Bi pour adapter le problème ($\tilde{\mathrm{P}}$) à n'importe quelle situation.

Par ailleurs, ce nouveau problème offre aussi un énorme avantage au niveau de l'implémentation : on peut programmer en ne tenant compte que d'un seul paramètre au lieu d'avoir à en gérer plusieurs. Aussi, en fin d'exposé, les résultats pratiques obtenus seront présentés en rapport avec le problème sans dimension ($\tilde{\mathrm{P}}$), et feront apparaître le nombre de Bingham Bi. Toutes les autres constantes devront être considérées comme unitaires.

3 Méthode de résolution du problème

3.1 Problème de minimisation équivalent à (P)

On commence par définir les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} X_U &= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{bottom} \text{ et } v_x = 0 \text{ sur } \Gamma_{left} \right\} \\ V_U &= \{ \mathbf{v} \in X_U \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \} \end{aligned}$$

Avec ces notations, on peut montrer que le problème de départ (P) est équivalent à un problème de minimisation :

$$\min_{\mathbf{v} \in V_U} J(\mathbf{v}) \tag{3.1}$$

où la fonctionnelle J est définie par :

$$J(\mathbf{v}) = \eta \int_\Omega \|D(\mathbf{v})\|^2 \, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|D(\mathbf{v})\| \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

On a en effet le résultat suivant, démontré dans [2] :

Théorème 3.1.
Si $\mathbf{u}$ *dans* V_U *est une solution de* (3.1)*, i.e. si* $\mathbf{u}$ *vérifie :*

$$J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V_U} J(\mathbf{v})$$

alors $\mathbf{u}$ *est solution de* (P)*, et réciproquement.*

De plus, comme la fonctionnelle J est clairement continue, propre, strictement convexe, et qu'elle vérifie :

$$\lim J(\mathbf{v}) = +\infty \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{v}\| \to +\infty$$

on sait qu'il y aura existence et unicité du minimum, et donc aussi existence et unicité de la solution de (P).

Il nous faut maintenant résoudre le problème de minimisation sur V_U. Hélas, dès que $\sigma_0 > 0$, la fonctionnelle J n'est plus différentiable sur V_U, à cause du terme $\|D(\mathbf{v})\|$. Il est alors impossible de résoudre explicitement le problème de minimisation, et il nous faut utiliser une méthode d'optimisation convexe.

On choisit, comme dans les articles [5] et [6], d'utiliser la méthode de lagrangien augmenté, présentée par Fortin et Glowinski dans [3].

3.2 Le lagrangien augmenté : principe de la méthode

L'idée de départ de la méthode décrite ici repose sur le fait qu'il existe une équivalence triviale entre le problème de minimisation (3.1) et le problème suivant :

$$\min_{(\mathbf{v},\xi) \in V_U \times T \mid \xi = D(\mathbf{v})} \left[\eta \int_\Omega \|\xi\|^2 \, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|\xi\| \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \right] \tag{3.2}$$

où T dénote l'espace des tenseurs symétriques du second ordre, de carré intégrable :

$$T = \left\{ \tau \in L^2(\Omega)^4 \mid \tau^T = \tau \right\}$$

On vient à l'instant d'introduire une variable supplémentaire ξ reliée à $\mathbf{v}$ par la relation linéaire $D(\mathbf{v}) = \xi$. Plus précisément, on vient de transformer le problème (3.1) en un problème sous contraintes (3.2), où la contrainte est justement la relation $D(\mathbf{v}) = \xi$.

Pour se servir de cette nouvelle contrainte, il est naturel d'utiliser un multiplicateur de Lagrange $\tau \in T$, et de former le lagrangien associé à la fonctionnelle J :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \tau) = \eta \displaystyle\int_\Omega \|\xi\|^2 \, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|\xi\| \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \big(D(\mathbf{v}) - \xi \big) : \tau \, dx, \\ \\ \forall (\mathbf{v}, \xi) \in V_U \times T, \quad \forall \tau \in T \end{array} \right.$$

de façon à ramener la résolution de (3.2), et donc de (3.1), à une recherche de points-de-selle, i.e. à un problème sans contrainte.

La démarche présentée jusqu'ici peut paraître quelque peu compliquée, dans la mesure où l'on a ajouté artificiellement au problème de départ une variable supplémentaire ξ et une contrainte $D(\mathbf{v}) = \xi$. En faisant cela, on a en fait simplifier la structure non linéaire du problème (3.1) en découplant J et D.

Le problème de minimisation initial se retrouve maintenant réduit à une simple recherche de points-de-selle, au vu du résultat de [3] suivant :

Théorème 3.2.
Si $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}$ sur $V_U \times T \times T$, alors $\mathbf{u}$ est solution du problème (3.1), et on a $\gamma = D(\mathbf{u})$.

Ce théorème est démontré dans [3] pour le cas général. Néanmoins, la démonstration faisant apparaître des éléments importants pour la compréhension de la méthode, elle est ici retranscrite dans une version adaptée au problème traité.

Avant de commencer, on rappelle simplement qu'un point-de-selle $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ de $\mathscr{L}$ est un élément de $V_U \times T \times T$ défini par la double inégalité :

$$\mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \tau) \leq \mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) \leq \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \sigma), \quad \forall(\mathbf{v}, \xi; \tau) \in V_U \times T \times T \tag{3.3}$$

ou, de façon équivalente, par :

$$\mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) = \min_{\mathbf{v},\xi} \max_{\tau} \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \tau) = \max_{\tau} \min_{\mathbf{v},\xi} \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \tau)$$

On peut maintenant fournir la preuve du théorème 3.2 :

Démonstration.
On suppose que $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}$ sur $V_U \times T \times T$. On a alors, grâce à la $1^{\text{ère}}$ inégalité de (3.3) :

$$\int_\Omega \big(D(\mathbf{u}) - \gamma\big) : \tau \, dx \leq \int_\Omega \big(D(\mathbf{u}) - \gamma\big) : \sigma \, dx, \quad \forall \tau \in T$$

ce qui implique :

$$D(\mathbf{u}) - \gamma = 0$$

soit :

$$D(\mathbf{u}) = \gamma$$

En utilisant cette dernière relation, la 2^{e} inégalité de (3.3) donne :

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) \leq \eta \displaystyle\int_\Omega \|\xi\|^2 \, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|\xi\| \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \big(D(\mathbf{v}) - \xi\big) : \tau \, dx, \\ \forall(\mathbf{v}, \xi) \in V_U \times T \end{cases}$$

En particulier, pour $\xi = D(\mathbf{v}) \in T$, on obtient :

$$J(\mathbf{u}) \leq \eta \int_\Omega \|D(\mathbf{v})\|^2 \, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|D(\mathbf{v})\| \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V_U$$

c'est-à-dire :

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_U$$

ce qui prouve que $\mathbf{u}$ est solution du problème (3.1). □

La difficulté qui va se présenter maintenant est la suivante : $\mathscr{L}$ étant linéaire en $\mathbf{v}$, il est impossible de minimiser par rapport à cette variable, et la recherche des points-de-selle de $\mathscr{L}$ devient irréalisable.

D'où l'idée de définir, pour $r > 0$, le lagrangien augmenté :

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \tau) = \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \tau) + r \int_\Omega \|D(\mathbf{v}) - \xi\|^2 \, dx, \quad \forall (\mathbf{v}, \xi; \tau) \in V_U \times T \times T$$

Cette fois, on voit que $\mathscr{L}_r$ est quadratique et défini-positif en $\mathbf{v}$, de sorte qu'on peut minimiser par rapport à cette variable. Il nous est ainsi possible de trouver les points-de-selle de $\mathscr{L}_r$, qui coïncident avec ceux de $\mathscr{L}$ d'aprés le résultat suivant, toujours tiré de [3] :

Théorème 3.3.
Si $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}$ sur $V_U \times T \times T$, alors c'est un point-de-selle de $\mathscr{L}_r$ pour tout $r > 0$, et inversement.

Ce théorème est lui aussi démontré dans [3], mais comme tout-à-l'heure, la démonstration permet d'exhiber des phénomènes importants pour la compréhension. C'est pourquoi on a choisi de la faire figurer ici, dans sa version adaptée au problème (3.1) :

Démonstration.

i) On suppose que $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}$. On a vu que dans ce cas :

$$D(\mathbf{u}) = \gamma$$

ce qui implique immédiatement :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \tau) = \mathscr{L}_r(\mathbf{u}, \gamma; \tau) = \mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) = \mathscr{L}_r(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) \leq \mathscr{L}(\mathbf{v}, \xi; \sigma) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma), \\ \forall (\mathbf{v}, \xi; \tau) \in V_U \times T \times T \end{cases}$$

où la dernière inégalité est obtenue par construction même de $\mathscr{L}_r$.
Ainsi, $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}_r$.

ii) On suppose maintenant que $(\mathbf{u}, \gamma; \sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}_r$, c'est-à-dire :

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}, \gamma; \tau) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma), \quad \forall (\mathbf{v}, \xi; \tau) \in V_U \times T \times T$$

En procédant comme pour $\mathscr{L}$, on montre grâce à la 1$^{\text{ère}}$ inégalité que :

$$D(\mathbf{u}) = \gamma$$

et donc immédiatement que :

$$\mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \tau) = \mathscr{L}(\mathbf{u}, \gamma; \sigma), \quad \forall \tau \in T$$

Il nous reste à utiliser la 2$^{\text{e}}$ inégalité :

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}, \gamma; \sigma) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma), \quad \forall (\mathbf{v}, \xi) \in V_U \times T$$

Si on tient compte de la convexité de $\mathscr{L}_r$ par rapport au couple $(\mathbf{v}, \xi)$, on peut caractériser, à σ fixé, le couple $(\mathbf{u}, \gamma) \in V_U \times T$ par :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) : \sigma \, dx + 2r \int_\Omega \big(D(\mathbf{u}) - \gamma\big) : \big(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{u})\big) \, dx \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_U \\ \displaystyle J(\xi) - J(\gamma) - \int_\Omega (\xi - \gamma) : \sigma \, dx + 2r \int_\Omega \big(\gamma - D(\mathbf{u})\big) : (\xi - \gamma) \, dx \geq 0, \quad \forall \xi \in T \end{cases}$$

Avec $D(\mathbf{u}) = \gamma$, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega D(\mathbf{v} - \mathbf{u}) : \sigma \, dx \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_U \\ \displaystyle J(\xi) - J(\gamma) - \int_\Omega (\xi - \gamma) : \sigma \, dx \geq 0, \quad \forall \xi \in T \end{cases}$$

Ces deux dernières inéquations sont équivalentes à :

$$\mathscr{L}(\mathbf{u},\gamma;\sigma) \leq \mathscr{L}(\mathbf{v},\xi;\sigma), \quad \forall(\mathbf{v},\xi) \in V_U \times T$$

et $(\mathbf{u},\gamma;\sigma)$ est bien un point-de-selle de $\mathscr{L}$.

$\square$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à trouver une méthode efficace pour chercher les points-de-selle de $\mathscr{L}_r$.

3.3 Recherche des points-de-selle du lagrangien augmenté

On va chercher à écrire, dans cette partie, les conditions d'optimalité permettant de caractériser les points-de-selle $(\mathbf{u},\gamma;\sigma)$ de $\mathscr{L}_r$ sur $V_U \times T \times T$. Pour cela, on décompose naturellement la recherche des points-de-selle en trois parties distinctes :

3.3.1 Minimiser par rapport à $\mathbf{v}$

Le lagrangien augmenté $\mathscr{L}_r$ est clairement différentiable par rapport à la variable $\mathbf{v}$ pour tout $r > 0$, avec, pour toute fonction $\mathbf{h}$ de V_U :

$$\frac{\partial \mathscr{L}_r}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v},\xi;\tau)(\mathbf{h}) = -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{h}\,dx + \int_\Omega D(\mathbf{h}) : \tau\,dx + 2r\int_\Omega D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{h})\,dx - 2r\int_\Omega D(\mathbf{h}) : \xi\,dx$$

La condition pour que le $\mathbf{u}$ du point-de-selle $(\mathbf{u},\gamma;\sigma)$ réalise un minimum peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathscr{L}_r}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u},\gamma;\sigma) = 0$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\mathbf{h}$ par $\mathbf{v}$ dans l'expression de la dérivée :

$$2r\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\,dx - 2r\int_\Omega D(\mathbf{v}) : \gamma\,dx + \int_\Omega D(\mathbf{v}) : \sigma\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx = 0, \quad \forall\mathbf{v} \in V_U \tag{3.4}$$

3.3.2 Minimiser par rapport à ξ

Ici par contre, $\mathscr{L}_r$ n'est pas différentiable par rapport à la variable ξ, à cause du terme $\|\xi\|$. On doit donc se contenter de la caractérisation la plus simple du minimum :

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u},\xi;\sigma) \geq \mathscr{L}_r(\mathbf{u},\gamma;\sigma), \quad \forall\xi \in T$$

ce qui donne, en remplaçant $\mathscr{L}_r$ par son expression :

$$\begin{aligned}
&\eta\int_\Omega \|\xi\|^2\,dx + \sigma_0\int_\Omega \|\xi\|\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,dx + \int_\Omega \big(D(\mathbf{u})-\xi\big) : \sigma\,dx + r\int_\Omega \|D(\mathbf{u})-\xi\|^2\,dx \\
&\quad\geq \eta\int_\Omega \|\gamma\|^2\,dx + \sigma_0\int_\Omega \|\gamma\|\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,dx + \int_\Omega \big(D(\mathbf{u})-\gamma\big) : \sigma\,dx + r\int_\Omega \|D(\mathbf{u})-\gamma\|^2\,dx
\end{aligned}$$

En développant les produits scalaires et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\eta\int_\Omega \Big(\|\xi\|^2 - \|\gamma\|^2\Big)\,dx + \sigma_0\int_\Omega \|\xi\|\,dx - \sigma_0\int_\Omega \|\gamma\|\,dx - \int_\Omega \xi : \sigma\,dx + \int_\Omega \gamma : \sigma\,dx \\
&\quad +r\int_\Omega \Big[\|\xi\|^2 - 2\big(D(\mathbf{u}) : \xi\big) - \|\gamma\|^2 + 2\big(D(\mathbf{u}) : \gamma\big)\Big]\,dx \geq 0
\end{aligned}$$

soit, en regroupant convenablement les termes :

$$(\eta + r)\int_\Omega \Big(\|\xi\|^2 - \|\gamma\|^2\Big)\,dx + \sigma_0\int_\Omega \|\xi\|\,dx - \sigma_0\int_\Omega \|\gamma\|\,dx - \int_\Omega \big(\sigma + 2rD(\mathbf{u})\big) : (\xi - \gamma)\,dx \geq 0$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout α et pour tout β de T, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|\alpha-\beta\|^2 &\geq 0\\
\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\alpha:\beta &\geq 0\\
\|\alpha\|^2 &\geq 2\alpha:\beta-\|\beta\|^2\\
\|\alpha\|^2-\|\beta\|^2 &\geq 2\big(\alpha:\beta-\|\beta\|^2\big)\\
\|\alpha\|^2-\|\beta\|^2 &\geq 2\beta:(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

On applique cela à ξ et γ, ce qui donne la condition suffisante d'optimalité :

$$2(\eta+r)\int_\Omega \gamma:(\xi-\gamma)\,dx+\sigma_0\int_\Omega\|\xi\|\,dx-\sigma_0\int_\Omega\|\gamma\|\,dx-\int_\Omega\big(\sigma+2rD(\mathbf{u})\big):(\xi-\gamma)\,dx\geq 0,\quad \forall\xi\in T \tag{3.5}$$

3.3.3 Maximiser par rapport à τ

Comme $\mathscr{L}_r$ est différentiable par rapport à la variable σ, on a la condition de maximalité suivante :

$$\frac{\partial\mathscr{L}_r}{\partial\tau}(\mathbf{u},\gamma;\sigma)=0$$

qui donne immédiatement :

$$D(\mathbf{u})-\gamma=0$$

soit :

$$D(\mathbf{u})=\gamma \tag{3.6}$$

On retrouve naturellement la condition exhibée dans les deux démonstrations précédentes.

3.4 Obtention d'un système variationnel et résolution

On vient juste d'écrire, avec (3.4)-(3.5)-(3.6), trois conditions sur $\mathbf{u}$, γ et σ permettant de caractériser les points-de-selle de $\mathscr{L}_r$. En fait, on vient de remplacer le problème de recherche des points-de-selle de $\mathscr{L}_r$ par un système d'équations et d'inéquations variationnelles :

(SV) : trouver $\mathbf{u}$ dans V_U, γ et σ dans T tels que :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\mathbf{v}\in V_U,\\[2mm] 2r\displaystyle\int_\Omega D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\,dx-2r\int_\Omega D(\mathbf{v}):\gamma\,dx+\int_\Omega D(\mathbf{v}):\sigma\,dx-\int_\Omega\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\xi\in T,\\[2mm] 2(\eta+r)\displaystyle\int_\Omega\gamma:(\xi-\gamma)\,dx+\sigma_0\int_\Omega\|\xi\|\,dx-\sigma_0\int_\Omega\|\gamma\|\,dx-\int_\Omega\big(\sigma+2rD(\mathbf{u})\big):(\xi-\gamma)\,dx\geq 0\end{array}\right.$$

$$D(\mathbf{u})=\gamma$$

Il s'agit maintenant d'étudier ce système variationnel, et de le résoudre. On va voir ici que l'équation variationnelle (3.4) peut s'interpréter, à γ et σ fixés, comme la formulation d'un problème de Stokes classique, et que l'inégalité (3.5) admet une solution explicite en γ.

3.4.1 Apparition d'un sous-problème de Stokes

On va considérer le problème de Stokes suivant :

Trouver $\mathbf{u}$ et p tels que :

$$\begin{cases} -r\,\mathbf{div}\big(2D(\mathbf{u})\big) + \nabla p = -\,\mathbf{div}(2r\gamma - \sigma) + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \big(-pI + 2rD(\mathbf{u})\big)\cdot \mathbf{n} = (2r\gamma - \sigma)\cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_{top} \cup \Gamma right \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{bottom} \\ u_x = 0 \quad \text{et} \quad \big[\big(-pI + 2rD(\mathbf{u})\big)\cdot \mathbf{e_y}\big]\cdot \mathbf{n} = \big[(2r\gamma - \sigma)\cdot \mathbf{e_y}\big]\cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_{left} \end{cases} \tag{3.7}$$

et on va essayer de montrer que la 1ère équation de (SV) est en fait une formulation variationnelle de ce problème. On effectue un test sur les fonctions $\mathbf{v}$ de l'espace V_U défini en début de chapitre :

$$-r\int_\Omega \mathbf{div}\big(2D(\mathbf{u})\big)\cdot \mathbf{v}\,dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\,dx = -\int_\Omega \mathbf{div}(2r\gamma - \sigma)\cdot \mathbf{v}\,dx + \int_\Omega \mathbf{f}\cdot \mathbf{v}\,dx$$

On peut écrire, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} -r\int_\Omega \mathbf{div}\big(2D(\mathbf{u})\big)\cdot \mathbf{v}\,dx &= 2r\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\,dx - \int_{\partial\Omega} \big(2rD(\mathbf{u})\cdot \mathbf{n}\big)\cdot \mathbf{v}\,ds \\ \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\,dx &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\,dx + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}\cdot \mathbf{n})\,ds \\ -\int_\Omega \mathbf{div}(2r\gamma - \sigma)\cdot \mathbf{v}\,dx &= \int_\Omega (2r\gamma - \sigma) : D(\mathbf{v})\,dx - \int_{\partial\Omega} \big((2r\gamma - \sigma)\cdot \mathbf{n}\big)\cdot \mathbf{v}\,ds \end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites imposées dans (3.7), les termes de bord vont s'annuler entre eux. De plus, les $\mathbf{v}$ de V_U étant à divergence nulle sur Ω, le terme en « $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ » va disparaître. On obtient finalement :

$$2r\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\,dx = \int_\Omega (2r\gamma - \sigma) : D(\mathbf{v})\,dx + \int_\Omega \mathbf{f}\cdot \mathbf{v}\,dx$$

ce qui est exactement la 1ère équation de (SV) si on cherche $\mathbf{u}$ dans V_U.

Ainsi, minimiser le lagrangien augmenté $\mathscr{L}_r$ par rapport à la variable $\mathbf{v}$ revient à résoudre un sous-problème de Stokes tout-à-fait classique.

3.4.2 Résolution explicite de la minimisation en ξ

L'inéquation variationnelle (3.5) contenue dans (SV) offre l'énorme avantage de posséder une solution explicite γ définie, à $\mathbf{u}$ et σ fixés, par :

$$\gamma = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\sigma + 2rD(\mathbf{u})\|}\right)\dfrac{\sigma + 2rD(\mathbf{u})}{2(\eta + r)} & \text{si } \|\sigma + 2rD(\mathbf{u})\| > \sigma_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.8}$$

Cette inéquation se ramène en effet au contexte du résultat local suivant, utilisé dans [3] et [8] :

Lemme 3.4.
Soit le problème d'optimisation :

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}^2}\Big[(\eta + r)\|\xi\|^2 + \sigma_0\|\xi\| - <\beta(x), \xi>\Big], \quad pp\ x \in \Omega$$

où $< \cdot, \cdot >$ et $\|\cdot\|$ désignent le produit scalaire et la norme de $\mathbb{R}^2$, et où β est une fonction prise dans T.
Ce problème admet une solution unique γ donnée par :

$$pp\ x \in \Omega, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\beta(x)\|}\right) \dfrac{\beta(x)}{2(\eta + r)} & \textit{si } \|\beta(x)\| > \sigma_0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

De plus, γ est dans T et définit l'unique solution de l'inéquation variationnelle :

$$2(\eta + r) \int_\Omega \gamma : (\xi - \gamma)\, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|\xi\|\, dx - \sigma_0 \int_\Omega \|\gamma\|\, dx - \int_\Omega \beta : (\xi - \gamma)\, dx \geq 0, \quad \forall \xi \in T$$

Ce lemme est démontré de façon précise dans [4], et il n'est pas utile de réécrire la preuve ici. Il suffit d'appliquer le résultat avec $\beta = \sigma + 2rD(\mathbf{u}) \in T$ pour obtenir ce qu'on cherche.

L'intérêt d'avoir écrit le système (SV) ainsi que (3.7) et (3.8) est qu'on va pouvoir s'en servir dans la construction d'un algorithme de recherche des points-de-selle de $\mathscr{L}_r$.

3.5 Algorithme du lagrangien augmenté

Pour la recherche des points-de-selle du lagrangien augmenté $\mathscr{L}_r$, il est naturel d'utiliser un algorithme du type Uzawa :

Algorithme 3.1 (Uzawa dans le cas général).

initialisation *$(n = 0)$: On choisit σ^0 arbitrairement dans T.*

boucle *$(n \geq 0)$:*

- *étape 1 - On suppose σ^n connu, et on détermine $(\mathbf{u}^n, \gamma^n)$ dans $V_U \times T$ tel que :*

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}^n, \gamma^n; \sigma^n) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma^n), \quad \forall (\mathbf{v}, \xi) \in V_U \times T$$

- *étape 2 - On calcule σ^{n+1} :*

$$\sigma^{n+1} := \sigma^n + \rho_n \big(D(\mathbf{u}^n) - \gamma^n\big)$$

où le couple $(\mathbf{u}^n, \gamma^n)$ est caractérisé, comme dans (SV), par :

$$2r \int_\Omega D(\mathbf{u}^n) : D(\mathbf{v})\, dx - 2r \int_\Omega D(\mathbf{v}) : \gamma^n\, dx + \int_\Omega D(\mathbf{v}) : \sigma^n\, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_U$$

$$\begin{cases} 2(\eta + r) \displaystyle\int_\Omega \gamma^n : (\xi - \gamma^n)\, dx + \sigma_0 \int_\Omega \|\xi\|\, dx - \sigma_0 \int_\Omega \|\gamma^n\|\, dx - \int_\Omega \big(\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^n)\big) : (\xi - \gamma^n)\, dx \geq 0, \\ \forall \xi \in T \end{cases}$$

ce qui, avec (3.7) et (3.8), est équivalent à dire que $\mathbf{u}^n$ est solution de :

$$\begin{cases} -r\, \mathbf{div}\big(2D(\mathbf{u}^n)\big) + \nabla p^n = -\,\mathbf{div}(2r\gamma^n - \sigma^n) + \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^n = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \big(-p^n I + 2rD(\mathbf{u}^n)\big) \cdot \mathbf{n} = (2r\gamma^n - \sigma^n) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_{top} \cup \Gamma right \\ \mathbf{u}^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{bottom} \\ u_x{}^n = 0 \quad \text{et} \quad \big[\big(-p^n I + 2rD(\mathbf{u}^n)\big) \cdot \mathbf{e_y}\big] \cdot \mathbf{n} = \big[(2r\gamma^n - \sigma^n) \cdot \mathbf{e_y}\big] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_{left} \end{cases}$$

et que γ^n est défini par :

$$\gamma^n = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^n)\|}\right) \dfrac{\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^n)}{2(\eta + r)} & \text{si } \|\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^n)\| > \sigma_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'algorithme d'Uzawa repose directement sur la notion de point-de-selle, puisqu'il consiste à maximiser ce qu'on appelle la fonctionnelle duale :

$$h_r(\sigma) = \inf_{(\mathbf{v},\xi)\in V_U\times T} \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma) = \mathscr{L}_r(\mathbf{u}_\sigma, \gamma_\sigma; \sigma)$$

par une méthode de *descente du gradient*, en considérant que le gradient de h_r est donné au point σ par :

$$\nabla h_r(\sigma) = D(\mathbf{u}_\sigma) - \gamma_\sigma$$

où $(\mathbf{u}_\sigma, \gamma_\sigma) \in V_U \times T$ est solution du problème :

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}_\sigma, \gamma_\sigma; \sigma) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \xi; \sigma), \quad \forall (\mathbf{v}, \xi) \in V_U \times T$$

Dans ce travail, on utilise l'algorithme avec un pas constant ρ. Cela donne des résultats amplement suffisants.

Dans sa présentation actuelle, l'algorithme d'Uzawa a cependant peu d'intérêt pratique, dans la mesure où le calcul de γ^n est couplé à celui de $\mathbf{u}^n$. Il est donc plus efficace d'utiliser l'algorithme relaxé suivant :

Algorithme 3.2 (Uzawa relaxé).

initialisation $(n = 0)$ *: On choisit* γ^0 *et* σ^0 *arbitrairement dans* T.

boucle $(n \geq 0)$ *:*

- *étape 1 - On suppose* γ^n *et* σ^n *connus, et on détermine* $\mathbf{u}^{n+1}$ *dans* V_U *tel que :*

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}^{n+1}, \gamma^n; \sigma^n) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{v}, \gamma^n; \sigma^n), \quad \forall \mathbf{v} \in V_U$$

- *étape 2 - On détermine* γ^{n+1} *tel que :*

$$\mathscr{L}_r(\mathbf{u}^{n+1}, \gamma^{n+1}; \sigma^n) \leq \mathscr{L}_r(\mathbf{u}^{n+1}, \xi; \sigma^n), \quad \forall \xi \in T$$

- *étape 3 - On calcule* σ^{n+1} *:*

$$\sigma^{n+1} := \sigma^n + \rho\big(D(\mathbf{u}^{n+1}) - \gamma^{n+1}\big)$$

On dispose, pour ce dernier algorithme, du résultat de convergence 3.5, démontré dans [3] :

Théorème 3.5 (Convergence de l'algorithme d'Uzawa relaxé).
Pour n'importe quel $r > 0$*, sous l'hypothèse :*

$$0 < \rho < \left(1 + \sqrt{5}\right) r$$

on a les convergences suivantes quand n *tend vers* $+\infty$ *:*

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{u}^n & \longrightarrow & \mathbf{u} & \textit{fortement dans } V_U \\ \gamma^n & \longrightarrow & \gamma & \textit{fortement dans } T \\ \sigma^{n+1} - \sigma^n & \longrightarrow & \mathbf{u} & \textit{fortement dans } T \end{array}$$

Par expérience, on sait que le choix $\rho = 2r$ est à priori celui qui conduit aux meilleurs résultats pour la vitesse de convergence. C'est donc ce choix qui est fait ici pour l'implémentation.

Au final, pour le problème étudié ici, on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 3.3 (Uzawa pour un fluide de Bingham).

initialisation $(n = 0)$ *: On choisit* γ^0 *et* σ^0 *arbitrairement dans* T.

boucle $(n \geq 0)$ *:*

- *étape 1 - On suppose* γ^n *et* σ^n *connus, et on détermine* $\mathbf{u}^{n+1}$ *et* p^{n+1} *tels que :*

$$\begin{cases} -r\,\mathbf{div}\big(2D(\mathbf{u}^{n+1})\big) + \nabla p^{n+1} = -\,\mathbf{div}(2r\gamma^n - \sigma^n) + \mathbf{f} \quad \textit{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \textit{dans } \Omega \\ \big(-p^{n+1}I + 2rD(\mathbf{u}^{n+1})\big) \cdot \mathbf{n} = (2r\gamma^n - \sigma^n) \cdot \mathbf{n} \quad \textit{sur } \Gamma_{top} \cup \Gamma right \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \textit{sur } \Gamma_{bottom} \\ {u_x}^{n+1} = 0 \quad \textit{et} \quad \big[\big(-p^n I + 2rD(\mathbf{u}^n)\big) \cdot \mathbf{e_y}\big] \cdot \mathbf{n} = \big[(2r\gamma^n - \sigma^n) \cdot \mathbf{e_y}\big] \cdot \mathbf{n} \quad \textit{sur } \Gamma_{left} \end{cases}$$

- *étape 2 - On calcule explicitement* γ^{n+1} *:*

$$\gamma^{n+1} := \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\|\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^{n+1})\|}\right) \dfrac{\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^{n+1})}{2(r+\eta)} & \textit{si } \|\sigma^n + 2rD(\mathbf{u}^{n+1})\| \geq \sigma_0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

- *étape 3 - On calcule explicitement* σ^{n+1} *:*

$$\sigma^{n+1} := \sigma^n + 2r\left(D(\mathbf{u}^{n+1}) - \gamma^{n+1}\right) \textit{ dans } \Omega$$

Cet algorithme est particulièrement intéressant dans la mesure où il transforme le problème de départ en une suite de calculs parfaitement standards : la 1$^{\text{ère}}$ étape consiste en la résolution d'un problème de Stokes, et les deux autres sont explicites.

Pour ce genre d'algorithme avec descente du gradient, le critère d'arrêt qui s'impose le plus naturellement est le suivant :

$$\|D(\mathbf{u}^n) - \gamma^n\| < \varepsilon$$

où ε est une précision fixée à l'avance par l'utilisateur. On a vu en effet qu'on devait avoir $\gamma = D(\mathbf{u})$ à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$. Ce critère est donc tout-à-fait cohérent avec le problème. Par ailleurs, il donne de bons résultats au niveau numérique.

Maintenant que l'on dispose d'un algorithme pour résoudre notre problème, il faut s'attaquer à sa discrétisation. Dans notre étude, on choisit d'approcher le problème avec une méthode d'éléments finis mixtes.

3.6 Approximation par éléments finis mixtes

Dans l'algorithme 3.3 que l'on se propose d'utiliser, on voit clairement apparaître 4 champs à approximer : $\mathbf{u}$, p, γ et σ. Toute la difficulté de l'approximation va consister à choisir des éléments finis compatibles entre eux selon les nécessités du problème. Il faut également essayer de faire en sorte que la solution approchée obtenue ne dépende pas du choix du paramètre r du lagrangien augmenté.

Pour être tout-à-fait rigoureux dans notre choix des éléments finis, on va se ramener ici aux notations de Brezzi et Fortin dans [1]. Pour cela, on définit les deux formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\gamma;\mathbf{v},\delta) &= 2r\int_\Omega \big(\gamma - D(\mathbf{u})\big) : \big(\delta - D(\mathbf{v})\big) + 2\eta \int_\Omega \gamma : \delta\, dx \\ b(\mathbf{v},\delta;\sigma,p) &= \int_\Omega \sigma : \big(D(\mathbf{v}) - \delta\big)\, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx \end{aligned}$$

ainsi que la fonctionnelle l.s.c. et convexe :

$$j(\delta) = \sigma_0 \int_\Omega \|\delta\|\, dx$$

Avec ces nouvelles notations, on peut montrer que $(\mathbf{u},\gamma;\sigma)$ est un point-de-selle de $\mathscr{L}_r$ si et seulement si c'est une solution du problème variationnel suivant :

(FV) : trouver $(\mathbf{u},\gamma;\sigma,p) \in X_U \times T \times T \times L^2(\Omega)$ tel que :

$\forall(\mathbf{v},\delta;\xi,q) \in X_U \times T \times T \times L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} j(\delta) - j(\gamma) + a(\mathbf{u},\gamma;\mathbf{v}-\mathbf{u},\delta-\gamma) + b(\mathbf{v}-\mathbf{u},\delta-\gamma;\sigma,p) \geq 0 \\ \\ b(\mathbf{u},\gamma;\xi,q) = 0 \end{cases}$$

On peut maintenant définir les espaces de dimension finie :

$$\begin{array}{rcl} H_h & \subset & {H^1(\Omega)}^2 \\ X_h & = & X_U \cap H_h \\ D_h & \subset & T \\ T_h & \subset & T \\ Q_h & \subset & L^2(\Omega) \end{array}$$

et obtenir la version «dimension finie» de notre problème variationnel en remplaçant les espaces de départs par leurs homologues de dimension finie :

$(\mathrm{FV})_h$: trouver $(\mathbf{u}_h,\gamma_h;\sigma_h,p_h) \in X_h \times D_h \times T_h \times Q_h$ tel que :

$\forall(\mathbf{v},\delta;\xi,q) \in X_h \times D_h \times T_h \times Q_h$,

$$\begin{cases} j(\delta) - j(\gamma_h) + a(\mathbf{u}_h,\gamma_h;\mathbf{v}-\mathbf{u}_h,\delta-\gamma_h) + b(\mathbf{v}-\mathbf{u}_h,\delta-\gamma_h;\sigma_h,p_h) \geq 0 \\ \\ b(\mathbf{u}_h,\gamma_h;\xi,q) = 0 \end{cases}$$

Il parait naturel de vouloir approximer les tenseurs γ et σ avec les mêmes éléments, i.e. de choisir $D_h = T_h$. Ce choix nous amène à $\gamma_h = R_h\big(D(\mathbf{u}_h)\big)$ où R_h est la projection dans L^2 de T sur T_h :

$$R_h\delta \in T_h \text{ avec : } \quad \forall \xi \in T_h, \quad \int_\Omega (R_h\delta) : \xi\, dx = \int_\Omega \delta : \xi\, dx$$

Quand $\sigma_0 = 0$, le problème est réduit à un problème linéaire qui concorde avec la théorie des éléments finis mixtes développée dans [1]. En effet, dans ce cas, on a $\sigma_h = 2\eta D(\mathbf{u}_h)$, et on obtient le problème linéaire elliptique suivant :

(S)$_h$: trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ tel que :

$\forall(\mathbf{v}, q) \in X_h \times Q_h,$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\eta \int_\Omega R_h D(\mathbf{u}_h) : D(\mathbf{v})\, dx + 2r \int_\Omega (I - R_h) D(\mathbf{u}_h) : (I - R_h) D(\mathbf{v})\, dx - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = 0 \\ - \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}_h\, dx = 0 \end{array} \right.$$

On voit alors clairement que lorsque $R_h \neq I$, i.e. lorsque $T_h \neq D(H_h)$, la solution $\mathbf{u}_h$ du problème discret dépend du paramètre $r > 0$ du lagrangien augmenté. Cette dépendance est bien-sûr indésirable. On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la solution $\mathbf{u}_h$ de (FV)$_h$ soit indépendante de r est donnée par :

$$T_h = D(H_h)$$

Dans ce cas, le problème (S)$_h$ est réduit à un problème de Stokes classique. Beaucoup de couples d'espaces (H_h, Q_h) acceptables pour résoudre ce problème sont présentés dans [1]. Ici, nous avons choisi d'utiliser les célèbres éléments finis de Taylor-Hood.

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage triangulaire de Ω, et soit Ω_h l'approximation de Ω obtenue avec ce maillage. Le choix de Taylor-Hood consiste à choisir pour H_h l'espace des polynômes de degré 2 continus par morceaux $P_2 - C^0$, et pour Q_h l'espace des fonctions linéaires continues par morceaux $P_1 - C^0$. Dans ce cas, pour que la solution $\mathbf{u}_h$ soit indépendante de r, on a vu qu'il fallait prendre $D_h = T_h = D(H_h)$, qui sera donc l'espace des fonctions linéaires par morceaux mais discontinues $P_1 - C^{-1}$.

La figure 3 récapitule nos choix concernant les espaces d'approximation. On peut montrer (voir [4]) qu'avec ces espaces, la solution du problème (FV)$_h$ est déterminée de manière unique.

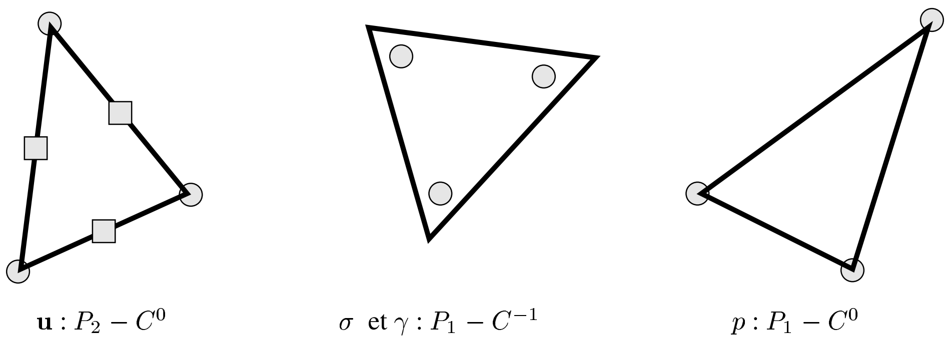


Figure 3: *Les éléments finis utilisés pour l'approximation*

4 Implémentation avec Rheolef

4.1 Résolution du sous-problème de Stokes par lagrangien augmenté

Du point de vue de l'implémentation, la formulation du problème de Stokes la plus pratique à utiliser est celle qui est exhibée dans le paragraphe 3.4.1 :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V_U \text{ tel que : } \quad 2r \int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\, dx = \int_\Omega (2r\gamma - \sigma) : D(\mathbf{v})\, dx + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V_U \tag{4.1}$$

Cependant, il est impossible avec Rheolef de travailler sur des espaces à divergence nulle. Il nous faut donc éliminer l'espace V_U dans la formulation. Pour cela, on réintroduit la pression p du fluide et on change (4.1) en :

Trouver $\mathbf{u} \in X_U$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} 2r \displaystyle\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_\Omega (2r\gamma - \sigma) : D(\mathbf{v})\, dx + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in X_U \\ - \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{4.2}$$

où l'on rappelle que X_U est simplement défini par :

$$X_U = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{bottom} \text{ et } v_x = 0 \text{ sur } \Gamma_{left} \right\}$$

De cette façon, le problème discrétisé issu de (4.2) peut se mettre sous la forme matricielle classique suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

oû :

- la matrice A correspond à la forme : $\quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2r \displaystyle\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\, dx$
- la matrice B correspond à la forme : $\quad b(\mathbf{v}, q) = - \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx$

Dans notre travail, on résoud le système linéaire (4.3) par une méthode de lagrangien augmenté à pas constant, avec un paramètre r'. Pour ce faire, on définit, en ajoutant la 2^e^ ligne à la 1^ère^ avec un coefficient $(r'B^T)$:

$$\begin{aligned} A_{r'} &= A + r'B^T B \\ F_{r'} &= F + r'B^T G \end{aligned}$$

et on utilise l'algorithme présenté dans [3] :

Algorithme 4.1 (Uzawa pour le problème de Stokes).

initialisation *$(n = 0)$: On choisit P_0 arbitrairement.*

boucle *$(n \geq 0)$:*

- *étape 1 - On suppose P_n connu, et on calcule U_n tel que :*

$$A_{r'} U_n = F_{r'} - B^T P_n$$

- *étape 2 - On calcule P_{n+1} :*

$$P_{n+1} := P_n + r'(BU_n - G)$$

L'avantage d'utiliser cette méthode est qu'elle est déjà implémentée dans Rheolef avec la fonction uzawa_abtb. Le critère d'arrêt utilisé est le suivant :

$$\|BU_n - G\| < \varepsilon'$$

oû ε' est une précision fixée à l'avance (c'est le critère classique pour tout algorithme de descente). Il est connu que la convergence de cet algorithme est d'autant plus rapide que r' est grand (ce résultat est démontré dans [3]). Dans notre implémentation, on a donc fixé de paramètre à 10^7, c'est-à-dire à la valeur de la précision machine. La vitesse de convergence est alors très importante, ce qui nous permet de choisir une précision élevée : on fixe ε' à 10^{-12}.

La résolution du problème de Stokes par appel à uzawa_abtb est effectuée à l'intérieur de la fonction solve du fichier global `bingham_talus_adapt.cc` porté en annexe.

4.2 Calcul du critère pour l'adaptation de maillage

Le critère choisi pour effectuer l'adaptation de maillage est le suivant :

$$c_h(x) = \big(D(\mathbf{u}_h) : \sigma_h\big)^{1/2}(x) \tag{4.4}$$

Il est recalculé à chaque nouveau maillage pour essayer de déterminer les frontières des zones rigides de l'écoulement et effectuer le raffinement à ces endroits.

Dans l'implémentation avec Rheolef, il a fallu écrire la fonction criteria ci-dessous qui prend en argument les deux champs $\mathbf{u}_h$ et σ_h et qui retourne le champ c_h comme défini en (4.4).

```
field criteria(const field uh, const field sigmah) {
  space Vh = uh.get_space();
  space Th = sigmah.get_space();
  form D = .5*form(Vh, Th, "2D");
  form inv_mt (Th, Th, "inv_mass");
  field Duh = inv_mt*(D*uh);
  field ch_carre = Duh(0,0)*sigmah(0,0)
               + 2*(Duh(0,1)*sigmah(0,1))
               + Duh(1,1)*sigmah(1,1);
  ch_carre = sqrt(sqr(ch2)); // valeur absolue
  return sqrt(ch_carre);
}
```

Cette fonction figure elle aussi dans le fichier `bingham_talus_adapt.cc` en annexe.

4.3 Utilisation du programme principal

Le programme principal est `bingham_talus_adapt.cc`. Il prend en argument trois paramètres :
1- le nom du maillage initial à utiliser (par exemple `maillage.geo`)
2- le nombre de Bingham Bi (c'est l'équivalent de σ_0 dans le problème dimensionné)
3- le nombre n_max d'adaptations de maillage souhaitées

Pour lancer le programme, on tape par exemple la commande :

```
bingham_talus_adapt maillage.geo 0.3 5 > ecoulement.mfield
```

Le fichier de redirection `ecoulement.mfield` contiendra les champs u_h et σ_h, ainsi que le nombre Bi. C'est à partir de ce fichier qu'on va pouvoir visualiser les résultats.

4.4 Calculs pour la visualisation des résultats

On récapitule dans cette partie tous les calculs qu'il a fallu effectuer pour visualiser les résultats de façon pertinente.

4.4.1 Calcul d'un critère permettant d'exhiber les zones rigides

Les zones rigides qui apparaissent avec l'écoulement sont par définition les zones où le fluide ne se déforme pas, i.e. les zones où le tenseur des déformations est nul :

$$\{x \in \Omega \mid D(\mathbf{u}_h)(x) = 0\}$$

D'un point de vue numérique, ce critère n'est pas satisfaisant : il va beaucoup dépendre des petites erreurs de précision pour les valeurs proches de 0, et manquera de stabilité. Heureusement, dans le cas d'un fluide de Bingham, on a l'équivalence suivante :

$$D(\mathbf{u}_h)(x) = 0 \iff \|\sigma_h\|(x) < Bi$$

Le critère intéressant à calculer serait donc :

$$z_h(x) = \|\sigma_h\|(x) - Bi \tag{4.5}$$

de façon à pouvoir définir les zones rigides par :

$$\{x \in \Omega \mid z_h(x) < 0\}$$

Ce critère est évidemment plus stable que l'autre, puisqu'on a maintenant une inégalité à la place de l'égalité de tout-à-l'heure. Pour distinguer les zones rigides des zones fluides, il suffira de tracer la ligne de niveau $z_h = 0$.

Le tenseur des contraintes σ_h étant calculé avec des éléments $P_1 - C^{-1}$, il en sera de même pour z_h, et il faut donc définir l'espace Z_h suivant :

$$Z_h = \left\{\xi \in L^2(\Omega) \mid \xi_{/K} \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

Le calcul s'écrit alors très rapidement avec Rheolef :

Fichier `zones.cc`

```
#include "rheolef.h"
using namespace std;

int main(int argc, char**argv) {
  Float Bi;
  field sigmah;
  cin >> catchmark("Bi")    >> Bi
      >> catchmark("sigma") >> sigmah;
  space Zh  (sigmah.get_geo(), "P1d");
  field Bih (Zh, Bi);
  field zh = sqrt( sqr(sigmah(0,0))
                 + 2*sqr(sigmah(0,1))
                 +sqr(sigmah(1,1)) ) - Bih;
  cout << ch;
  return 0;
}
```

On utilise le programme en lançant simplement la commande :

```
zones < ecoulement.mfield | proj - | field -
```

4.4.2 Calcul de la vorticité

Le calcul de la vorticité est intéressant du point de vue de la visualisation des résultats. La vorticité intervient en effet dans le calcul de la fonction de courant, dont l'observation permet d'avoir une bonne idée du champ des vitesses de l'écoulement.

Dans le cas de notre écoulement en 2D, La vorticité est un scalaire noté ω et défini à partir de la vitesse $\mathbf{u}$ solution de notre problème par la relation suivante :

$$\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \tag{4.6}$$

c'est-à-dire :

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Comme dans notre étude la vitesse est approximée par des éléments $P_2 - C^0$, la vorticité sera approximée avec des éléments $P_1 - C^{-1}$, i.e. avec des fonctions linéaires par morceaux et discontinues. On est donc amené à introduire l'espace suivant :

$$L_h = \left\{ \xi \in L^2(\Omega) \mid \xi_{/K} \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

de sorte que la formulation variationnelle approchée de (4.6) s'écrira :

$$\text{Trouver } \omega_h \in L_h \text{ tel que :} \qquad \int_\Omega \omega_h \, \xi \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}(\mathbf{u}_h) \, \xi \, dx, \quad \forall \xi \in L_h \tag{4.7}$$

Ce dernier probléme s'implémente sans difficulté avec Rheolef :

Fichier `vorti.cc`

```
#include "rheolef.h"
using namespace std;

int main(int argc, char** argv) {
  field uh;
  cin >> uh;
  space Lh (uh.get_geo(), "P1d");
  form rot (uh.get_space(), Lh, "curl");
  form inv_m (Lh, Lh, "inv_mass");
  wh = inv_m*(rot*uh);
  cout << catchmark("w") << wh;
  return 0;
}
```

Il suffit alors de taper la commande :

```
vorti < ecoulement.mfield | field -
```

pour visualiser la vorticité.

4.4.3 Calcul de la fonction de courant

La fonction de courant permet l'observation du champ des vitesses de l'écoulement, puisque les vecteurs-vitesse sont tous tangents à la fonction de courant.

La fonction de courant ψ est un scalaire défini sur Ω par :

$$\mathbf{rot}\,\psi = \mathbf{u} \tag{4.8}$$

La question qui se pose est de savoir quelles conditions aux limites imposer à ψ pour être cohérent avec l'écoulement. Au vu de notre problème, on peut faire les remarques suivantes :

- Sur le bord Γ_{bottom}, on a imposé $\mathbf{u} = 0$ à la vitesse, et il faut naturellement imposer la même chose à la fonction de courant : $\psi = 0$ sur Γ_{bottom}.
- Sur le bord Γ_{left}, les vecteurs vitesses doivent être verticaux, i.e. parallèles à l'axe O_y. Il parait donc naturel d'imposer une condtion de Dirichlet homogène à la fonction de courant : $\psi = 0$ sur Γ_{left}.

- Sur le bord Γ_{top}, les vecteurs vitesse "entrent" dans Ω avec un certain angle, et il semble logique d'imposer à ψ une condition de Neumann non homogène : $\partial_{\mathbf{n}}\psi = \alpha$ sur Γ_{top}.
- Sur le bord Γ_{right}, les vecteurs vitesse "sortent" du domaine là aussi avec un certain angle, et on imposera également une condition de Neumann non homogène : $\partial_{\mathbf{n}}\psi = \beta$ sur Γ_{right}.

Les conditions de Neumann non homogènes α et β vont être obtenues par définition même de ψ. On a en effet :

$$\mathbf{rot}\,\psi = \begin{pmatrix} \partial_y\psi \\ -\partial_x\psi \end{pmatrix} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_{top} : & \partial_{\mathbf{n}}\psi = \partial_y\psi = u_x \\ \text{sur } \Gamma_{right} : & \partial_{\mathbf{n}}\psi = \partial_x\psi = -u_y \end{cases}$$

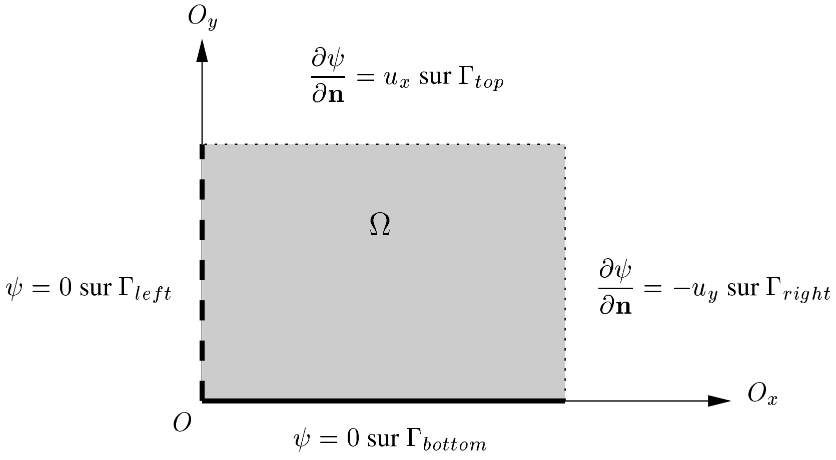


Figure 4: *Conditions aux limites sur la fonction de courant* ψ

Il nous faut maintenant trouver une formulation variationnelle permettant le calcul approché de ψ avec Rheolef. Si on applique l'opérateur rot à la définition de la fonction de courant (4.8), on obtient :

$$\mathrm{rot}(\mathbf{rot}\,\psi) = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

c'est-à-dire, en introduisant la vorticité ω :

$$-\Delta\psi = \omega$$

La fonction de courant que l'on cherche à calculer sera donc solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\psi &=& \omega & \text{dans } \Omega \\ \psi &=& 0 & \text{sur } \Gamma_{left} \cup \Gamma_{bottom} \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi &=& u_x & \text{sur } \Gamma_{top} \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi &=& -u_y & \text{sur } \Gamma_{right} \end{cases} \tag{4.9}$$

On a approximé la vitesse $\mathbf{u}$ avec des éléments $P_2 - C^0$. On fera donc de même pour la fonction de courant. Pour cela, on introduit l'espace d'approximation P_h suivant :

$$P_h = \left\{\xi \in L^2(\Omega) \mid \xi_{/K} \in P_2, \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_{left} \cup \Gamma_{bottom}\right\}$$

et on écrit la formulation variationnelle approchée du problème (4.9) :

$$\text{Trouver } \psi_h \in P_h \text{ tel que :} \qquad -\int_\Omega \Delta\psi_h\,\xi\,dx = \int_\Omega \omega_h\,\xi\,dx, \quad \forall \xi \in P_h \tag{4.10}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\psi_h\,\xi\,dx &= \int_\Omega \nabla\psi_h\nabla\xi\,dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi_h}{\partial\mathbf{n}}\,\xi\,ds \\ &= \int_\Omega \nabla\psi_h\nabla\xi\,dx - \int_{\Gamma_{top}}(u_h)_x\,\xi\,ds + \int_{\Gamma_{right}}(u_h)_y\,\xi\,ds \end{aligned}$$

La formulation (4.10) se réécrit donc :

$$\text{Trouver } \psi_h \in P_h \text{ tel que : } \quad \int_\Omega \nabla\psi_h\nabla\xi\,dx = -\int_\Omega \omega_h\,\xi\,dx + \int_{\Gamma_{top}}(u_h)_x\,\xi\,ds - \int_{\Gamma_{right}}(u_h)_y\,\xi\,ds, \quad \forall\xi\in P_h \tag{4.11}$$

C'est sous cette forme qu'on implémente le calcul de ψ_h avec Rheolef.

Le début du programme est similaire à `vorti.cc`, puisqu'on doit connaître la vorticité avant de commencer les calculs de la fonction de courant.

Fichier `courant.cc`

```
#include "rheolef.h"
using namespace std;

int main (int argc, char** argv) {
  field uh;
  cin >> catchmark("u")  >> uh;
  geo omegah = uh.get_geo();
  space Vh  = uh.get_space();
  // vorticite:
  space Lh (omegah, "P1d");
  form rot (Vh, Lh, "curl");
  form inv_m (Lh, Lh, "inv_mass");
  wh = inv_m*(rot*uh);
  // fonction de courant:
  field uh_x = field(uh[0]);
  field uh_y = field(uh[1]);
  space Vh_x = uh_x.get_space();
  space Vh_y = uh_y.get_space();
  space Ph (omegah, "P2");
    Ph.block("bottom");
    Ph.block("left");
  field psih (Ph);
    psih["bottom"] = psih["left"] = 0;
  form m         (Lh,  Ph, "mass");
  form mb_top    (Vh_x, Ph, "mass_bdr", omegah["top"]);
  form mb_right  (Vh_y, Ph, "mass_bdr", omegah["right"]);
  form c         (Ph,  Ph, "grad_grad");
  ssk<Float> fact_c = ldlt(c.uu);
  psih.u = fact_c.solve ( (m.uu*wh.u + m.ub*wh.b) - c.ub*psih.b
                          + mb_top.uu*uh_x.u     + mb_top.ub*uh_x.b
                          - mb_right.uu*uh_y.u   - mb_right.ub*uh_y.b
                         );
  cout << catchmark("psi") << psih;
  return 0;
}
```

Pour voir les résultats, on utilise le programme avec la commande suivante :

```
vorti < ecoulement.mfield | courant | field -
```

5 Expérimentations et résultats

Tous les tests ont été réalisés à partir du problème sans dimension présenté dans la première partie de l'exposé, et en prenant comme domaine Ω le carré unité $[0,1]^2$.

5.1 Influence de r sur la vitesse de convergence

Dans cette première partie, on va tenter de mesurer l'impact du paramètre $r > 0$ du lagrangien augmenté sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Pour cela, on fixe la valeur de Bi, et on lance les calculs en faisant varier r à chaque fois. On relève alors le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme pour faire tomber l'erreur $\varepsilon_h = \|D(\mathbf{u}_h) - \gamma_h\|$ à une précision donnée à l'avance.

Sur les deux graphes de la figure 5 sont présentés les résultats obtenus en prenant $Bi = 0$ et en fixant la précision voulue pour l'erreur à 10^{-10}. Le nombre d'itérations nb_iter est porté en abscisses, et l'erreur commise ε_h est portée en ordonnées avec une échelle logarithmique.

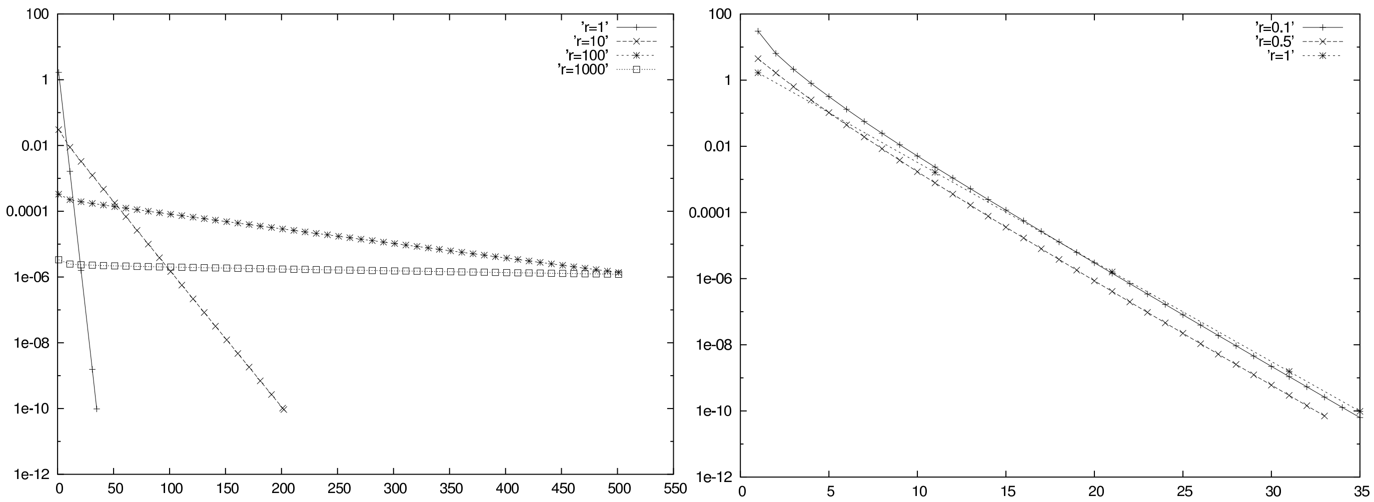
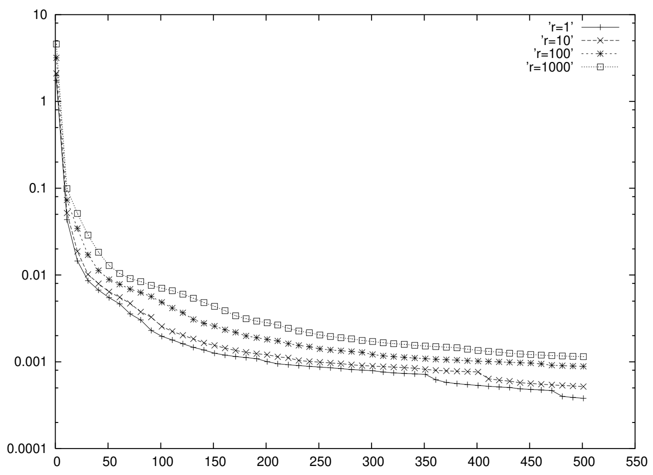


Figure 5: $\log \varepsilon_h$ *en fonction de* nb_iter *avec* $Bi = 0$*, pour* $r = 1, 10, 100, 1000$ *et* $r = 0.1, 0.5, 1$

Pour $Bi = 0$, le problème est linéaire : il est réduit à un problème de Stokes dans le cas newtonien. C'est ce qui explique que les courbes soient aussi régulières. On voit que la vitesse de convergence varie beaucoup suivant la valeur de r. Elle semble être optimale pour des r proche de 1. Ceci s'explique assez simplement : on sait que pour le problème de Stokes résolu par lagrangien augmenté, la convergence est d'autant plus rapide que le paramètre r_{stokes} est grand. Or, dans notre implémentation, une division par r est effectuée avant de résoudre le problème de Stokes. Donc si r est grand, cela aura pour effet de faire diminuer r_{stokes} et donc de baisser la vitesse de convergence. C'est pourquoi les petites valeurs de r conduisent à de meilleurs résultats.



Pour Bi non nul (sur la figure ci-contre, $Bi = 0.4$), le problème n'est plus linéaire et les courbes ne sont plus aussi régulières. Par ailleurs, le paramètre r ne semble plus avoir autant d'influence que ci-dessus. La valeur $r = 1$ semble donner des résultats satisfaisants, pour toutes les valeurs de Bi. C'est pourquoi dans la suite de nos tests, on fixera le paramètre r à 1.

5.2 Etude de la convergence suivant la taille des mailles (maillage régulier)

On cherche ici à savoir si un raffinement du maillage régulier permet d'obtenir des résultats convenables pour ce qui est de la localistion des zones rigides de l'écoulement.

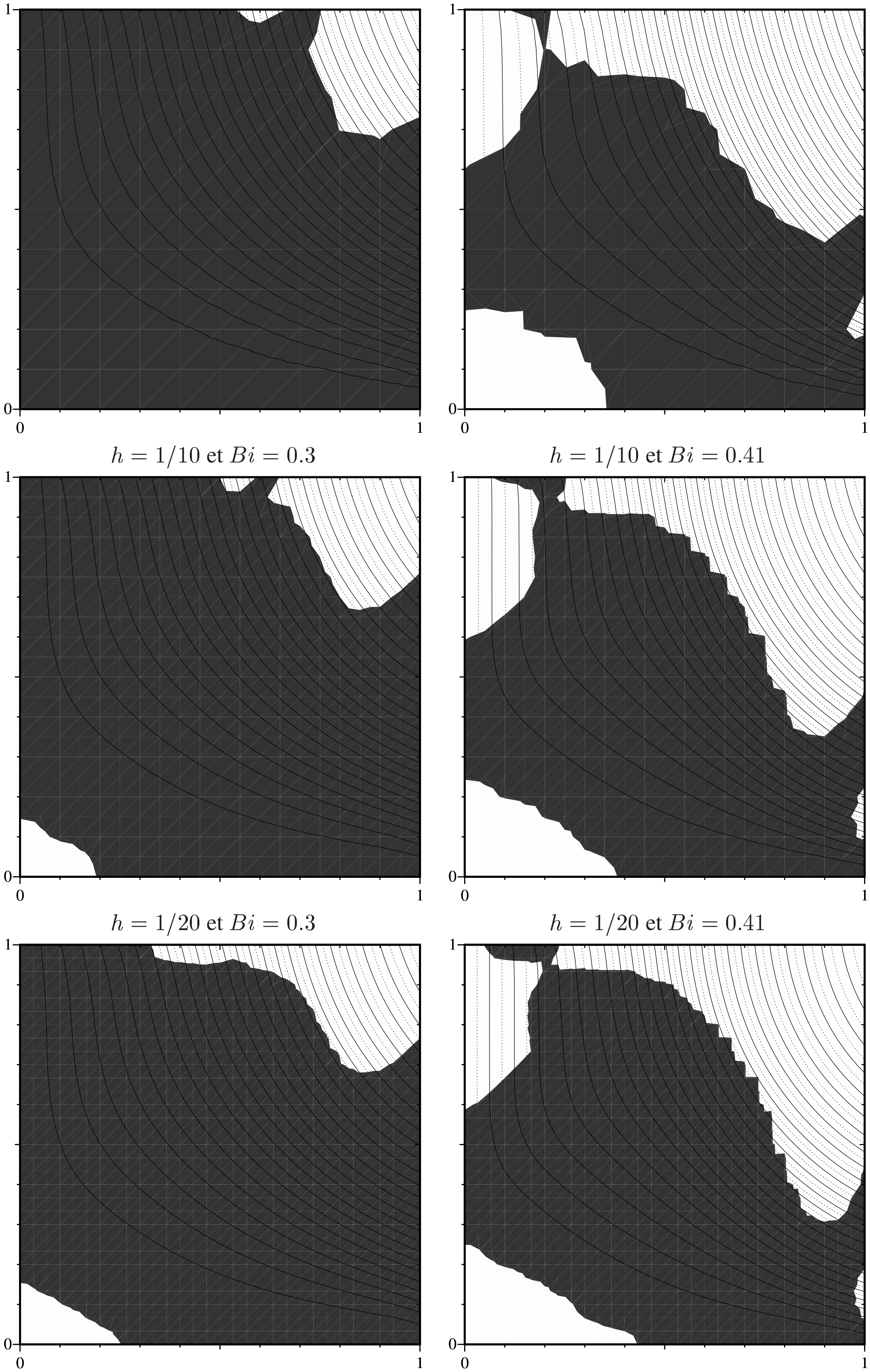
Pour cela, on fixe la valeur de Bi ainsi que celle de la précision ε souhaitée, et on lance les calculs avec des tailles de maille de plus en plus petites. Pour chaque taille de maille, on affiche les zones rigides (en blanc sur les figures ci-contre) et la fonction de courant de l'écoulement.

Sur la page qui suit figurent les résultats obtenus en fixant Bi respectivement à 0.3 et 0.41 avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$. On utilise trois tailles h de maille différentes : $1/10$, $1/20$ et $1/30$.

On peut faire les remarques suivantes :

- le maillage le plus grossier ($h = 1/10$) semble réellement insuffisant pour obtenir des tracés raisonnables : pour $Bi = 0.3$, il ne permet même pas de faire apparaître la zone rigide située en bas du domaine, et pour $Bi = 0.41$, cette dernière a une forme vraiment trop grossière comparée à celle du maillage suivant ($h = 1/20$).
- pour les trois tailles de maille, on sent la difficulté à délimiter les frontières entre les zones rigides et les zones fluides. C'est que les maillages adaptés ne sont pas capables de gérer des phénomènes aussi locaux.
- pour un temps de calcul plus que doublé, les maillages $h = 1/20$ et $h = 1/30$ donnent des résultats assez semblables. Si on essayait de diminuer encore la taille des mailles, il est probable qu'on obtiendrait encore des choses similaires. C'est la preuve que les maillages réguliers ne permettront jamais d'obtenir des résultats probants pour le problème posé.

Au final, les tracés obtenus permettent d'avoir une certitude : l'adaptation de maillage est un impératif si l'on veut obtenir des résultats intéressants sur l'emplacement des zones rigides.



$h = 1/10$ et $Bi = 0.3$ — $h = 1/10$ et $Bi = 0.41$

$h = 1/20$ et $Bi = 0.3$ — $h = 1/20$ et $Bi = 0.41$

$h = 1/30$ et $Bi = 0.3$ — $h = 1/30$ et $Bi = 0.41$

Figure 6: Zones rigides et fonction de courant pour différentes tailles de maille

5.3 Recherche du seuil critique Bi_c avec un maillage régulier

Pour un fluide de Bingham, plus la valeur du seuil de contraintes Bi (ou σ_0 dans le problème dimensionné) est élevée, et plus la taille des zones rigides est importante. Avec notre problème sans dimension, Bi peut prendre des valeurs entre 0 et 1 :

- lorsque $Bi = 0$, le fluide est newtonien et peut être assimilé à de l'eau.
- lorsque $Bi = 1$, on est certain que le fluide est totalement bloqué et assimilable à un solide.

En fait, le bloquage complet du fluide s'effectue toujours pour une valeur intermédiaire du paramètre Bi. Cette valeur est le «seuil critique» de l'écoulement, qu'on note Bi_c. Tout l'enjeu de l'analyse de charge limite pour notre problème consiste à déterminer la valeur de ce seuil, de façon la plus précise possible.

Pour déterminer la valeur de Bi_c, on on augmente petit-à-petit la valeur de Bi et on visualise les zones rigides à chaque fois. Dès que celles-ci se touchent, le fluide se bloque et on a dépassé la valeur critique Bi_c.

La page ci-contre présente les résultats obtenus avec un maillage $h = 1/20$ et une précision $\varepsilon = 10^{-6}$.

On voit nettement croître les zones rigides lorsque Bi augmente. Lorsque $Bi = 0.4$, on peut distinguer trois zones rigides séparées :

- une en bas à gauche de Ω qui est complètement à l'arrêt. C'est la partie du tas qui n'aura pas bougé après écoulement du fluide.
- une en haut à gauche qui tombe verticalement (toutes les lignes de courant qui la traversent sont parallèles à O_y). C'est le haut du tas qui doit s'effondrer verticalement pendant l'écoulement.
- une en haut à droite qui semble être en rotation solide (toutes les lignes de courant semblent être parallèles entre elles, et semblent être des arcs de cercle). C'est la partie extérieure du tas qui semble s'effondrer en tournant vers le dehors.

Avec ce maillage, dès qu'on prend pour Bi une valeur légèrement supérieure à 0.41, les deux zones rigides du haut se rejoignent alors qu'elles sont parcourues par des vitesses non parallèles entre elles ! Cette incohérence est due au manque de précision du maillage : il ne permet pas de déterminer convenablement la frontière rigide/fluide. Il faut une précision énorme sur σ_h pour pouvoir le faire, et c'est impossible avec un maillage régulier.

On se gardera bien ici de donner la moindre valeur pour le seuil critique Bi_c. Les maillages réguliers ne permettent pas de pouvoir le faire dans notre cas. Leur insuffisance et le caractère local des difficultés rencontrées ici incitent directement à utiliser des maillages adaptatifs.

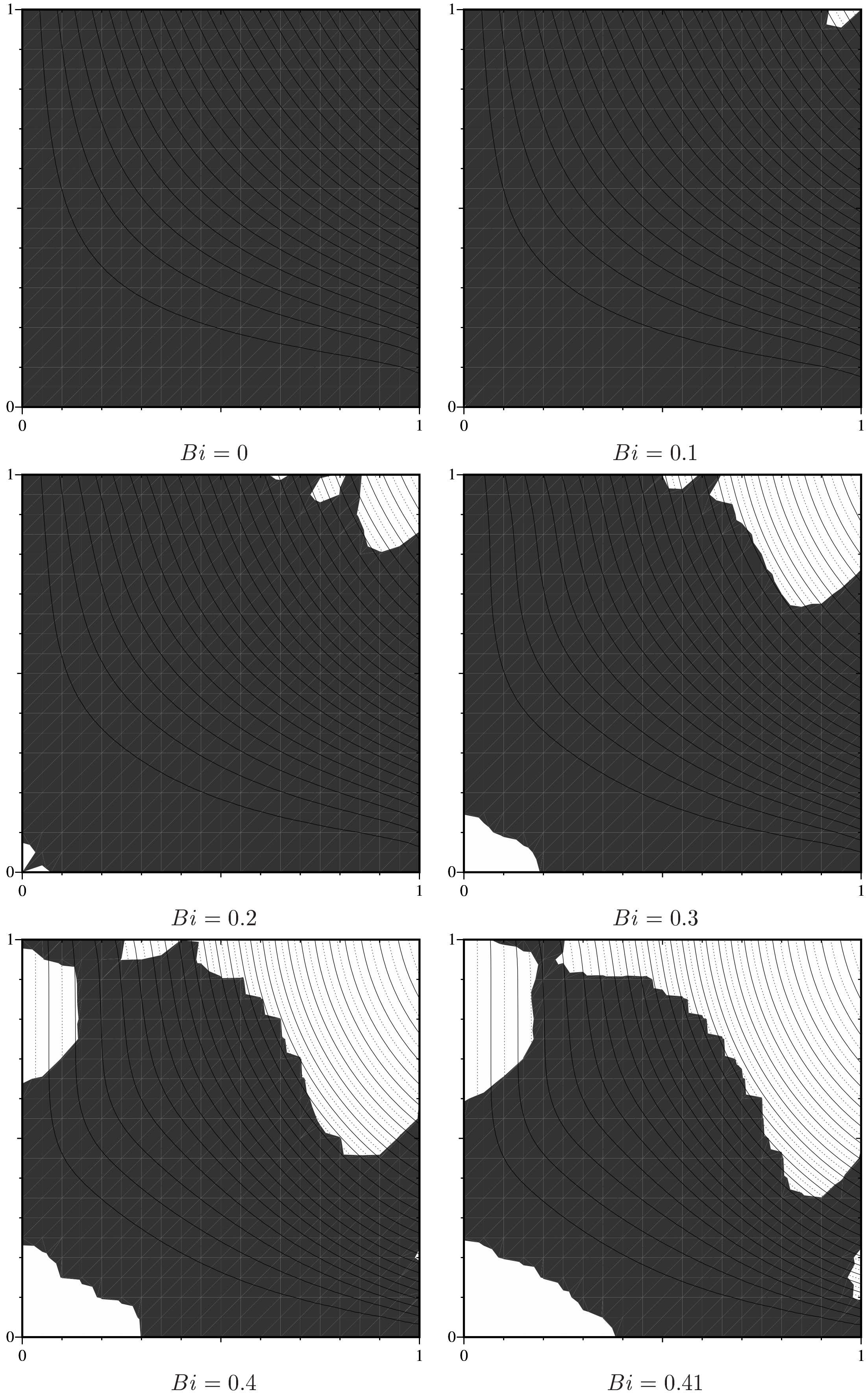


Figure 7: Zones rigides et fonction de courant pour différentes valeurs de Bi (maillage régulier)

5.4 Adaptation de maillage

On a vu que les maillages réguliers ne permettaient pas de délimiter de façon précise les frontières des zones rigides. C'est donc à ces endroits qu'il va nous falloir raffiner le maillage le plus possible. Un critère permettant de détecter l'interface entre zones rigides et zones fluides est donné au paragraphe 4.2 :

$$c_h(x) = \big(D(\mathbf{u}_h) : \sigma_h\big)^{1/2}(x)$$

C'est ce critère que nous avons utilisé pour obtenir les résultats de la page suivante, à partir d'un maillage régulier $h = 1/10$. On a fixé Bi à 0.38 : une valeur à laquelle les zones rigides ont déjà des tailles conséquentes. Pour des raisons de temps de calcul, il nous a fallu nous contenter d'une précision médiocre $\varepsilon = 10^{-2}$. En effet, même avec cette valeur grossière, il a fallu plus de 2 heures de calcul sur un $PIII$ à 1Ghz pour effectuer les 5 adaptations présentées ici.

Heureusement, les résultats sont déjà significatifs : on voit très nettement le maillage se reserrer au niveau des interfaces rigide/fluide observées grossièrement au paragraphe précédent.

Une observation intéressante concerne la convergence du maillage adapté. On voit qu'en seulement 5 itérations, on est déjà presque arrivé à une «limite» du maillage. En effet, le nombre de mailles est quasiment le même dans les deux derniers maillages, et leur disposition est similaire. Bien évidemment, il faudrait lancer des calculs beaucoup plus longs, avec une précision ε de 10^{-8} ou 10^{-10} pour confirmer cette remarque.

Une chose est sûre en tout cas : les relevés ci-contre permettent de valider le choix du critère qui a été fait, puisque l'adaptation semble se faire là où il faut.

On peut maintenant tenter à nouveau la recherche du paramètre critique Bi_c, mais cette fois avec adaptation du maillage.

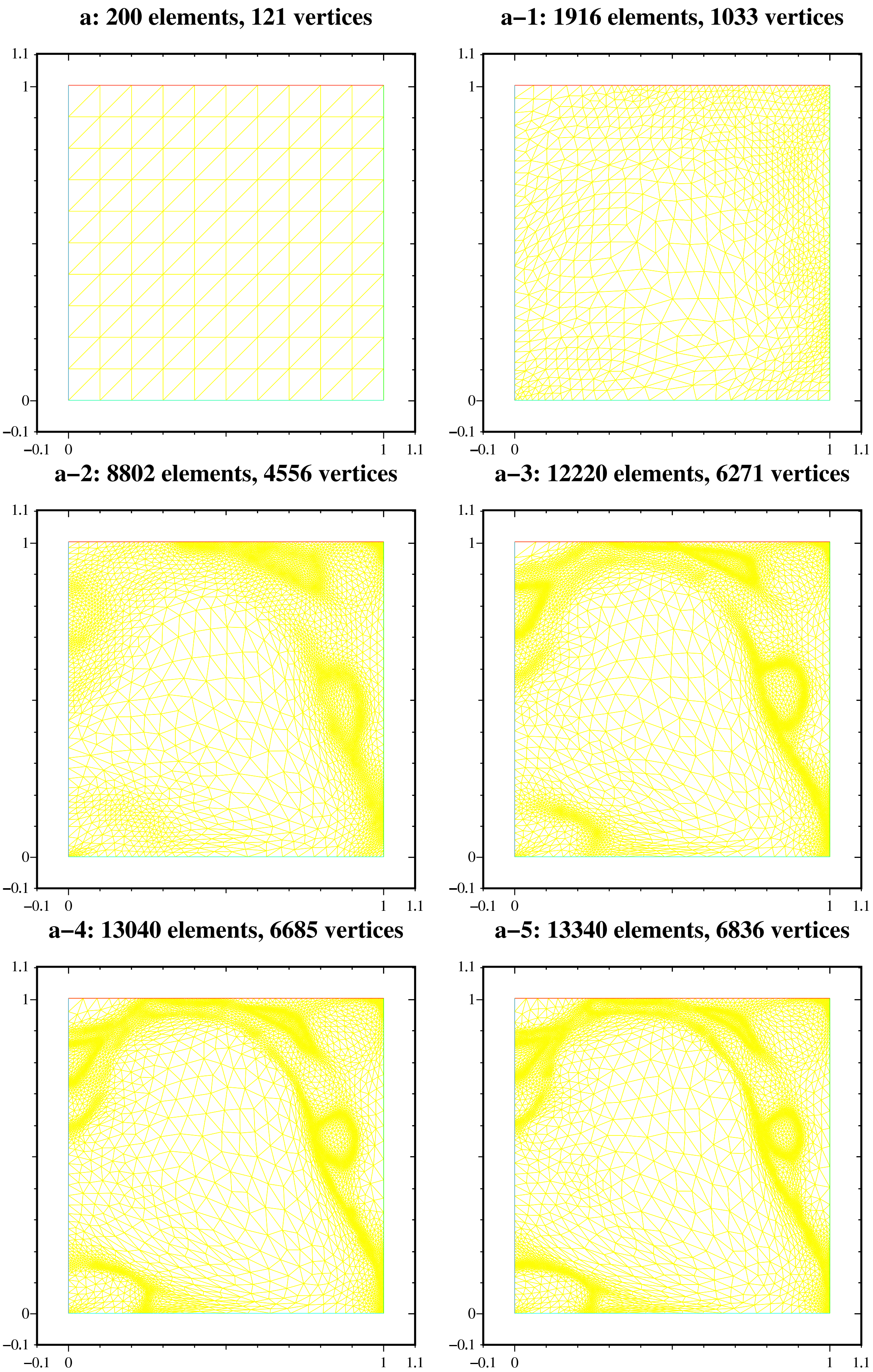


Figure 8: Adaptation d'un maillage $h = 1/10$ avec $Bi = 0.38$ et $\varepsilon = 10^{-2}$

5.5 Recherche du seuil critique Bi_c avec un maillage adaptatif

On procède comme tout-à-l'heure : on augmente petit-à-petit Bi et on visualise les zones rigides à chaque nouvelle valeur.

Les résultats sont portés sur la page ci-contre. Pour chaque valeur de Bi, on est parti d'un maillage régulier $h = 1/10$ et on a effectué 5 adaptations, en fixant ε à la valeur médiocre $10-2$ à cause des temps de calcul.

L'amélioration par rapport aux résultats obtenus avec des maillages réguliers est sans appel :

- cette fois, dès les petites valeurs de Bi, on arrive à faire apparaître la zone rigide située en bas à gauche du domaine.
- les frontières des zones rigides sont beaucoup plus lisses et plus nettes que tout-à-l'heure.
- la «fracture» qui apparaissait tout-à-l'heure par défaut du maillage dans la zone en haut à droite a disparu.

Cependant, comme tout-à-l'heure, on ne prétendra surtout pas donner une valeur exhaustive à Bi. En effet, on observe ici la même incohérence qu'avec le maillage régulier : les deux zones supérieures se touchent alors qu'elles ont encore des vitesses non parallèles. Cette difficulté est encore due à des problèmes de précision : il faudrait pouvoir lancer les calculs avec une valeur de ε bien plus petite (10^{-10} par exemple) pour espérer obtenir des résultats intéressants.

Hélas, les temps de calcul deviennent vite considérables, d'autant que la convergence de l'algorithme du lagrangien augmenté devient relativement lente quand on essaie d'atteindre de fortes précisions.

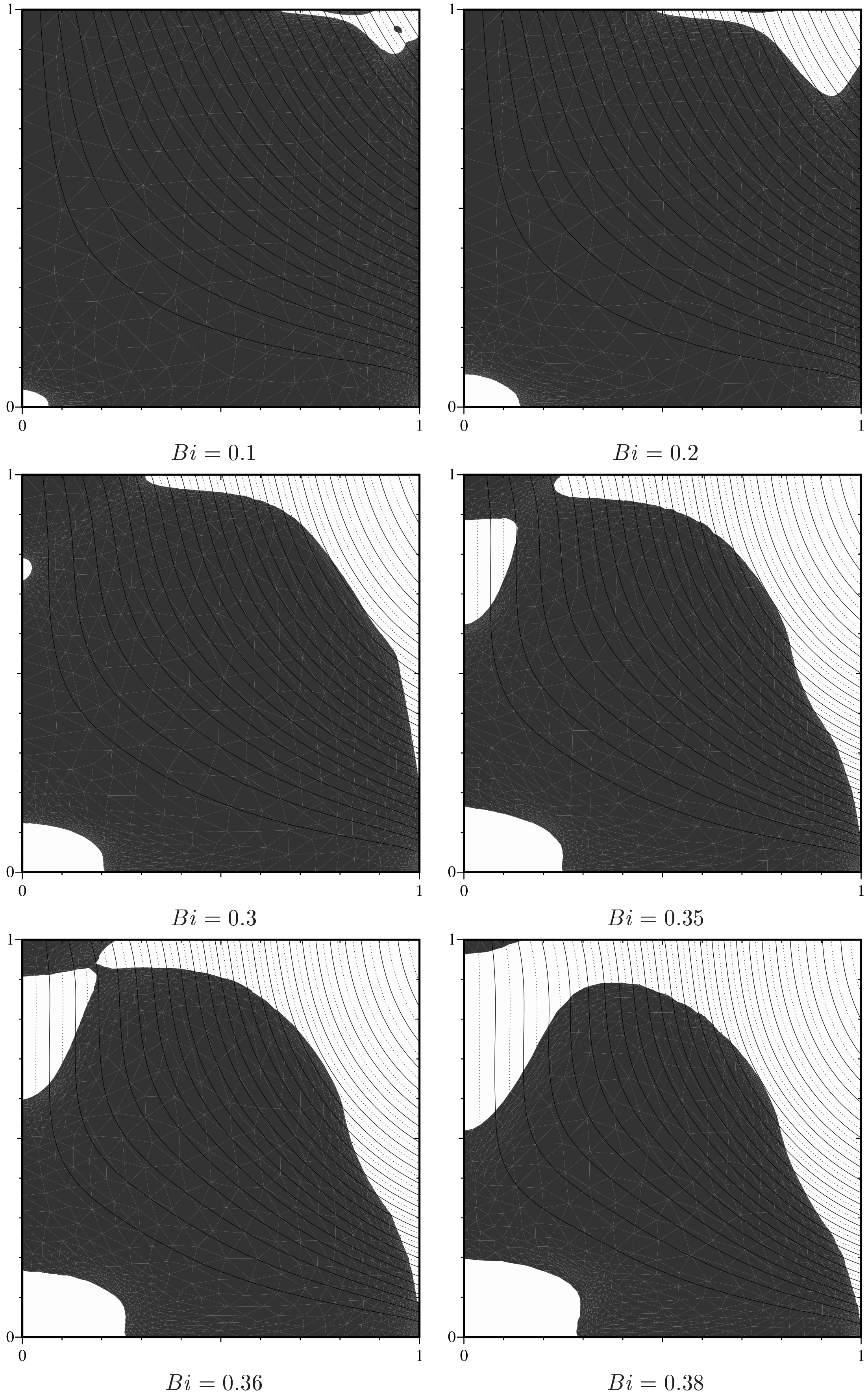


Figure 9: Zones rigides et fonction de courant pour différentes valeurs de Bi (maillage adaptatif)

6 Conclusion et perspectives

L'étude de charge limite pour le problème du talus est un problème délicat (voir [7]). On n'a pas encore réussi, à l'heure actuelle, à visualiser les zones rigides au moment où le fluide se bloque, i.e. lorsque le seuil de contraintes du fluide Bi est égal au seuil critique Bi_c. La méthode employée ici (lagrangien augmenté avec éléments finis adaptatifs) n'avait jamais envisagée jusqu'à présent.

Bien sûr, le problème est loin d'être résolu. Le travail effectué n'a pas cette prétention. Il constitue juste une première démarche dans l'utilisation des maillages adaptatifs comme méthode d'approche du problème.

Dans cette mesure, les résultats obtenus sont encourageants. Les difficultés rencontrées se situent désormais au niveau du temps de calcul. Il serait probablement intéressant de lancer des calculs de plusieurs jours pour essayer de faire tomber le résidu de l'algorithme à des précisions convenables, de l'ordre de 10^{-8} ou 10^{-10}.

Il peut être aussi envisagé d'utiliser un autre algorithme que celui du lagrangien augmenté, qui converge plus vite en σ (les contraintes du fluide). Cela permettrait de réduire les temps de calcul, et ainsi de pouvoir faire un plus grand nombre d'adaptations de maillage.

Pour ce qui est de l'application des résultats au contexte des avalanches, il serait intéressant d'utiliser un autre modèle plus fidèle au comportement de la neige que celui du fluide de Bingham. On peut penser par exemple au modèle de Mohr-Coulomb.

Bref, les possibilités de poursuivre ce travail sont nombreuses, et devraient pouvoir aboutir à des résultats intéressants assez rapidement .

A Programme principal

Fichier `bingham_talus_adapt.cc`

```
#include "rheolef.h"
#include "rheolef/uzawa_abtb.h"
using namespace std;

void solve(const geo& omegah, const Float Bi, field& uh, field& sigmah) {
  size_t i = 0;
  size_t max_iter_stokes = 500;
  Float  tol_stokes      = 1e-12;
  Float  r_stokes        = 1e+7;
  size_t max_iter = 3;
  Float  tol      = 1e-4;
  Float  r        = 1;
  Float facteur = 1/(2*(r+1));

  space V0h (omegah,"P2");
  space V1h (omegah,"P2");
    V0h.block("bottom");
    V0h.block("left");
    V1h.block("bottom");
  space Vh = V0h * V1h;
  space Qh (omegah, "P1");
  space Th (omegah, "P1d", "tensor");

  uh = interpolate(Vh, uh);
    uh[0]["left"] = 0;
    uh["bottom"] = 0;
  field ph     (Qh,0);
  field gammah (Th,0);
  sigmah = interpolate(Th, sigmah);
  field Duh    (Th,0);
  field fh (Vh);
    fh[0] = 0;
    fh[1] = -1;

  form D = .5*form(uh.get_space(), Th, "2D");
  form inv_mt (Th, Th, "inv_mass");
  form m (Vh, Vh, "mass");
  form a = form(Vh, Vh, "2D_D");
  form b (Vh, Qh, "div");  b = -b;

  do{
    field mgh = (m*fh) - D.trans_mult(sigmah - (2*r)*gammah);
    form ar = a + r_stokes*(trans(b)*b);
    vec<Float> f = (1/r)*mgh.u-(a.ub*uh.b);
    vec<Float> g = -(b.ub*uh.b);
    vec<Float> fr = f + r_stokes*(b.uu.trans_mult(g));
    ssk<Float> fact = ldlt(ar.uu);
    uzawa_abtb (ar.uu, fact, b.uu, uh.u, ph.u, fr, g,
```

```
                r_stokes, max_iter_stokes, tol_stokes, 0);

    Duh = inv_mt*(D*uh);
    field tauh = sigmah + (2*r)*Duh;

    vec<Float>:: iterator p_tauh_xx_u
      = tauh.u.begin()   + Th.start_unknown(0);
    vec<Float>:: iterator p_gammah_xx_u
      = gammah.u.begin() + Th.start_unknown(0);
    vec<Float>:: iterator p_tauh_xy_u
      = tauh.u.begin()   + Th.start_unknown(1);
    vec<Float>:: iterator p_gammah_xy_u
      = gammah.u.begin() + Th.start_unknown(1);
    vec<Float>:: iterator p_tauh_yy_u
      = tauh.u.begin()   + Th.start_unknown(2);
    vec<Float>:: iterator p_gammah_yy_u
      = gammah.u.begin() + Th.start_unknown(2);
    // un iterateur pour la fin de boucle:
    vec<Float>:: const_iterator end_xx_u
      = p_tauh_xx_u + Th.n_unknown_component(0);

    Float local_norm_tauh_u;
    for (; p_tauh_xx_u != end_xx_u;
           p_tauh_xx_u++,  p_tauh_xy_u++,  p_tauh_yy_u++,
           p_gammah_xx_u++,p_gammah_xy_u++,p_gammah_yy_u++){
      local_norm_tauh_u = sqrt(   sqr(*p_tauh_xx_u)
                                + 2*sqr(*p_tauh_xy_u)
                                +   sqr(*p_tauh_yy_u)  );
      if (local_norm_tauh_u > Bi ){
        *p_gammah_xx_u = facteur*(1-Bi/local_norm_tauh_u)*(*p_tauh_xx_u);
        *p_gammah_xy_u = facteur*(1-Bi/local_norm_tauh_u)*(*p_tauh_xy_u);
        *p_gammah_yy_u = facteur*(1-Bi/local_norm_tauh_u)*(*p_tauh_yy_u);
      }
      else{
        *p_gammah_xx_u = 0;
        *p_gammah_xy_u = 0;
        *p_gammah_yy_u = 0;
      }
    } // fin for
    sigmah = sigmah + (2*r)*(Duh-gammah);

    i++;
    cerr << i << "  " << norm(Duh-gammah) << endl;
  } while ( (norm(Duh-gammah)>tol) && (i<=max_iter) ); // fin do
} // fin solve

field criteria(const field uh, const field sigmah) {
  space Vh = uh.get_space();
  space Th = sigmah.get_space();
  form D = .5*form(Vh, Th, "2D");
  form inv_mt (Th, Th, "inv_mass");
  field Duh = inv_mt*(D*uh);
  field ch_carre = Duh(0,0)*sigmah(0,0)
                 + 2*(Duh(0,1)*sigmah(0,1))
```

```
                + Duh(1,1)*sigmah(1,1);
  ch_carre = sqrt(sqr(ch2)); // valeur absolue
  return sqrt(ch_carre);
}

int main(int argc, char**argv) {
  Float  Bi      = (argc > 2) ? atof(argv[2]) : 0;
  Float n_max    = (argc > 3) ? atof(argv[3]) : 5;
  adapt_option_type options;
  options.hcoef  = (argc > 4) ? atof(argv[4]) : 2;
  options.hmin   = (argc > 5) ? atof(argv[5]) : 0.004;
  options.hmax   = (argc > 6) ? atof(argv[6]) : 0.1;
  cerr << "# Bi :          " << Bi    << endl;
  cerr << "# n_max :       " << n_max << endl;

  cout << noverbose;
  geo omegah (argv[1]);
  cout << verbose;

  space V0h (omegah,"P2");
  space V1h (omegah,"P2");
    V0h.block("bottom");
    V0h.block("left");
    V1h.block("bottom");
  space Vh = V0h * V1h;
  space Th (omegah, "P1d", "tensor");

  field uh (Vh);
    uh[0]["left"] = 0;
    uh["bottom"] = 0;
  field sigmah (Th,0);

  for (size_t n = 0; n<=n_max; n++){
    solve(omegah, Bi, uh, sigmah);
    if (n==n_max) break;
    field ch = criteria(uh,sigmah);
    omegah = geo_adapt(ch, options);
    omegah.save();
    uh = interpolate(Vh, uh);
    cout << catchmark("crit"+itos(n)) << ch << endl;
    cout << catchmark("vit"+itos(n))  << uh << endl;
  }
  cout << catchmark("Bi")    << Bi << endl
       << catchmark("u")     << uh << endl
       << catchmark("sigma") << sigmah << endl;
  return 0;
}
```

Références

[1] F.Brezzi, M.Fortin: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, Berlin, 1991.

[2] G.Duvaut, J-L.Lions: *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.

[3] M.Fortin, R.Glowinski: *Augmented Lagrangian methods, Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. North-Holland, 1983.

[4] N.Roquet: *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles*. Laboratoire d'analyse numérique d'Orsay, 1996.

[5] N.Roquet, P.Saramito: *An adaptative finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder*. Prépublication soumis à Elsevier Preprint, 2002.

[6] P.Saramito, N.Roquet: *An adaptative finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190:5391-5412, 2001.

[7] R.Glowinski, P.Le-Tallec: *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*. Stud. Appl. Math., Soc. Ind. Appl. Math., 1989.

[8] R.Glowinski, J-L.Lions, R.Trémolières: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, 1981.