Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles

Nicolas Roquet[1]

Stage de fin de DEA **EDP et calcul scientifique** soutenu le 25 septembre 1996 sous la présidence de :

C. Jouron	Laboratoire Analyse Numérique et calcul scientifique Orsay

et un jury composé de:

H. Le Meur[2]	Laboratoire Analyse Numérique et calcul scientifique Orsay
R. Michel[2]	Société Groupe Informatique Scientifique et Technique
P. Saramito[2]	Laboratoire de Rhéologie Grenoble

Codes AMS : 49M30, 65M60, 76A05, 76D99
Mots clés : viscoplastique, lagrangien augmenté, simulation numérique, Bingham, éléments finis incompressible

[1]adresse électronique après soutenance : `Nicolas.Roquet@ujf-grenoble.fr`
[2]coresponsable de stage

Ce travail a été réalisé au sein de la société G.I.S.T. et dirigé par Richard Michel. Il s'agit d'une étude de faisabilité pour la réalisation d'un code de calcul, lequel fera ensuite l'objet d'une thèse au Laboratoire de Rhéologie de Grenoble. Cette étude s'est déroulée en collaboration avec la société G.I.S.T. et le Laboratoire de Rhéologie de Grenoble.

Je tiens vivement à remercier Richard Michel pour ses nombreux conseils et son aide précieuse. Son enthousiasme communicatif m'a permis d'oublier que je passais un été sans plage et m'a fait accepter la perspective d'un bronzage cathodique. Je remercie la société G.I.S.T. pour son accueil et sa confiance.

Je souhaite également remercier Pierre Saramito et Hervé Le Meur pour leur soutien et leur disponibilité.

Enfin, je remercie Claude Jouron d'accepter la présidence du jury pour la soutenance du rapport.

Table des matières

Introduction

Les fluides viscoplastiques recouvrent un éventail très large de matériaux. En effet, la boue, la purée où encore l'aluminium entrent dans cette catégorie. C'est pourquoi, ces fluides interviennent dans de très nombreux phénomènes, naturels ou non. Citons par exemple les problèmes d'environnement avec les avalanches et les coulées de boue, de lave, mais aussi l'industrie agro-alimentaire avec la pâte à biscuit, ou encore la fabrication des briques et des tuiles (argile).

Ainsi la complexité des phénomènes et les enjeux industriels motivent l'étude de ce type d'écoulements en vue de la simulation numérique. Nous proposons dans ce document une approche numérique avec la simulation d'écoulements viscoplastiques. A cette fin, nous proposons un nouvel algorithme de calcul des quantités caractérisant un tel écoulement. Cet algorithme s'appuie sur une formulation originale à quatre champs pour laquelle nous donnons un résultat d'existence et d'unicité. L'unicité est en fait partielle, la contrainte et la pression n'étant pas toujours définies de façon unique. Cette formulation à quatre champs découle d'une formulation à trois champs pour laquelle nous démontrons également un résultat d'existence et d'unicité (partielle). La discrétisation prend en compte une méthode d'éléments finis incompressibles. Enfin nous avons mis en œuvre un code de calcul afin de tester la méthode construite.

Dans la première section, nous construisons un problème aux limites en fusionnant deux présentations différentes de la modélisation d'écoulements de Bingham ; celle de Duvaut et Lions [5] d'une part et celle de Sofonéa et Ionescu [14] d'autre part.

Dans les sections deux et trois, nous proposons une formulation variationnelle du problème aux limites construit en première section. Dans la deuxième section, les champs inconnus sont le taux de déformation, la pression et la vitesse, dans la troisième section, le déviateur des contraintes de Cauchy est ajouté comme inconnue. Dans chacun des cas, nous présentons un cadre abstrait généralisant la formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité partielle. Nous verrons alors que la principale difficulté mathématique du problème consiste en la présence d'une inéquation variationnelle non-linéaire.

Dans nos démonstrations d'existence et unicité, nous avons utilisé des résultats (ou des techniques) concernant les inéquations variationnelles (théorème de Lions-Stampacchia [9] et [1]) mais aussi les formulations à plusieurs champs (Théorème de Brezzi [3], [6] et aussi [11] pour les problèmes à trois champs).

Dans la quatrième section, nous commençons par un bref rappel sur les méthodes de lagrangien augmenté (ces méthodes sont détaillées dans [7] et [8]). Ensuite, nous construisons un algorithme basé sur ces méthodes appliquées à la formulation variationnelle de la section trois. Nous verrons en particulier comment l'inéquation variationnelle peut être traitée par un calcul explicite.

La section cinq présente la méthode de discrétisation choisie. Après avoir écrit une formulation mixte sur le problème de Stokes (voir [6]) puis des équations tensorielles, nous décrivons les schémas discrets mis en œuvre et provenant d'une méthode d'éléments finis mixte.

Enfin, dans la sixième section, nous donnons les résultats obtenus les plus significatifs, en faisant varier divers paramètres, numériques ou intrinsèques au fluide et à son écoulement. En particulier nous considèrons le comportement du fluide dans une cavité entrainée pour des seuils de plasticité grands, ce qui, à notre connaissance n'a jamais été fait.

Notations

Généralités

- Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
- Γ : Frontière de Ω.
- η : Viscosité.
- g : Seuil de plasticité.
- X' : Dual topologoique de X (pour X un espace de Banach).
- A^* : Adjoint au sens de la dualité de l'opérateur A défini sur un espace de Banach X.

Espaces Fonctionnels

- $L^2(\Omega)$: Espace hilbertien des fonctions scalaires de carré intégrable.
- $L^2(\Omega)^{2\times 2}_S$: Espace hilbertien des tenseurs symétriques dont les composantes sont dans $L^2(\Omega)$.
- $(.,.)$, $(.,.)_\Omega$, $(.,.)_{0,\Omega}$: Produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^2$ ou $L^2(\Omega)^{2\times 2}_S$.
- $L^2_0(\Omega)$: Fonctions de $L^2(\Omega)$ dont l'intégrale est nulle.
- $H(div;\Omega)$: Fonctions de $L^2(\Omega)^2$ dont la divergence (au sens faible) est dans $L^2(\Omega)$.
- $H_0(div;\Omega)$: Fonctions de $H(div;\Omega)$ de composante normale nulle.
- $\langle .,.\rangle_{X',X}$, $\langle .,.\rangle$: Crochet de dualité entre X' et X, X étant un espace de Banach.

Champs

- u : Vecteur vitesse dans les section (1-4), composante horizontale de la vitesse dans la section (5).
- v : Composante verticale de la vitesse dans la section (5) (fonction test ailleurs).
- p : Pression.
- D, $D(u)$: Tenseur des taux de déformation.
- γ : $2\eta D$ dans la section (2), D dans les sections (3-5).
- σ_{tot} : Tenseur des contraintes de Cauchy.
- σ : défini par la relation $\sigma_{tot} = -pI + \sigma$ (i.e. déviateur de σ_{tot} dans les zones fluides).
- σ_p : Tenseur des contraintes purement plastiques.

1 Présentation du problème

1.1 Modélisation d'un écoulement de Bingham

Une présentation classique des équations décrivant l'écoulement d'un fluide de Bingham est faite dans [5]. Dans cette section, nous suivons ces auteurs, puis nous proposons une présentation alternative et moins classique en suivant Sofonéa et Ionescu [14]. Cette seconde description du fluide donne des informations supplémentaires sur la structure mathématique des équations.

Commençons donc, avec Duvaut-Lions, par dire qu'un fluide de Bingham est un fluide rigide visco-plastique, c'est-à-dire un milieu continu particulier. Il obéit en tant que tel aux lois générales de la mécanique des milieux continus et à des lois de comportement particulières.

Nous adoptons dans la suite les notations classiques suivantes : σ_{tot}, u et D désignent respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy, la vitesse de l'écoulement et le tenseur des taux de déformation.

Les équations générales du mouvement d'un milieu continu dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} = div\ \sigma_{tot} + f_\Omega \text{ dans } \Omega,$$

$$\sigma_{tot}\ \vec{n} = f_\Gamma \text{ sur } \Gamma,$$

où :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u.$$

On suppose de plus la densité constante, la conservation de la masse conduit alors à l'hypothèse d'incompressibilité :

$$div\ u = 0$$

Par ailleurs, on décrit les lois de comportement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible en définissant la fonction de dissipation d'énergie $\mathcal{E}$ qui est de la forme :

$$\mathcal{E} = \sigma_{tot,\ ij} D_{ij}$$

On suppose de plus qu'on peut décomposer cette énergie en :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1(D) + \mathcal{E}_2(D)$$

où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont des fonctions positivement homogènes d'ordre 1 et 2 respectivement, par rapport aux composantes du tenseur D des taux de déformation.

On donne alors les composantes de σ_{tot} par la relation :

$$\sigma_{tot\ ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial D_{ij}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial D_{ij}}.$$

Le cas particulier du matériau de Bingham est obtenu en astreignant les fonctionnelles $\mathcal{E}_i$ à ne dépendre que du deuxième invariant $D_{II} = (1/2)D_{ij}D_{ij}$ du tenseur des taux de déformation $D(u)$ suivant la loi constitutive :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 2g(D_{II})^{1/2} \\ \mathcal{E}_2 &= 4\eta D_{II} \end{aligned}$$

où :

- η est la viscosité du fluide,

- g est le seuil de plasticité du fluide,

du point de vue rhéologique, $\mathcal{E}_1$ représente la partie purement plastique et $\mathcal{E}_2$ la partie purement visqueuse de la fonctionnelle de dissipation $\mathcal{E}$.

On obtient alors la loi de comportement du fluide de Bingham :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= -pI + \sigma \\ \sigma &= g\frac{D}{(D_{II})^{1/2}} + 2\eta D \end{aligned} \tag{1}$$

cette expression n'a de sens que dans la mesure où D_{II} non nul. Dans le cas contraire, le tenseur σ est indéterminé et D_{II} étant nul, le mouvement est celui d'un solide.
Le scalaire $-p$ représente la partie sphérique du tenseur, identifiée à une pression.

Malgré l'indétermination de σ_{tot}, il est possible d'obtenir plus d'information en inversant cette dernière relation, c'est ce que nous faisons maintenant.

Si D_{II} est non nul, on pose :

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij},$$

on a alors, d'après (1) :

$$\sigma_{II} = \left(g + 2\eta D_{II}^{1/2}\right)^2,$$

on en déduit $\sigma_{II}^{1/2} \geq g$, auquel cas (1) s'inverse en :

$$D = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{g}{\sigma_{II}^{1/2}}\right)\sigma.$$

Si D_{II} est nul, σ est indéterminé, mais $\sigma_{II}^{1/2} \leq g$ car, sinon, la dernière inégalité fournit D avec D_{II} strictement positif.

Finalement, les lois de comportement du fluide de Bingham s'énoncent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{II} < g & \Longleftrightarrow D = 0 \\ \sigma_{II} \geq g & \Longleftrightarrow D = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{g}{\sigma_{II}^{1/2}}\right)\sigma \end{array} \right. \tag{2}$$

Remarquons que ces équations expriment l'effet de seuil : le fluide se déforme lorsque la fonction de contrainte σ_{II} atteint le seuil de plasticité g.

On peut aboutir à (1) et (2) à partir du modèle présenté dans [14].

Celui-ci introduit la relation constitutive sous la forme :

$$\sigma = 2\eta D(u) + \sigma_p$$

où σ_p est le tenseur déviateur représentant la contribution purement plastique. Plus précisément, il est possible de relier σ_p et $D(u)$ de manière non-linéaire :

$$D(u) = 2\lambda\sigma_p \text{ et } \parallel \sigma_p \parallel \leq g,$$

la fonction λ est alors définie par :

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \parallel \sigma_p \parallel < g \text{ ou si } \parallel \sigma_p \parallel = g \text{ et } \frac{d}{dt}[\parallel \sigma_p \parallel^2 - g^2] < 0 \\ \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\parallel \sigma \parallel}{g} - 1\right) & \text{si } \parallel \sigma_p \parallel = g \text{ et } \frac{d}{dt}[\parallel \sigma_p \parallel^2 - g^2] = 0 \end{array} \right.$$

Ceci signifie que $D(u)$ n'est non nul que si σ_p est sur la sphère de Von Mises $\| \sigma_p \| = g$ et y reste (du moins localement en temps durant la processus). Sofonéa et Ionescu montrent que ces équations peuvent s'écrire avec D et σ uniquement, sous la forme (2). Ils démontrent également que (2) équivaut à dire que :

$$(2\eta D(u), \xi - D(u)) + \int_\Omega \frac{g}{\sqrt{2}} \| \xi(x) \| \, dx - \int_\Omega \frac{g}{\sqrt{2}} \| D(u(x)) \| \, dx \geq (\sigma, \xi - D(u)) \ , \ \forall \xi \in L^2(\Omega)_S^{N\times N},$$

ou encore avec une écriture plus condensée :

$$\sigma \in \partial\phi(D) \ , \ \phi(D) = 2\eta D_{II} + g(D_{II})^{1/2} = \frac{1}{2}\mathcal{E}(D). \tag{3}$$

1.2 Position du problème, orientation

Nous allons nous restreindre à des écoulements stationnaires et suffisamment lents pour supposer que la dérivée particulaire est nulle. Les équations que nous venons de décrire posent donc le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rc} div(\sigma_{tot}) + f_\Omega = & 0 \\ \sigma_{tot} = & \sigma - pI \\ \sigma \in & \partial\phi(D(u)) \\ div\ u = & 0 \end{array} \right.$$

et nous considèrerons des conditions aux limites de type Dirichlet non-homogène sur la vitesse.

Dans cette section, nous avons mis en évidence, sous forme mathématique avec (1), une propriété importante du fluide de Bingham qui est l'effet de seuil. Il apparaît alors comme naturel, lorsqu'on souhaite effectuer une simulation numérique de l'écoulement, d'établir un algorithme de calcul permettant la détermination directe de la vitesse et la pression, mais aussi le taux de déformation (c'est-à-dire $D(u)$) qui caractérise les zones rigides lorsqu'il est nul. A cette fin, nous proposons, dans les sections qui suivent, deux formulations variationnelles, puis un algorithme basé sur un calcul de point-selle.

2 Formulation Taux de déformation-Vitesse-Pression

Dans cette section nous proposons une formulation variationnelle à trois champs inconnus, puis nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité. Cette formulation nous est apparue initialement comme étant la plus "naturelle", dans la mesure où ses inconnues sont exactement les quantités que l'on cherche à déterminer.
Afin d'utiliser un élément fini de type Saramito (voir [12],[13]) nous utiliserons, en fait une formlation variationnelle à quatre champs.

2.1 Formulation variationnelle

Nous supposons dans toute la suite que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et notons Γ sa frontière. Celle-ci se décompose en deux parties, Γ_N et Γ_D (de mesures non nulle), sur lesquelles nous imposons les conditions aux limites suivantes :

- $u = u_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ sur Γ_D (Dirichlet non-homogène)
- $\sigma_{tot} \vec{n} = f_\Gamma$ sur Γ_N

Les quantités f_Ω et f_Γ sont des densités de force, respectivement de volume et de surface. Compte tenu des conditions aux limites, il est également utile de définir l'espace suivant :

$$H^1_D(\Omega) \stackrel{def}{=} \{v \in H^1(\Omega); v_{|\Gamma_D} = 0\}$$

Récapitulons les équations gouvernantes établies dans la section précédente :

$$\left\{ \begin{array}{rc} \gamma - 2\eta D(u) = & 0 \\ div(\sigma - pI) + f_\Omega = & 0 \\ \sigma \in & \partial\phi(D(u)) \\ div\ u = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

où ϕ est définie par la relation (3).
Considèrant l'équation d'équilibre et une fonction test $w \in H^1_D(\Omega)^2$, nous obtenons, après intégration par parties :

$$(\sigma, D(w)) - (p, div\ w) = (f_\Omega, w) + (f_\Gamma, w_{|\Gamma})_{0,\Gamma}$$

Par ailleurs, la relation constitutive s'écrit (par définition d'un sous-différentiel) :

$$(2\eta D(u), \xi - D(u)) + \tilde{j}(\xi) - \tilde{j}(D(u)) \geq (\sigma, \xi - D(u)) \ , \forall \xi \in L^2(\Omega)^{2\times 2}_s,$$

avec :

$$\tilde{j}(\xi) = \int_\Omega \frac{g}{\sqrt{2}} \parallel \xi \parallel dx,$$

de sorte qu'en choisissant :

$$\begin{array}{rcl} v & \in & H^1_D(\Omega)^2, \\ \xi & = & D(v), \\ w & = & v - u, \end{array}$$

et en posant :

$$\langle l, w \rangle = (f_\Omega, w) + (f_\Gamma, w_{|\Gamma})_{0,\Gamma} \ , \ w \in H^1_D(\Omega)^2,$$

il vient l'inéquation variationnelle suivante :

$$(\gamma, D(v-u)) + \tilde{j}(D(v)) - \tilde{j}(D(u)) - (p, div(v-u)) \ \geq \ \langle l, v-u \rangle.$$

Nous aboutissons alors à une première formulation faible "Taux de déformation-Vitesse-Pression" (dans laquelle nous avons éliminé le tenseur σ) :

Chercher (γ, u, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\gamma,\tau) - (2\eta D(u),\tau) = & 0 & , \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2}, \\ (\gamma, D(v-u)) + \tilde{j}(D(v)) - \tilde{j}(D(u)) - (p, div(v-u)) \geq & \langle l, v-u \rangle & , \forall v \in H_D^1(\Omega)^2, \\ (div\ u, q) = & 0 & , \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ u_{|\Gamma_D} = & u_D & . \end{array} \right.$$

Pour donner un sens dans l'espace homogène $H_D^1(\Omega)^2$ à la formulation variationnelle précédente, on utilise la technique classique de relèvement des conditions aux limites. En effet, l' existence de $u_1 \in H^1(\Omega)^2$ vérifiant $u_{1|\Gamma_D} = u_D$ est connue, nous posons alors :

$$u = u_0 + u_1 \text{ , avec } u_0 \in H_D^1(\Omega)^2,$$

puis en changeant v en $v + u_1$ et $\tilde{j}$ en j par l'opération $j(\tau) = \tilde{j}(\tau + D(u_1))$, nous obtenons finalement le problème :

Chercher $(\gamma, u_0, p) \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \times H_D^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\gamma,\tau) - (2\eta D(u_0),\tau) = & (D(u_1),\tau) & , \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \\ (\gamma, D(v-u_0)) + j(D(v)) - j(D(u_0)) - (p, div(v-u_0)) \geq & \langle l, v-u_0 \rangle & , \forall v \in H_D^1(\Omega)^2 \\ (div\ u_0, q) = & (div\ u_1, q) & , \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{array} \right.$$

2.2 Un résultat abstrait d'existence et unicité

Rappelons avant tout quelques notations usuelles qui seront d'un usage fréquent dans la suite.

- Soient X et M deux espaces de Hilbert, si Π est un opérateur de X dans M', on note V_Π son noyau.
- Nous dirons qu'une forme bilinéaire ϕ définie sur $X \times M$ satisfait la condition "inf-sup" si l'une des conditions suivantes est satisfaite :
  - $\exists\ \delta > 0$, $\sup\limits_{x\in X} \dfrac{\phi(x,\mu)}{\| x \|_X} \geq \delta \| \mu \|_M \ \ \forall \mu \in M,$
  - L'opérateur $\Phi \in \mathcal{L}(X, M')$ défini par : $\langle \Phi x, \mu \rangle = \phi(x,\mu)$ est un isomorphisme de $V_\Phi^\perp$ dans M' et $\| Bx \|_{M'} \geq \delta \| x \|_X$, $\forall x \in V_\Phi^\perp$,
  - $\Phi^* \in \mathcal{L}(M, X')$ défini par : $\langle x, \Phi^* \mu \rangle = \phi(x,\mu)$ est un isomorphisme de M dans V_Φ^0 et $\| B^*\mu \|_{X'} \geq \delta \| \mu \|_M$, $\forall \mu \in M$.

Soient maintenant T, V et Q trois espaces de Hilbert, a, b, c des formes bilinéaires et continues respectivement sur $T \times T$, $T \times V$ et $V \times Q$ et enfin j une fonctionnelle convexe propre et s.c.i. sur V.

Dans cette section, nous nous attachons à résoudre le problème suivant, désigné par $(\mathcal{P}_3)$:

Trouver $(\gamma, u, p) \in T \times V \times Q$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rll} a(\gamma,\tau) - b(\tau,u) = & \langle l_T, \tau\rangle & ,\forall \tau \in T \\ b(\gamma, v-u) - c(v-u,p) + j(v) - j(u) \geq & \langle l_V, v-u\rangle & ,\forall v \in V \\ c(u,q) = & \langle l_Q, q\rangle & ,\forall q \in Q \end{array}\right.$$

Nous verrons plus loin que ce cadre abstrait est bien adapté à la situation décrite dans la section précédente. Pour cela, nous utiliserons, après l'avoir démontré, le

Théorème 2.1 *On fait les hypothèses :*

(h1) T-ellipticité : $a(\gamma,\gamma) \geq \alpha \parallel \gamma \parallel_T^2 \ , \forall \gamma \in T$,

(h2) b vérifie "inf-sup" sur $T \times V_C$: $\displaystyle\sup_{\tau \in T} \frac{b(\tau, v)}{\parallel \tau \parallel_T} \geq \beta_1 \parallel v \parallel_V \ , \forall v \in V_C$,

(h3) c vérifie "inf-sup" sur $V \times Q$: $\displaystyle\sup_{v \in V} \frac{c(v,q)}{\parallel v \parallel_V} \geq \beta_2 \parallel q \parallel_Q \ , \forall q \in Q$.

On suppose de plus que j peut être approchée par une fonctionnelle j_ε*, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) j_ε *est convexe, différentiable, on note* j'_ε *sa dérivée,*

(ii) $0 \leq j_\varepsilon(v) - j(v) \leq C_2 \varepsilon \ , \forall v \in V$,

(iii) $\parallel j'_\varepsilon(v) \parallel_{V'} \leq C_3 \ , \forall v \in V$.

Alors il existe un unique couple (γ, u) *de* $T \times V$ *et un élément p de l'espace Q vérifiant le problème* $(\mathcal{P}_3)$.

Remarque 2.1 • *Les hypothèses sur b et c rappellent celles d'un théorème établi dans [11]. Celui-ci considère le problème linéaire* ($j = 0$) *et montre alors que* (h1) *peut être remplacée par l'ellipticité de a sur l'ensemble* $V_{BC} = \{\tau \in T \ ; \ b(\tau, v) = 0 \ , \ \forall v \in V_C\}$*. Nous n'avons pas réussi à prouver l'existence et l'unicité avec une telle hypothèse, la technique utilisée exigeant l'ellipticité de a sur T tout entier.*

- *Nous utiliserons, dans la section suivante, le théorème de [11] afin de prouver un autre résultat d'existence et d'unicité pour un problème variationnel à quatre champs.*

La démonstration de ce résultat repose sur la stratégie adoptée par [1] pour généraliser le théorème de Brezzi (voir [1] et [3], [6]). Elle peut se décomposer en trois étapes (qui sont détaillées dans les prochaines sous-sections) :

1. On commence par la résolution d'un problème auxilliaire, dénoté par $(\mathcal{Q}_2)$ et qui s'énonce :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (\gamma, u) \in T \times V_C \text{ tel que :} & \\ \qquad a(\gamma,\tau) - b(\tau,u) = \langle l_T, \tau\rangle \quad \forall \tau \in T, & (5) \\ \qquad b(\gamma, v-u) + j(v) - j(u) \geq \langle l_V, v-u\rangle \quad \forall v \in V_C. & (6) \end{array}\right.$$

2. On démontre ensuite l'existence d'une solution pour une régularisation de $(\mathcal{P}_3)$. On introduit en effet la fonctionnelle différentiable j_ε dans l'inéquation, on désigne alors par $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$ le problème régulier suivant :

$$\left\{\begin{array}{rll} \multicolumn{3}{l}{\text{Trouver } (\gamma_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in T \times V \times Q \text{ tel que :}} \\ a(\gamma_\varepsilon, \tau) - b(\tau, u_\varepsilon) & = \langle l_T, \tau \rangle & \forall \tau \in T \\ b(\gamma_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - c(v - u_\varepsilon, p_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) & \geq \langle l_V, v - u_\varepsilon \rangle & \forall v \in V \\ c(u_\varepsilon, q) & = \langle l_Q, q \rangle & \forall q \in Q \end{array}\right.$$

Ce problème est plus facile à résoudre que $(\mathcal{P}_3)$, car, j_ε est différentiable. En effet, considérons $(\mathcal{Q}_2)$ régularisé de manière analogue, on peut transformer l'inéquation en une équation où apparait j'_ε. La condition "inf-sup" portant sur b donne alors l'existence de $p_\varepsilon \in Q$ vérifiant $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$.

3. On conclut en passant à la limite dans le problème régularisé $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$.

2.2.1 Résolution du problème auxilliaire $(\mathcal{Q}_2)$

Démontrons le

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses :*

1) a est T-elliptique, i.e. $a(\tau, \tau) \geq \alpha \parallel \tau \parallel_T^2, \forall \tau \in T$,

2) b vérifie la condition inf-sup, i.e. $\sup\limits_{\tau \in T} \dfrac{b(\tau, v)}{\parallel \tau \parallel_T} \geq \beta \parallel v \parallel_V, \forall v \in V_C$

Le problème $(\mathcal{Q}_2)$ possède une unique solution.

démonstration

Nous allons exprimer γ en fonction de u et remplacer γ dans (6) afin d'obtenir une nouvelle inéquation de variable u.

Pour cela nous utilisons le théorème de Lax-Milgram, d'après lequel il existe un unique $\gamma = \gamma(u) \in T$ vérifiant (5). (En effet a est bilinéaire, continue et elliptique sur T). Plus précisément, utilisons le fait que $A^{-1} \in \mathcal{L}(T', T)$ et que :

$$\gamma(u) = A^{-1} l_T + A^{-1} B^* u \tag{7}$$

$$\parallel A^{-1} \parallel \leq \frac{1}{\alpha} \tag{8}$$

$$\langle \phi, A^{-1}\phi \rangle \ \geq \ \alpha \parallel A^{-1}\phi \parallel_T \ , \forall \phi \in T \tag{9}$$

Nous avons alors, d'après (7) :

$$\begin{aligned} b(\gamma, v - u) &= \langle B\gamma, v - u \rangle \\ &= \langle BA^{-1}B^* u, v - u \rangle + \langle BA^{-1} l_T, v - u \rangle \end{aligned}$$

et si on pose :

- $a_2(u, v) = \langle A_2 u, v \rangle$, avec $A_2 = BA^{-1}B^* \in \mathcal{L}(V_C, V'_C)$ et $\parallel A_2 \parallel \leq \dfrac{\parallel B \parallel \parallel B^* \parallel}{\alpha}$
- $\chi = l_V + BA^{-1} l_T$, où $\chi \in V'_C$ et $\parallel \chi \parallel \leq \parallel l_V \parallel + \dfrac{\parallel B \parallel \parallel l_T \parallel}{\alpha}$

alors l'inéquation (6) devient :

$$a_2(u, v-u) + j(v) - j(u) \;\geq\; \langle \chi, v-u\rangle, \forall v \in V_C$$

C'est une inéquation variationnelle de seconde espèce. Pour la résoudre on va utiliser le théorème de Lions-Stampacchia [5]. En effet j est convexe, propre et s.c.i., a_2 est une forme bilinéaire continue sur V_C. Il reste donc à vérifier la V_C-ellipticité de a_2, elle découle de (8) et de (9), en effet :

$$\begin{aligned} a_2(v,v) &= \langle BA^{-1}B^*v, v\rangle \\ &= \langle B^*v, A^{-1}(B^*v)\rangle \\ &\geq \alpha \parallel A^{-1}(B^*v) \parallel_T^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{\parallel A \parallel^2} \parallel B^*v \parallel_{T'}^2, \end{aligned}$$

et la condition "inf-sup" sur b nous apprend que B^* est un isomorphisme de M dans V_B^0 et : $\parallel B^*v \parallel_{T'} \geq \beta \parallel v \parallel_V, \forall v \in V_C$, alors on a finalement :

$$a_2(v,v) \geq \frac{\alpha\beta^2}{\parallel A \parallel^2} \parallel v \parallel_V^2$$

ce qui achève l'étape 1.

□

2.2.2 Existence d'une solution pour le problème régularisé

Cherchons à présent à montrer l'existence d'une solution pour $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$.

Commençons par transformer $(\mathcal{P}_3)$ en remarquant que la condition inf-sup sur la forme c signifie que l'opérateur C est un isomorphisme de $V_C^\perp$ dans Q' et donc il existe un unique élément u_1 de $V_C^\perp$ tel que $Cu_1 = l_Q$. On écrit alors u sous la forme : $u = u_1 + u_0$, avec u_0 dans V_C.

La nouvelle écriture du problème $(\mathcal{P}_3)$ est alors donnée par :

Trouver $(\gamma, u_0, p) \in V \times V_C \times Q$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rll} a(\gamma,\tau) - b(\tau,u_0) & = \langle l_T, \tau\rangle + b(\tau, u_1) & \forall \tau \in T, \\ b(\gamma, v-u_0) - c(v-u_0, p) + j(v+u_1) - j(u_0+u_1) & \geq \langle l_V, v-u_0\rangle & \forall v \in V, \\ c(u_0, q) & = 0 & \forall q \in Q. \end{array} \right.$$

Nous adopterons les notations suivantes :

- $l_1 = l_T + B^*u_1$,
- $j_1(v) = j(v+u_1), \forall v \in V_C$,

où nous avons défini $j_{1\varepsilon}$ approchant j_1 selon les hypothèses (i)-(iii) du théorème (2.1).
Considèrons ensuite les deux problèmes auxilliaires suivants :
d'une part :

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{Trouver } (\gamma, u_0) \in T \times V_C \text{ tel que :} \\ a(\gamma,\tau) - b(\tau, u_0) = \langle l_1, \tau\rangle \quad \forall \tau \in T \\ b(\gamma, v-u_0) + j_1(v) - j_1(u_0) \geq \langle \chi, v-u_0\rangle \quad \forall v \in V_C \end{array} \right. ,$$

et d'autre part sa régularisation :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\gamma_\varepsilon, u_{0\varepsilon}) \in T \times V_C \text{ tel que :} \\ \qquad a(\gamma_\varepsilon, \tau) - b(\tau, u_{0\varepsilon}) = \langle l_1, \tau \rangle \quad \forall \tau \in T & (10) \\ b(\gamma_\varepsilon, v - u_{0\varepsilon}) + j_{1\varepsilon}(v) - j_{1\epsilon}(u_{0\varepsilon}) \geq \langle l_V, v - u_{0\varepsilon} \rangle \quad \forall v \in V_C, & (11) \end{cases}$$

Nous savons, par hypothèse, que les conditions suivantes sont vérifiées :

- j_1 est convexe propre et s.c.i.,
- a est T-elliptique, bilinéaire et continue sur $T \times T$,
- $\sup_{\tau \in T} \dfrac{b(\tau, v)}{\| \tau \|_T} \geq \beta \| v \|_V \ \forall v \in V_C$,

donc nous savons, d'après le lemme (2.1) appliqué avec j_1 et l_1, que $\gamma, \gamma_\varepsilon, u_0, u_{0\varepsilon}$ existent. De plus, comme $j_{1\varepsilon}$ est différentiable, l'inéquation devient une équation et le problème régularisé se reformule comme suit :

Trouver $(\gamma_\varepsilon, u_{0\varepsilon}) \in T \times V_C$ tel que :

$$\begin{cases} a(\gamma_\varepsilon, \tau) - b(\tau, u_{0\varepsilon}) = \langle l_1, \tau \rangle \quad \forall \tau \in T \\ b(\gamma_\varepsilon, v) + \langle j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}), v \rangle = \langle l_V, v \rangle \quad \forall v \in V_C \end{cases} \tag{12}$$

La deuxième équation de (12) signifie que $l_V - B\gamma_\varepsilon - j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}) \in V_C^o$ donc par la condition inf-sup vérifiée par C, il existe un unique p_ε dans Q tel qu'on ait, dans V' :

$$C^* p_\varepsilon = l_V - B\gamma_\varepsilon - j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}), \tag{13}$$

ce qui équivaut à écrire que :

$$b(\gamma_\varepsilon, v) - c(v, p_\varepsilon) + \langle j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}), v \rangle = \langle l_V, v \rangle \ , \forall v \in V.$$

Finalement, si on pose $u_\varepsilon = u_1 + u_{0\varepsilon}$, alors $(\gamma_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ satisfait $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$.

□

Remarque 2.2 *La manipulation effectuée sur $(\mathcal{Q}_{2\varepsilon})$ n'est pas réalisable sur (Q_2) du fait de l'abscence de différentiabilité de j, ceci justifie donc la régularisation du problème $(\mathcal{P}_3)$.*

Nous avons montré l'existence d'une solution pour le problème régularisé. Pour conclure, il reste à vérifier que $(\gamma_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ converge (en un sens que nous allons préciser) vers une solution de $(\mathcal{P}_3)$; c'est l'objet de la troisième étape.

2.2.3 Résolution de $(\mathcal{P}_3)$

Montrons tout d'abord la convergence forte de γ_ε vers γ et de u_ε vers u.

Faisons la différence de (5) et de (10), on obtient :

$$a(\gamma - \gamma_\varepsilon) = b(\tau, u_0 - u_{0\varepsilon}) \ , \forall \tau \in T, \tag{14}$$

puis en choisissant en particulier $\tau = \gamma - \gamma_\varepsilon$ et en remarquant que a est T-elliptique , on obtient successivement les relations :

$$a(\gamma - \gamma_\varepsilon, \gamma - \gamma_\varepsilon) = b(\gamma - \gamma_\varepsilon, u_0 - u_{0\varepsilon}),$$

$$-\alpha \parallel \gamma - \gamma_\varepsilon \parallel_T^2 \geq b(\gamma - \gamma_\varepsilon, u_{0\varepsilon} - u_0). \tag{15}$$

D'autre part, on choisit $v = u_{0\varepsilon}$ dans (6) et $v = u_0$ dans (11), en additionnant les deux inéquations, on trouve :

$$b(\gamma - \gamma_\varepsilon, u_0 - u_{0\varepsilon}) + (j_{1\varepsilon}(u_0) - j_1(u_0)) + (j_1(u_{0\varepsilon}) - j_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon})) \geq 0, \tag{16}$$

donc en reportant (15) dans (16) on obtient :

$$\alpha \parallel \gamma - \gamma_\varepsilon \parallel_T^2 \leq (j_{1\varepsilon}(u_0) - j_1(u_0)) + (j_1(u_{0\varepsilon}) - j_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}))$$

de plus, la propriété (ii) permet d'écrire :

$$\parallel \gamma - \gamma_\varepsilon \parallel_T \leq (C_2 \varepsilon / \alpha)^{1/2} \tag{17}$$

ce qui donne la convergence forte de γ_ε vers γ.

Remarquons ensuite que :

$$u_\varepsilon - u = u_{0\varepsilon} - u_0 \in V_C$$

et donc :

$$\beta \parallel u_\varepsilon - u \parallel_V \leq \sup_{\tau \in T} \frac{b(\tau, u_{0\varepsilon} - u_0)}{\parallel \tau \parallel_T}$$

ce qui donne, en utilisant (14) et (17), la convergence forte de u_ε vers u :

$$\parallel u_\varepsilon - u \parallel_V \leq \frac{\parallel a \parallel}{\beta} \parallel \gamma - \gamma_\varepsilon \parallel_T \leq \frac{\parallel a \parallel}{\beta} (C_2 \varepsilon / \alpha)^{1/2}.$$

Vérifions maintenant que $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ possède une sous-suite qui converge dans Q au sens de la topologie faible (voir [2] et [17]). En utilisant l'hypothèse inf-sup faite sur c, (13) et les propriétés caractérisant $j_{1\varepsilon}$, on trouve :

$$\begin{array}{rcl}
\beta \parallel p_\varepsilon \parallel_Q & \leq & \sup_{v \in V} \dfrac{\langle v, C^* p_\varepsilon \rangle}{\parallel v \parallel_V} \\
& = & \sup_{v \in V_C} \dfrac{\langle v, l_V - B\gamma_\varepsilon - j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}) \rangle}{\parallel v \parallel_V} \\
& \leq & \parallel l_V \parallel + \parallel B \parallel \parallel \gamma_\varepsilon \parallel_T + \parallel j'_{1\varepsilon}(u_{0\varepsilon}) \parallel \\
& \leq & C_4
\end{array}$$

$(p_\varepsilon)_\varepsilon$ est donc une suite bornée dans l'espace de Hilbert Q, nous en déduit qu'il existe une sous-suite, encore notée $(p_\varepsilon)_\varepsilon$, qui possède une limite faible p dans Q.

Finalement, comme $(\gamma_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est solution de $(\mathcal{P}_{3\varepsilon})$, la qualité des convergences obtenues permet de passer à la limite dans les expression et on conclut alors que (γ, u, p) est solution de $(\mathcal{P}_3)$.

□

2.2.4 Unicité

Nous allons pour finir établir l'unicité de u et γ, soient donc (γ, u, p) et (γ^*, u^*, p^*) deux solutions de $(\mathcal{P}_3)$, la première et la dernière èquation de $(\mathcal{P}_3)$ donnent respectivement :

$$a(\gamma - \gamma^*, \tau) = b(\tau, u - u^*) \ , \ \forall \tau \in T \tag{18}$$

$$c(u - u^*, q) = 0 \ , \ \forall q \in Q \tag{19}$$

tandis que les inéquations s'écrivent :

$$b(\gamma, v - u) - c(v - u, p) + j(v) - j(u) \ \geq \ \langle l_V, v - u\rangle \ , \forall v \in V, \tag{20}$$

$$b(\gamma, w - u^*) - c(w - u^*, p) + j(w) - j(u^*) \ \geq \ \langle l_V, w - u^*\rangle \ , \forall w \in V. \tag{21}$$

donc en choisissant $v = u^*$ dans (20), $w = u$ dans (21), $q = p - p^*$ dans (19) et enfin $\tau = \gamma - \gamma^*$ dans (18), on trouve successivement :

$$b(\gamma - \gamma^*, u^* - u) - c(u^* - u, p - p^*) \geq 0, \tag{22}$$

$$c(u - u^*, p - p^*) = 0, \tag{23}$$

$$a(\gamma - \gamma^*, \gamma - \gamma^*) = b(\gamma - \gamma^*, u - u^*). \tag{24}$$

Alors de (22) et (24) on déduit :

$$\alpha \parallel \gamma - \gamma^* \parallel_T^2 + c(u^* - u, p - p^*) \leq 0$$

et (23) permet de conclure à l'unicité de γ, ensuite, de (18) on déduit que :

$$\beta \parallel u - u^* \parallel_V = \beta \parallel u_0 - u_0^* \parallel_V \leq \sup_{\tau \in T} \frac{b(\tau, u_0 - u_0^*)}{\parallel \tau \parallel_T} = 0$$

d'où l'unicité de u.

□

2.3 Application au problème initial

Nous considérons les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} T &= L^2(\Omega)_S^{2\times 2}, \\ V &= H_0^1(\Omega)^2, \\ Q &= L_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

identifions les formes bilinéaires à leur expression concrète :

$$\begin{aligned} a(\gamma, \tau) &= \frac{1}{2\eta}(\gamma, \tau) \quad && \forall (\gamma, \tau) \in T^2, \\ b(\tau, v) &= (\tau, D(v)) && \forall (\tau, v) \in T \times V, \\ c(v, q) &= (div\ v, q) && \forall (v, q) \in V \times Q, \end{aligned}$$

il est possible de montrer (voir [6]) que b vérifie la condition inf-sup et l'ellipticié de a est immédiate grâce au produit scalaire, de plus :

$$\sup_{\tau \in T_\sigma} \frac{b(\tau, v)}{\parallel \tau \parallel_T} = \sup_{\tau \in T_\sigma} \frac{(\tau, D(v))}{\parallel \tau \parallel_T} = |D(v)|_{0,\Omega} \geq \beta_1 \parallel v \parallel_V,$$

et β_1 est alors la constante de l'inégalité de Korn (voir [15]).

2.4 Vers une meilleure formulation

Nous disposons maintenant d'une formulation variationnelle dont l'interprétation en termes d'équations aux dérivées partielles n'est pas évidentes, du fait de l'élimination de σ. En outre, nous souhaitons travailler au niveau discret avec la vitesse u dans $H(div;\Omega)$, suivant la généralisation de Saramito (voir [12] et [13]) de l'élément de Raviart-Thomas [10]. Dans ce cas, u n'est pas assez régulière pour permettre d'écrire $D(u)$ dans $L^2(\Omega)_S^{2\times 2}$. Nous avons donc besoin d'une formulation variationnelle où $j(D(u))$ n'apparait pas explicitement. Un moyen simple est d'écrire $j(\gamma)$ et de traiter faiblement la relation $\gamma = D(u)$.

3 Formulation Taux de déformation-Vitesse-Contrainte-Pression

Nous proposons dans cette section une formulation différente de la précédente (cf section 2), comportant quatre champs inconnus et bien adaptée aux approximations internes dans $H(div;\Omega)$. De plus, nous verrons dans la sous-section (3.1) que l'interprétation du système variationnel se fait sans difficulté. Nous démontrons également un résultat d'existence et d'unicité partielle.

3.1 Formulation variationnelle

Rappelons que le problème aux limites que l'on se pose est le suivant :

Trouver (γ, u, σ, p) vérifiant presque partout dans Ω :

$$\begin{cases} \gamma - D(u) = & 0 \\ div(\sigma - pI) + f_\Omega = & 0 \\ \sigma \in & \partial\phi(\gamma) \\ div\ u = & 0 \end{cases}$$

Le problème variationnel est alors immédiat si l'on intègre par partie l'équation d'équilibre. En effet, en reprenant les notations de la section (2), nous obtenons :

Trouver (γ, u, σ, p) vérifiant le système :

$$\begin{cases} (2\eta\gamma, \xi - \gamma) + j(\xi) - j(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) \geq & 0 & , \forall \xi \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2}, \\ (\tau, \gamma) - (\tau, D(u)) = & 0 & , \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2}, \\ (\sigma, D(v)) - (p, div\ v) = & < l, v > & , \forall v \in H_D^1(\Omega)^2, \\ (q, div\ u) = & 0 & , \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ u_{|\Gamma_D} = & u_D & \text{(au sens des traces)} \end{cases}$$

Puis, par un relèvement des conditions aux limites (cf section (2)), nous aboutissons à la formulation "Taux de déformation-Vitesse-Contrainte-Pression" homogène souhaitée :

Trouver $(\gamma, u_0, \sigma, p) \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \times H_D^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \times L_0^2(\Omega)$ vérifiant :

$$\begin{cases} (2\eta\gamma, \xi - \gamma) + j(\xi) - j(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) \geq & 0 & , \forall \xi \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \\ (\tau, \gamma) - (\tau, D(u_0)) = & (\tau, D(u_1)) & , \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{2\times 2} \\ (\sigma, D(v)) - (p, div\ v) = & < l, v > & , \forall v \in H_D^1(\Omega)^2 \\ (q, div\ u_0) = & (q, div\ u_1) & , \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{25}$$

3.2 Un résultats abstrait d'existence et unicité

Considérons à présent un cadre abstrait qui généralise la formulation variationnelle (25). Soient T_γ, T_σ, V et Q des espaces hilbertiens, a, b, c et d des formes bilinéaires continues respectivement sur $T_\gamma \times T_\gamma$, $V \times Q$, $T_\sigma \times T_\gamma$ et $T_\sigma \times V$ et j une fonctionnelle convexe propre s.c.i. sur T_γ. Nous allons considérer le système varaiationnel abstrait suivant :

$$\begin{cases} a(\gamma, \xi - \gamma) + j(\xi) - j(\gamma) - c(\xi - \gamma, \sigma) \geq & 0 & \forall \xi \in T_\gamma, \\ d(\sigma, v) - b(v, p) = & (f, v) & \forall v \in V, \\ c(\gamma, \tau) - d(\tau, u) = & 0 & \forall \tau \in T_\sigma, \\ b(u, q) = & 0 & \forall q \in Q. \end{cases} \tag{26}$$

Introduisons pour cela le problème auxiliaire $(\mathcal{Q})$ consistant à trouver $(\gamma, u; \sigma) \in T_\gamma \times V \times T_\sigma$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(\gamma, \xi - \gamma) + j(\xi) - j(\gamma) - c(\xi - \gamma, \sigma) \geq & 0 & \forall \xi \in T_\gamma, \\ d(\sigma, v) = & (f, v) & \forall v \in V_B, \\ c(\gamma, \tau) - d(\tau, u) = & 0 & \forall \tau \in T_\sigma. \end{array} \right. \tag{27}$$

$(\mathcal{Q})$ va servir d'étape intermédiaire au sens où :

Lemme 3.1 *Sous l'hypothèse :*

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\| v \|_V} \geq c_1 \| q \|_Q \quad , \forall q \in Q$$

les problèmes (26) et (27) sont équivalent. Autrement dit : si $(\gamma, u; \sigma, p)$ est solution de (26) alors $(\gamma, u; \sigma)$ est solution de (27) et, réciproquement, si $(\gamma, u; \sigma)$ est solution de (27) alors il existe $p \in Q$ tel que $(\gamma, u; \sigma, p)$ est solution de (26).

démonstration

Considèrons en effet l'équation de $(\mathcal{Q})$:

$$d(\sigma, v) = (f, v) \ , \forall v \in V_B$$

elle signifie que $D^*\sigma - f \in V_B^0$, or d'après l'hypothèse "inf-sup", B^* est un isomorphisme de Q dans V_B^0, donc il existe un unique $p \in Q$ tel que $B^*p = D^*\sigma - f$, ce qui s'écrit encore :

$$d(\sigma, v) - b(v, p) = (f, v) \ , \forall v \in V$$

ainsi (27) implique (26), la réciproque est triviale.

$\square$

Nous allons maintenant utiliser un résultat obtenu par [1] et que nous rappelons. Soient X et M deux espaces de Hilbert. On se donne :

- a_1 une forme bilinéaire continue sur X,
- b_1 une forme bilinéaire continue sur $X \times M$,
- j_1 une fonctionnelle convexe, propre s.c.i sur X,
- l dans X'

et on note B_1 l'opérateur de $\mathcal{L}(X, M')$ tel que : $b_1(y, \mu) = < B_1 y, \mu > \ , \forall (y, \mu) \in X \times M$. Considérons ensuite le problème consistant à trouver $(x, \lambda) \in X \times M$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1(x, y - x) + b_1(y - x, \lambda) + j_1(y) - j_1(x) \geq & < l_X, y - x >_{X,X'} & \forall y \in X \\ b_1(x, \mu) = & < l_M, \mu > & \forall \mu \in M \end{array} \right. \tag{28}$$

il est alors possible de montrer le :

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses :*

(i) a_1 *est elliptique sur le noyau de* B_1,

(ii) b_1 *vérifie la condition inf-sup,*

(iii) il existe une fonctionnelle j_ε approchant j_1 au sens de (2.1),

il existe un couple $(x, \lambda) \in X \times M$ solution de (28) ; de plus, la composante x est unique.

La démonstration de ce résultat repose sur les idées exploitées dans la section (2). Sans refaire la démonstration, rappelons-en brièvement le plan.
Il s'agit de combiner le théorème de Lions-Stampacchia et le théorème de Brezzi [3], pour cela, la fonctionnelle j est remplacée par j_ϵ. L'existence d'une solution pour ce problème régularisé s'obtient alors en reprenant la démonstration du théorème de Brezzi et en remplaçant le théorème de Lax-Milgram par le théorème de Lions-Stampacchia [9]. Un passage à la limite en ϵ permet de conclure à l'existence de (x, λ). L'unicité découle ensuite des propriétés de a_1 et de b_1.

Remarquons ensuite que le problème $(\mathcal{Q})$ peut s'écrire de manière équivalente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a(\gamma, \xi - \gamma) + j(\xi) - j(\gamma) + (-c(\xi - \gamma, \sigma) + d(\sigma, v - u)) & \geq (f, v - u) & \forall (\xi, v) \in T_\gamma \times V_B \\ -c(\gamma, \tau) + d(\tau, u) & = 0 & \forall \tau \in T_\sigma \end{array} \right.$$

nous nous retrouvons alors clairement dans le contexte abstrait du théorème (3.1) en choisissant $X = T_\gamma \times V_B$, $M = T_\sigma$ et en posant :

$$\begin{array}{lll} a_1(x, y) & = a(\gamma, \xi) & \forall x = (\gamma, u), y = (\xi, v) \in X, \\ b_1(\mu, y) & = -c(\xi, \tau) + d(\tau, v) & \forall \mu = \tau \in M, y \in X, \\ j_1(y) & = j(\xi) & \forall y \in X. \end{array}$$

Il reste donc à montrer que les hypothèses sont satisfaites, il sera alors possible de conclure à l'existence de (γ, u, σ, p) et à l'unicité de (γ, u). Pour cela, nous reprenons un résultat et les notations de [11]. Posons, donc :

$$\begin{array}{l} T_{D^*B} = \{\tau \in T_\sigma ; d(\xi, v) = 0, \ , \forall v \in V_B\} \\ T_{CD^*B} = \{\xi \in T_\gamma ; c(\xi, \tau) = 0 \ , \forall \tau \in T_{D*B}\} \end{array}$$

on a alors le :

Théorème 3.2 *Les hypothèses (i) et (ii) du théorème (3.1) sont équivalentes aux conditions :*

(i) $\exists\ \alpha > 0\ ,\ a(\xi, \xi) \geq \parallel \xi \parallel_{T_\gamma} \ , \forall \xi \in T_{CD^*B}$,

(ii) $\exists\ c_2 > 0\ ,\ \sup\limits_{\xi \in T_\gamma} \dfrac{c(\xi, \tau)}{\parallel \xi \parallel_{T_\gamma}} \geq c_2 \parallel \tau \parallel_{T_\sigma} \ , \forall \tau \in T_{D^*B}$,

(iii) $\exists\ c_3 > 0\ ,\ \sup\limits_{\tau \in T_\sigma} \dfrac{d(\tau, v)}{\parallel \tau \parallel_{T_\sigma}} \geq c_3 \parallel v \parallel_V \ , \forall v \in V_B$,

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du lemme (3.1), du théorème (3.2) et (iii) du théorème (3.1), le problème (26) admet une solution $(\gamma, u; \sigma, p)$ et (γ, u) est unique.*

Les fonctionnelles j_1 et j ont les mêmes propriétés donc les théorèmes (3.2) puis (3.1) donnent immédiatement l'existence de $(\gamma, u; \sigma)$ et l'unicité de (γ, u), le lemme (3.1) donne l'existence de p.

3.3 Application au cas concret

Les espaces fonctionnels sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} T_\gamma & = T\sigma = L^2(\Omega)_S^{2\times 2}, \\ V & = H_0^1(\Omega)^2, \\ Q & = L_0^2(\Omega), \end{array}$$

identifions les formes bilinéaires à leur expression concrète :

$$\begin{array}{lll} a(\gamma,\xi) & = (2\eta + r)(\gamma,\xi) & \forall(\gamma,\xi) \in (T_\gamma)^2, \\ b(v,q) & = (div\ v, q) & \forall(v,q) \in V \times Q, \\ c(\xi,\tau) & = (\xi,\tau) & \forall(\xi,\tau) \in T_\gamma \times T_\sigma, \\ d(\tau,v) & = (\tau, D(v)) & \forall(\tau,v) \in T_\sigma \times V, \end{array}$$

nous savons depuis la section (2) que b vérifie "inf-sup", donc les résultats abstraits s'appliquent. t c_3 est alors la constante de l'inégalité de Korn, finalement, on a clairement $c_2 = 1$.

4 Algorithme d'Uzawa

Nous allons reprendre rapidement les notions introduites dans [7] et dans [8] sur les méthodes de lagranangien augmenté, puis nous adapterons un algorithme général à notre cas particulier ce qui nous conduira à l'algorithme que nous avons mis en œuvre.

4.1 Principe de l'algorithme

Nous décrivons maintenant, dans un cadre général, quelques principes d'optimisation sous contraintes. Nous exhiberons ensuite, dans ce contexte, deux algorithmes de calcul de point-selle. Nous donnerons un théorème de convergence pour le second algorithme. La plupart des résultats qui suivent s'appuie sur un lemme très utile, démontré dans [5] et que nous énonçons tout de suite :

Lemme 4.1 *Soient J_1 et J_2 deux fonctionnelles convexes, propres, s.c.i., définies sur un espace de Hilbert H, J_1 étant différentiable. Alors minimiser $J_1 + J_2$ équivaut à trouver $g \in H$ vérifiant :*

$$(J_1'(g), h - g) + J_2(h) - J_2(g) \geq 0 \ , \ \forall h \in H$$

4.1.1 Contexte

Soit J une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert V. On suppose que J s'écrit sous la forme :

$$J(v) = J_1(D(v)) + J_2(v)$$

avec J_1 et J_2 deux fonctionnelles convexes propres et s.c.i., et D un opérateur linéaire sur V à valeur dans un autre espace hilbertien T.

Si J_2 est Gateaux-différentiable, minimiser J sur V équivaut, d'après le lemme (4.1) à déterminer les solutions u du problème variationnel suivant :

$$J_1(D(v)) - J_1(D(u)) + (J_2'(u), v - u) \geq 0 \ , \ \forall v \in V$$

On va, en fait, transformer ce problème sans contraintes en un problème sous contraintes, en posant :

$$\tilde{J}(\xi, v) = J_1(\xi) + J_2(v) \ , \ \forall (\xi, v) \in T \times V$$

minimiser J sur V est alors équivalent à résoudre :

$$\min_{\xi = D(v), v \in V} \tilde{J}(\xi, v) \tag{29}$$

C'est un problème sous contraintes auquel on peut associer une fonctionnelle convexe, nommée lagrangien :

$$L(\xi, v; \tau) = \tilde{J}(\xi, v) + (\tau, D(v) - \xi) \ , \ \forall v \in V$$

puis une autre fonctionnelle, le lagrangien augmenté de paramètre $r > 0$:

$$L_r(\xi, v; \tau) = L(\xi, v; \tau) + \frac{r}{2} \parallel D(v) - \xi \parallel^2 \ , \ \forall v \in V$$

Sachant qu'un point-selle $(\gamma, u; \sigma)$ de $\mathcal{L}$ est défini par la double inégalité :

$$\mathcal{L}(\gamma, u; \tau) \leq \mathcal{L}(\gamma, u; \sigma) \leq \mathcal{L}(\xi, v; \sigma) \ , \ \forall (\xi, v, \tau) \in T \times V \times T$$

On peut montrer que (voir [7] et [8]) :

1. Si $(\gamma, u; p)$ est un point-selle de L, alors (γ, u) est solution de (29),
2. Les point-selles de L et ceux de L_r sont les mêmes,

et enfin, les point-selles du lagrangien sont caractérisés comme solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{r} J_1(\xi) - J_1(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) \geq 0 \\ J_2(v) - J_2(u) + (\sigma, D(v) - D(u)) \geq 0 \\ \gamma - D(u) = 0 \end{array}\right.$$

ou bien dans le cas où J_2 est différentiable :

$$\left\{\begin{array}{l} J_1(\xi) - J_1(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) \geq 0 \\ < J_2'(u), v > +(\sigma, D(v)) = 0 \\ \gamma - D(u) = 0 \end{array}\right. \tag{30}$$

et de même pour le lagrangien augmenté :

$$\left\{\begin{array}{r} J_1(\xi) - J_1(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) - r(D(u) - \gamma, \xi - \gamma) \geq 0 \\ J_2(v) - J_2(u) + (\sigma, D(v) - D(u)) + r(D(u) - \gamma, D(v) - D(u)) \geq 0 \\ \gamma - D(u) = 0 \end{array}\right.$$

avec, dans le cas où J_2 est différentiable :

$$\left\{\begin{array}{r} J_1(\xi) - J_1(\gamma) - (\sigma, \xi - \gamma) - r(D(u) - \gamma, \xi - \gamma) \geq 0 \\ < J_2'(u), v > +(\sigma, D(v)) + r(D(u) - \gamma, D(v)) = 0 \\ \gamma - D(u) = 0 \end{array}\right.$$

Dans toute la suite, on construit des algorithmes de recherche de point-selles du lagrangien augmenté. Il est important de signaler que la recherche de point-selles est souvent plus simple pour $\mathcal{L}_r$ que pour $\mathcal{L}$, ce sera vrai dans notre cas particulier.

4.1.2 Principe et description de l'algorithme

La méthode d'Uzawa repose sur la définition d'un point-selle, elle consiste en effet à maximiser la fonctionnelle duale

$$h_r(\sigma) = \inf_{(\xi,v) \in T \times V} \{\mathcal{L}_r(\xi, v; \sigma)\}$$

par l'application d'un algorithme de gradient, en considérant que son gradient h_r' est donné au point σ par

$$h_r'(\sigma) = D(u(\sigma)) - \gamma(\sigma)$$

avec $h_r(\sigma) = \mathcal{L}_r(\gamma(\sigma), u(\sigma); \sigma)$. Ceci donne un premier algorithme :

Algorithme 4.1 *(Algorithe de base)*
σ^0 donné,
Pour σ^n connu, calculer u^n, γ^n, σ^{n+1} comme suit :

$$L_r(\gamma^n, u^n; \sigma^n) \leq L_r(\xi, v; \sigma^n) \ , \forall (\xi, v) \in T \times V$$

$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + \alpha_n (D(u^n) - \gamma^n)$$

Cet algorithme est peu pratique car le calcul de γ^n est couplé à celui de u^n, pour cette raison, nous ne le détaillons pas d'avantage. Il va néanmoins permettre d'en écrire un autre plus efficace.

En appliquant une itération de l'algorithme de relaxation par bloc, nous pouvons découpler la minimisation en v de celle en ξ. Rappelons simplement l'algorithme de relaxation par bloc (pour un n fixé) :

Algorithme 4.2

$$u^{n,0} \longleftarrow u^{n-1}$$

puis pour $k \geq 1$, calculer $u^{n,k} \in V$ et $\gamma^{n,k} \in T$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_r(\gamma^{n,k}, u^{n,k-1}; \sigma^n) \leq \mathcal{L}_r(\xi, u^{n,k-1}; \sigma^n) & \forall \xi \in T \\ \mathcal{L}_r(\gamma^{n,k}, u^{n,k}; \sigma^n) \leq \mathcal{L}_r(\gamma^{n,k}, v; \sigma^n) & \forall v \in V \end{array}$$

Nous obtenons maintenant un algorithme plus pratique :

Algorithme 4.3 *(Algorithme relaxé)*
σ^0 donné,
Pour σ^n connu, calculer u^n, γ^n, σ^{n+1} comme suit

$$L_r(\gamma^n, u^{n-1}; \sigma^n) \leq L_r(\xi, u^{n-1}; \sigma^n)$$

$$L_r(\gamma^n, u^n; \sigma^n) \leq L_r(\gamma^n, v; \sigma^n)$$
$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + \alpha_n(D(u^n) - \gamma^n)$$

Remarquons qu'en utilisant le lemme (4.1), l'algorithme (4.3) sécrit :

Algorithme 4.4 *(Formulation variationnelle)*
σ^0 donné,
Pour σ^n connu, calculer u^n, γ^n, σ^{n+1} comme suit

$$r(\gamma^n, \xi - \gamma^n) + J_1(\xi) - J_1(\gamma^n) \geq (\sigma^n + rD(u^{n_1}), \xi - \gamma^n)$$

$$r(D(u^n), D(v) - D(u^n)) + J_2(v) - J_2(u^n) \geq (r\gamma^n - \sigma^n, D(v) - D(u^n))$$
$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + \alpha_n(D(u^n) - \gamma^n)$$

Remarquons également que dans le cas où J_2 est Gateaux-différentiable, nous obtenons la modification suivante :

Algorithme 4.5

$$r(\gamma^n, \xi - \gamma^n) + J_1(\xi) - J_1(\gamma^n) \geq (\sigma^n + rD(u^{n_1}), \xi - \gamma^n)$$

$$r(D(u^n), D(v)) + < J_2'(u^n), v >= (r\gamma^n - \sigma^n, D(v))$$
$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + \alpha_n(D(u^n) - \gamma^n)$$

4.1.3 Résultats de convergence

Citons un théorème de convergence pour l'algorithme (4.3), démontré dans [7] et [8].

Théorème 4.1 *(Convergence de (4.3))*
Sous l'hypothèse :

$$\alpha_n = \rho < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) r$$

On a les convergences :

- $u^n \longrightarrow u$ *dans V-fort*
- $\gamma^n \longrightarrow \gamma$ *dans T-fort*
- $\sigma^{n+1} - \sigma^n \longrightarrow 0$ *dans T-fort*

4.2 Application au problème variationnel à quatre champs

Faisons à présent les choix suivants pour les fonctionnelles J_i :

$$\begin{aligned} J_1(\xi) &= \frac{1}{2}a(\xi,\xi) + j(\xi), \\ J_2(v) &= -(f,v), \end{aligned}$$

nous pouvons alors démontrer le :

Lemme 4.2 *Si a est symétrique, semi-definie positive, nous nous retrouvons dans le contexte précédent et le problème (30) est le problème à trois champs (27).*

démonstration

En effet, comme a est semi-définie positive, la fonctionnelle J_1 est convexe, J_1 et J_2 sont donc convexes propres et s.c.i., ce qui nous autorise à utiliser les algorithmes exposés. De plus, J_2 est clairement différentiable et J_1 se décompose en une partie différentiable $j_d = (1/2)a(\xi,\xi)$ et une partie non différentiable j, de sorte que l'étape n de l'algorithme (4.5) sécrit en fait, d'après le lemme (4.1) :

$$r(\gamma^n, \xi - \gamma^n) + \langle j_d'(\gamma^n), \xi - \gamma^n\rangle + j(\xi) - j(\gamma^n) \geq (\sigma^n + rD(u^{n-1}), \xi - \gamma^n)$$

$$r(D(u^n), D(v)) + < J_2'(u^n), v >= (r\gamma^n - \sigma^n, D(v))$$

$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + \alpha_n(D(u^n) - \gamma^n)$$

enfin, puisque a est symétrique, nous avons bien $\langle j_d'(\gamma^n), \xi - \gamma^n\rangle = a(\gamma, \xi - \gamma)$, ce qui prouve le lemme.

□

Par ailleurs, nous savons que le problème à quatre champs (26) est équivalent à (27) (cf lemme (3.1)), nous allons donc appliquer les méthodes précédentes à (27) pour calculer (γ, u, σ) et choisir un moyen pour calculer p.
Retournons à présent à l'expression concrète des formes bilinéaires et adaptons l'algorithme (4.5).

La minimisation conduisant à u^n se fait en résolvant l'équation variationnelle suivante :

$$r(D(u^n), D(v)) = (f,v) + (r\gamma^n - \sigma^n, D(v)) \ , \forall v \in V_B.$$

il est immédiat de remarquer qu'il s'agit d'un problème de Stokes en vitesses-pression, de viscosité $r/2$, ceci va constituer un moyen de construire une suite $(p^n)_n$ dont nous conjecturons, sans le prouver rigoureusement, qu'elle converge vers une pression.

L'étape de minimisation consiste alors à trouver $(u^n, p^{n+1}) \in V \times Q$ tel que :

$$\begin{cases} r(D(u^n), D(v)) - (p^{n+1}, div\ v) = (f, v) + (r\gamma^n - \sigma^n, D(v)) & , \forall v \in V \\ (div\ u^n, q) = 0 & , \forall q \in Q \end{cases}$$

Nous verrons, dans la partie expérimentation numérique, que la suite $(p^n)_n$ donne bien une pression dans le cas où $g = 0$ c'est-à-dire dans le cas Newtonien.

D'autre part, le calcul de γ^n s'effectue en résolvant l'inéquation variationnelle suivante :

$$((2\eta + r)\xi, \xi - \gamma^n) + j(\xi) - j(\gamma^n) \geq (\sigma^n + rD(u^{n-1}), \xi - \gamma^n) \ , \forall \xi \in T_\gamma$$

cette dernière peut être réduite à une formule explicite :

$$\gamma^n = \begin{cases} 0 & , \ \| \sigma^n + rD(u^{n-1}) \| < G \\ \dfrac{\sigma^n + rD(u^n)}{2\eta + r} \left(1 - \dfrac{G}{\| \sigma^n + rD(u^{n-1}) \|}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $G = \dfrac{g}{\sqrt{2}}$.

Démontrons immédiatement ce dernier point en utilisant le :

Lemme 4.3 *Soient $x \in \Omega$, $c > 0$, $G \geq 0$, $\beta \in L^2(\Omega)^{2\times 2}$ et le problème d'optimisation :*

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}^2} \frac{c}{2} \| \xi \|^2 + G \| \xi \| - (\beta(x), \xi) \ , pp\ x \in \Omega$$

Ce problème possède une unique solution γ donnée par la relation :

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & si \ \| \beta(x) \| < G \\ \dfrac{\beta(x)}{c} \left(1 - \dfrac{G}{\| \beta(x) \|}\right) & sinon. \end{cases} \qquad pp\ x \in \Omega$$

De plus, si $x \to \beta(x)$ est dans $L^2(\Omega)$, $x \to \gamma(x)$ définit l'unique solution dans $L^2(\Omega)$ de l'inéquation variationnelle :

$$c(\gamma, \xi - \gamma) + \int_\Omega G\xi(x)dx - \int_\Omega G\gamma(x)dx \geq (\beta, \xi - \gamma) \ , \forall \xi \in T$$

démonstration

Dans la mesure où nous ne l'avons pas trouvée dans la bibliographie, nous proposons la démonstration du lemme.

Posons :

$$\Phi(\xi) = \frac{c}{2} \| \xi \|^2 + G \| \xi \| - (\beta(x), \xi)$$

nous obtenons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz la relation :

$$\Phi(\xi) \geq \frac{c}{2} \| \xi \|^2 + G \| \xi \| - \| \beta(x) \| \| \xi \|$$

ceci montre que Φ est coercive, comme elle est de plus convexe, propre et s.c.i., il est clair qu'elle admet un unique minimum. Cette inégalité permet également de dire que :

- si $G- \parallel \beta(x) \parallel \geq 0$, alors $\Phi(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in X$ et donc $\min \Phi(\xi) = \Phi(0) = 0$,
- si, au contraire,$G- \parallel \beta(x) \parallel < 0$, alors le minimum est non-nul. En effet, considérons la fonction $h : \lambda \longrightarrow \Phi(\lambda\beta)$, nous pouvons l'écrire :

$$h(\lambda) = \lambda \left(\lambda c \parallel \beta(x) \parallel^2 + G \parallel \beta(x) \parallel - \parallel \beta(x) \parallel^2 \right)$$

donc si $\lambda \in \left]0, \frac{\parallel \beta(x) \parallel - G}{c \parallel \beta(x) \parallel}\right[$, on obtient bien $h(\lambda) < 0$, ce qui assure que le minimum est non-nul, Φ est alors dérivable au voisinage de ce minimum, il reste donc à résoudre : $\Phi'(\xi) = 0$ pour le trouver ce qui conduit successivement à :

$$c\xi + G\frac{\xi}{\parallel \xi \parallel} - \beta = 0 \text{ , dans X}$$

$$\parallel \xi \parallel \left(c + \frac{G}{\parallel \xi \parallel} \right) = \parallel \beta(x) \parallel$$

$$\parallel \xi \parallel = \frac{\parallel \beta(x) \parallel - G}{c}$$

d'où finalement la solution γ :

$$\gamma = \frac{\beta}{c} \left(1 + \frac{G}{\parallel \beta(x) \parallel - G} \right)^{-1} = \frac{\beta}{c} \left(1 - \frac{G}{\parallel \beta(x) \parallel} \right) \tag{31}$$

Souvenons-nous maintenant que j est convexe, propre et s.c.i., le théorème de Lions-Stampacchia fournit alors l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle, il reste donc à montrer que γ est dans $L^2(\Omega)$ et satisfait l'inéquation. C'est la formule (31) qui implique que $\gamma \in L^2(\Omega)$ (Ω étant borné), de plus, par définition du minimum :

$$\Phi(\gamma(x)) \leq \Phi(\xi(x)) \text{ , } \forall \xi \in L^2(\Omega) \text{ , pp x } \in \Omega$$

et en intégrant cette inégalité sur Ω, il vient :

$$\Psi(\gamma) \leq \Psi(\xi) \text{ , } \forall \xi \in T$$

avec : $\Psi(\xi) = \frac{c}{2}(\xi, \xi) + j(\xi) - (\beta, \xi)$, ce qui équivaut à l'inéquation variationnelle (par application du lemme (4.1)) et achève la démonstration.

□

Il suffit alors d'appliquer ce lemme avec $c = 2\eta + r$ et $\beta = \sigma^n + rD(u^{n-1})$ pour obtenir la relation annoncée.

Remarque 4.1 *Insistons sur le fait que ce calcul explicite élimine toute la difficulté du problème. En effet, nous sommes ramenés à une suite de résolutions linéaires et de calculs explicites alors que le problème initial est non linéaire.*

Cette simplification du calcul de γ^n et l'équation donnant u^n permettent d'écrire un algorithme pratique, dans lequel nous faisons le choix $\rho_n = r$, ce choix est conseillé par [7] et [8].

Algorithme 4.6 *(Algorithme concret)*
σ^1, p^1, γ^0 *donnés,*
on suppose $\sigma^n, p^n, \gamma^{n-1}$ *et* u^{n-1} *connus, calculer* u^n, γ^n, p^{n+1} *et* σ^{n+1} *par :*

ETAPE 1 : Calcul explicite de γ^n

$$\begin{cases} \beta^n & \longleftarrow \sigma^n + rD(u^{n-1}) \\ X^n & \longleftarrow \parallel \beta^n \parallel \\ \gamma^n = & \begin{cases} 0 & \textit{si } X^n < G \\ \dfrac{\beta^n}{2\eta + r}\left(1 - \dfrac{G}{X^n}\right) & \textit{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

ETAPE 2 : Calcul de u^n *et* p^{n+1}

$$\begin{cases} r(D(u^n), D(v)) - (p^{n+1}, div\ v) & = (f, v) + (r\gamma^n - \sigma^n, D(v)) & , \forall v \in V \\ (div\ u^n, q) & = 0 & , \forall q \in Q \end{cases}$$

ETAPE 3 : Mise à jour de σ^{n+1}

$$\sigma^{n+1} \longleftarrow \sigma^n + r(D(u^n) - \gamma^n)$$

5 Discrétisation

Nous avons considéré un domaine carré, muni d'un maillage $\mathcal{T}_h$, quadrangulaire, uniforme, de pas h dans les deux directions. Nous avons utilisé des méthodes d'éléments finis. La simplicité du maillage nous a permis d'assembler les matrices élémentaires sans utiliser de procédés (informatiques) automatiques. Nous écrirons dans la suite les schémas qui en découlent, équation par équation. Les intégrales ont été calculées par la formule du trapèze, aussi bien à l'intérieur qu'au bord du domaine. Toutefois, avant d'écrire les schémas, nous donnons une formulation des équations continues bien adaptée à l'approximation envisagée. C'est l'objet de la section suivante.

5.1 Formulation mixte

En vue d'une approximation interne de la vitesse dans $H(div;\Omega)$, nous devons reprendre les étapes de l'algorithme de manière à ne plus écrire l'opérateur D.

5.1.1 Sous-problème de Stokes

Dans cette sous-section, nous suivons [6].

Considérons, pour une fonction f dans $L^2(\Omega)$ et une constante positive ν le problème de Stokes suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} -\nu\triangle u + \nabla p & = f \\ div\ u & = 0 \\ u_{|\Gamma} & = u_\Gamma \end{array}\right.$$

sa formulation variationnelle naturelle est celle qui à été écrite jusqu'à présent, c'est-à-dire :

Trouver $(u,p) \in H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ tel que $u_{|\Gamma} = u_\Gamma$ et :

$$\left\{\begin{array}{rll} 2\nu(D(u),D(v)) - (p, div\ v) & = (f,v) & \forall v \in H^1_0(\Omega) \\ (div\ u, q) & = 0 & \forall q \in L^2_0(\Omega) \end{array}\right.$$

Afin de nous débarrasser de l'opérateur D, nous introduisons la vorticité $\omega = rot\ u$, en effet :

$$rot\ rot\ u = -\triangle u + \nabla div\ u$$

donc en tenant compte de l'incompressibilité, les équations (5.1.1) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{rl} \omega - rot\ u & = 0 \\ -\nu\ rot\ \omega + \nabla p & = f \\ div\ u & = 0 \\ u_{|\Gamma} & = u_\Gamma \end{array}\right.$$

ce qui conduit au problème variationnel consistant à trouver $(\omega,u,p) \in H^1(\Omega) \times H(div;\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rll} (\omega,\theta) - (rot\ \theta, u) & = \langle u_\Gamma.t, \theta\rangle & \forall \theta \in H^1(\Omega) \\ (rot\ \omega, v) - (div\ v, p) & = (f,v) & \forall v \in H_0(div;\Omega) \\ (div\ u, q) & = 0 & \forall q \in L^2_0(\Omega) \\ u_{|\Gamma}.\nu & = u_\Gamma.\nu & \end{array}\right.$$

Enfin, pour les questions d'existence et unicité des solutions d'un tel problème, il est prouvé dans [6] que sous l'hypothèse de régularité $rot\ u \in H^1(\Omega)$, (5.1.1) équivaut à (5.1.1) (en fait il faut également faire des hypothèses de régularité sur la frontière du domaine).

5.1.2 Equations tensorielles

De même que précédemment, nous modifions les espaces variationnels relatifs aux tenseurs et donnons une formulation faible du calcul de $D(u)$ et de la divergence d'un tenseur. Introduisons donc l'espace :

$$T = \{\tau \in \mathbb{L}^2(\Omega)_S^{2\times 2} ; \tau^{12} \in H^1(\Omega)\}$$

Le calcul de $d = D(u)$ s'effectue alors en cherchant d vérifiant :

$$\begin{aligned} (d, \tau) &= \langle D(u), \tau \rangle \\ &= (\partial_1 u^1, \tau^{11}) + (\partial_2 u^2, \tau^{22}) - (u^1, \partial_2 \tau^{12}) - (u^2, \partial_1 \tau^{12}) + \int_\Gamma (u^1 \nu_2 + u^2 \nu_1) \tau^{12} \ , \forall \tau \in T \end{aligned}$$

(les termes de bord proviennent des intégrations par parties).

Posons par ailleurs $\tau = -r\gamma + \sigma$, on calcule δ vérifiant :

$$\begin{aligned} (\delta, v) &= -\langle \tau, D(v) \rangle = \langle div \ \tau, v \rangle \\ &= -(\tau^{11}, \partial_1 v^1) - (\tau^{22}, \partial_2 v^2) + (\partial_2 \tau^{12}, v^1) + (\partial_1 \tau^{12}, v^2) \ , \forall v \in H_0(div; \Omega) \end{aligned}$$

5.2 Sous-problème de Stokes

5.2.1 Degrés de libertés et espaces d'approximation

Nous souhaitons utiliser l'élément fini de Raviart-Thomas (voir [6]). Celui-ci tient compte du fait qu'une fonction u de $\{v; v_{|K} \in H(div \ ; K) \ , \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ est dans $H(div \ ; \Omega)$ si la composante normale de la vitesse est continue à la traversée des arêtes du maillage.

L'approximation p_h de la pression est recherchée dans l'espace des fonctions Q_0 par mailles sur Ω, enfin, ω_h est continue et Q_1 par mailles sur Ω. L'approximation u_h de la vitesse horizontale est recherchée dans l'espace des fonctions scalaires continues et constantes le long de chaque arête verticale et Q_1 par maille sur Ω. De même, l'approximation v_h de la vitesse verticale est recherchée dans l'espace des fonctions continues et constantes le long de chaque arête horizontale et Q_1 par maille.

Ce type d'approximation induit la disposition des degrés de liberté sur le maillage : la pression est au centre des mailles, la vorticité aux sommets, enfin, la vitesse horizontale est au milieu des arêtes verticales et la vitesse verticale est au milieu des arêtes horizontales.

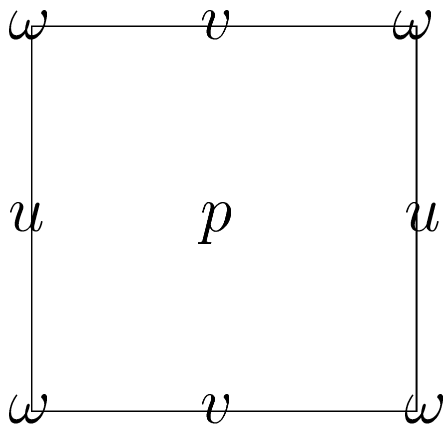


Figure 1: Schéma de discrétisation "Mark and Cell".

Du point de vue des différences finies, ce schéma d'approximation est connu sous le nom de "Mark and Cell" et possède l'avantage d'être d'ordre deux grâce à l'évaluation des dérivées par des différences centrées.

5.2.2 Equation $\omega = rot\ u$

La formulation variationnelle de cette équation fait apparaître des termes de bord, c'est pourquoi nous allons distinguer les points proches de $\Gamma = \partial\Omega$ des autres points de Ω.

Points internes (loin du bord) :

$$\omega_{i,j} = \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{h} - \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{h}$$

Au bord, loin des coins ($1 \leq i \leq N-1$ et $1\ leqj \leq N-1$) :

$$\begin{aligned}
\omega_{0,j} &= \frac{v_{1/2,j} - v_{0,j}}{h/2} - \frac{u_{0,j+1/2} - u_{0,j-1/2}}{h} \\
\omega_{N,j} &= \frac{v_{N,j} - v_{N-1/2,j}}{h/2} - \frac{u_{N,j+1/2} - u_{N,j-1/2}}{h} \\
\omega_{i,0} &= \frac{v_{i+1/2,0} - v_{i-1/2,0}}{h} - \frac{u_{i,1/2} - u_{i,0}}{h/2} \\
\omega_{i,N} &= \frac{v_{i+1/2,N} - v_{i-1/2,N}}{h} - \frac{u_{i,N} - u_{i,N-1/2}}{h/2}
\end{aligned}$$

5.2.3 Equation $\nu\ rot\ \omega + \nabla p = f$

$$\begin{aligned}
\nu h(\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}) + h(p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) &= \frac{h^2}{2}(f^1_{i,j} + f^1_{i,j-1}) \\
\nu h(\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}) + h(p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) &= \frac{h^2}{2}(f^2_{i,j} + f^2_{i-1,j})
\end{aligned} \tag{32}$$

Remarquons que les seconds membres peuvent être remplacés sans inconvénient majeur par respectivement $h^2 f^1_{i,j-1/2}$ et $h^2 f^2_{i-1/2,j}$, c'est ce que nous convenons de faire dans toute la suite.

5.2.4 Elimination de ω

Utilisons à présent les équations discrètes obtenues pour établir un schéma en u et p uniquement. Pour cela, nous nous servirons de la discrétisation de la condition d'incompressibilité :

$$h(u_{i,j-1/2} - u_{i-1,j-1/2} + v_{i-1/2,j} - v_{i-1/2,j-1}) = 0. \tag{33}$$

Commençons par construire le schéma loin des bords.

Remplaçant ω par son expression, il vient tout d'abord :

$$\begin{aligned}
&h(\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}) = \\
&\quad \{(v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j} - v_{i+1/2,j-1} + v_{i-1/2,j-1}) - (u_{i,j+1/2} - 2u_{i,j-1/2} + u_{i,j-3/2})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h(\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}) = \\
&\quad \{(v_{i+1/2,j} - 2v_{i-1/2,j} + v_{i-3/2,j}) - (u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2} - u_{i-1,j+1/2} + u_{i-1,j-1/2})\}
\end{aligned}$$

Puis finalement, avec (33), (32) devient :

$$\begin{aligned}
&-\nu(u_{i-1,j-1/2} + u_{i+1,j-1/2} - 4u_{i,j-1/2} + u_{i,j+1/2} + u_{i,j-3/2}) + h(p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) \\
&\qquad = h^2 f^1_{i,j-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\nu(v_{i-3/2,j} + v_{i+1/2,j} - 4v_{i-1/2,j} + v_{i-1/2,j-1} + v_{i-1/2,j+1}) + h(p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) \\
&\qquad = h^2 f^2_{i-1/2,j}
\end{aligned}$$

Nous pouvons immédiatement remarquer que diviser h^2 permet de retrouver la discrétisation classique en différence finie du problème de Stokes. Toutefois, nous allons voir que la situation est différente si l'on considère des points du bord.

En effet, les schémas précédents donnent :

aux bords inférieur et supérieur :

$$-\nu(2u_{i,0} - 5u_{i,1/2} + u_{i,3/2} + u_{i+1,1/2} + u_{i-1,1/2}) + h(p_{i+1/2,1/2} - p_{i-1/2,1/2}) = h^2 f^1_{i,1/2}$$

$$\begin{aligned}-\nu(2u_{i,N} - 5u_{i,N-1/2} + u_{i,N-3/2} + u_{i+1,N-1/2} + u_{i-1,N-1/2}) + h(p_{i+1/2,N-1/2} - p_{i-1/2,N-1/2}) \\ = h^2 f^1_{i,N-1/2}\end{aligned}$$

et aux bords gauche et droit :

$$-\nu(2v_{0,j} - 5v_{1/2,j} + v_{3/2,j} + v_{1/2,j+1} + v_{1/2,j-1}) + h(p_{1/2,j+1/2} - p_{1/2,j-1/2}) = h^2 f^2_{1/2,j}$$

$$\begin{aligned}-\nu(2v_{N,j} - 5v_{N-1/2,j} + v_{N-3/2,j} + v_{N-1/2,j+1} + v_{N-1/2,j-1}) + h(p_{N-1/2,j+1/2} - p_{N-1/2,j-1/2}) \\ = h^2 f^2_{N-1/2,j}\end{aligned}$$

Lorsqu'on divise par h^2, on s'aperçoit que les dérivées secondes sont approchées en O(h), à un coefficient multiplicatif près.

5.2.5 Mise en oeuvre

Le problème discret construit peut se mettre sous la forme classique d'un système linéaire du type :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix}$$

La matrice A est d'ordre $2N(N-1)$, la matrice B est de taille $2N(N-1) \times N^2$.

Nous avons décidé de résoudre ce système par une méthode de lagrangien augmenté de paramètre r' et à pas constant. Ceci donne l'algorithme suivant (voir [8]) :

Algorithme 5.1 *(Algorithme d'Uzawa pour Stokes)*

Etape 1 : k=0 :

$$\begin{aligned} &P_0 \text{ est donné} \\ &S_{r'} = S + B^T C \\ &A_{r'} = A + r' B^T B \end{aligned}$$

Etape2 : Etant donné P_k, trouver U_k et P_{k+1} vérifiant :

$$\begin{aligned} &A_{r'} U_k = S_{r'} - B^P_k \\ &P_{k+1} \longleftarrow P_k + r'(BU_k - C) \end{aligned}$$

Signalons quelques faits sur cette résolution :

- Le critère d'arrêt retenu est $\| BU - c \| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée au préalable,
- La matrice $A_{r'}$ étant symétrique définie positive, elle est inversée par la méthode LDL^T et donc factorisée une fois pour toute,
- il est bien connu que cet algorithme est d'autant plus rapide que r' est grand (voir par exemple [7] et [8]).

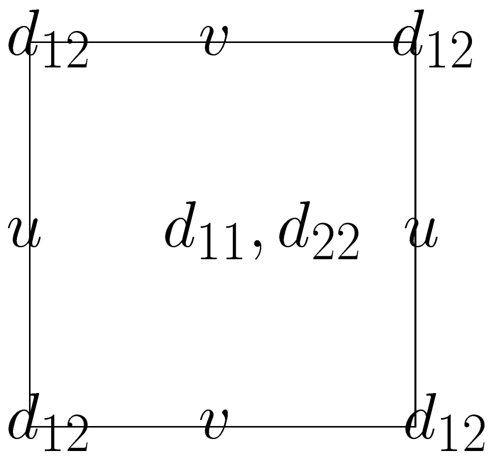


Figure 2: Schéma de discrétisation des composantes des tenseurs.

5.3 Equations tensorielles

5.3.1 Degrés de libertés et espaces d'approximation

Nous approchons les composantes diagonales des tenseurs comme la pression et la composante extra-diagonale comme la vorticité.

Du point de vue des différences finies, nous conservons ainsi, pour les équations linéaires, un schéma d'ordre deux grâce à l'approximation des dérivées par des différences centrées.

5.3.2 Calcul de $D(u)$

On cherche d vérifiant :

$$(d,\tau) = (\partial_1 u^1, \tau^{11}) + (\partial_2 u^2, \tau^{22}) - (u^1, \partial_2 \tau^{12}) - (u^2, \partial_1 \tau^{12}) + \int_\Gamma (u^1\nu_2 + u^2\nu_1)\tau^{12} \ , \forall \tau \in T,$$

on obtient alors les schémas suivants :

$$\begin{aligned} d^{11}_{i-1/2,j-1/2} &= \frac{u_{i,j-1/2} - u_{i-1,j-1/2}}{h} \quad 1 \le i \le N, \\ d^{22}_{i-1/2,j-1/2} &= \frac{v_{i-1/2,j} - v_{i-1/2,j-1}}{h} \quad 1 \le j \le N, \end{aligned}$$

et pour la composante extra-diagonale, on trouve :
loin des bords :

$$d^{12}_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{h} + \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{h}\right) \ , 1 \le i \le N-1 \ , 1 \le j \le N-1$$

aux bords, loin des coins :

$$\begin{aligned} d^{12}_{i,N} &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,N} - u_{i,N-1/2}}{h/2} + \frac{v_{i+1/2,N} - v_{i-1/2,N}}{h}\right) \quad 1 \le i \le N-1 \\ d^{12}_{i,0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i,1/2} - u_{i,0}}{h/2} + \frac{v_{i+1/2,0} - v_{i-1/2,0}}{h}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{12}_{0,j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_{1/2,j} - v_{0,j}}{h/2} + \frac{u_{0,j+1/2} - u_{0,j-1/2}}{h}\right) \quad 1 \le j \le N-1 \\ d^{12}_{N,j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_{N,j} - v_{N-1/2,j}}{h/2} + \frac{u_{N,j+1/2} - u_{N,j-1/2}}{h}\right) \end{aligned}$$

5.3.3 Calcul de $(r\gamma - \sigma, D(v))$

Posons $\tau = -r\gamma + \sigma$, on cherche δ vérifiant :

$$(\delta, \tau) = -(\tau^{11}, \partial_1 v^1) - (\tau^{22}, \partial_2 v^2) + (\partial_2 \tau^{12}, v^1) + (\partial_1 \tau^{12}, v^2)$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}\delta^1_{i,j-1/2} = \dfrac{\tau^{11}_{i+1/2,j-1/2} - \tau^{11}_{i-1/2,j-1/2}}{h} + \dfrac{\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i,j-1}}{h} & 1 \leq i \leq N-1 & , 1 \leq \ j \leq N \\
\frac{1}{2}\delta^2_{i-1/2,j} = \dfrac{\tau^{22}_{i-1/2,j+1/2} - \tau^{22}_{i-1/2,j-1/2}}{h} + \dfrac{\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i-1.j}}{h} & 1 \leq i \leq N & , 1 \leq \ j \leq N-1
\end{array}$$

Remarquons une chose importante : lors de la discrétisation de l'équation avec terme source, la mise à l'échelle ne fait pas apparaître δ mais $\delta/2$ au second membre. Ainsi doit-on considérer l'équation continue et sa forme discrète comme suit :

$$(\eta rot\ \omega, v) - (p, div\ v) = (f, v) - (\tau^{11}, \partial_1 v^1) - (\tau^{22}, \partial_2 v^2) + (\partial_2 \tau^{12}, v^1) + (\partial_1 \tau^{12}, v^2)$$

devient :

$$\begin{array}{l}
h(\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}) + h(p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) = \\
\qquad h^2 f^1_{i,j-1/2} + h(\tau^{11}_{i+1/2,j-1/2} - \tau^{11}_{i-1/2,j-1/2}) + h(\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i,j-1})
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
h(\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}) + h(p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) = \\
\qquad h^2 f^2_{i-1/2,j} + h(\tau^{22}_{i-1/2,j+1/2} - \tau^{22}_{i-1/2,j-1/2}) + h(\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i-1.j})
\end{array}$$

5.3.4 Calcul explicite de γ

Pour calculer γ^n_{12} (aux sommets), il faut connaître la norme du tenseur *gamma* aux sommets, on doit donc être capable d'évaluer γ^n_{ii} aux sommets. Pour obtenir cette évaluation, nous faisons la moyenne des valeurs de γ^n_{ii} aux centres des mailles les plus proches.
De même, pour calculer γ^n_{ii} (aux centres des mailles), il est nécessaire de connaître γ^n_{12} aux centres des mailles. Nous faisons alors la moyenne des valeurs de γ^n_{12} aux sommets les plus proches.

5.3.5 Un critère d'arrêt

Pour stopper l'algorithme global, nous avons décidé du critère d'arrêt suivant :

$$\| \gamma^n - D(u^n) \|_{0,h} < \varepsilon$$

où la tolérance ε est déterminée au préalable. Ce critère n'est pas nécessairement le meilleur, cependant il donne de bons résultats lorsque ε est de l'ordre de 10^{-14}. Remarquons par ailleurs que la détermination d'un autre critère de convergence n'est pas un problème simple.

6 Expérimentations numériques

Nous avons procédé à plusieurs essais en faisant varier le paramètre numérique r et le paramètre physique g. Nous voyons dans cette section la vitesse de convergence de l'algorithme selon les valeurs de r et de g. Nous voyons aussi l'évolution des zones rigides et fluides lorsque g devient grand.

6.1 Validation des solveurs dans le cas newtoniens

Nous avons testé les solveurs de Stokes vitesse-pression et de Bingham (pour $g = 0$) sur trois cas classiques :

- deux problèmes dont la solution analytique est connue,
- la cavité entraînée.

6.1.1 Solveur vitesse-pression

Les cas analytiques nous ont permis de valider le solveur de Stokes en vitesse-pression. La source f et la solution (u, p) sont donnés dans le premier cas (polynôme nul au bord) par :

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = y(2-6y+4y^2)x^2(1-x)^2\\
&v(x,y) = -x(2-6x+4x^2)y^2(1-y)^2\\
&p(x,y) = x^2-y^2\\
&f^1(x,y) = 2x-4\eta(2y-1)(3x^2(1-x)^2+y(y-1)(1-6x(1-x)))\\
&f^2(x,y) = 4\eta(2x-1)(3y^2(1-y)^2+x(1-x)(1-6y(1-y)))-2y
\end{aligned}$$

et pour le second : (cavité sinus-cosinus)

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = \beta sin(\alpha\pi x)sin(\beta\pi(y-1/2))\\
&v(x,y) = \alpha cos(\alpha\pi x)cos(\beta\pi(y-1/2))\\
&p(x,y) = 2\alpha\beta\pi cos(\alpha\pi x)sin(\beta\pi(y-1/2))\\
&f^1(x,y) = \pi^2(\alpha^2(\eta-2)+\eta\beta^2)u(x,y)\\
&f^2(x,y) = \pi^2(\eta\alpha^2+(2+\eta)\beta^2)v(x,y)
\end{aligned}$$

(les résultats sont présentés pour $\alpha = \beta = 2$)
Les erreurs obtenues sont les suivantes.

Pour le maillage $N = 10$, cas du polynôme nul au bord :

Dernier residu du solveur de Stokes (obtenu en deux itérations) :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 1.4927184318220E-16$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	7.3595040680363E-04	5.4075155533697E-04
L^2	2.4091123756614E-04	2.4935456860005E-04

Comparaison U analytique - U deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	7.3595518108491E-04	5.4075852123748E-04
L^2	2.4051953954226E-04	2.4935437261768E-04

Comparaison V analytique - V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	2.1118154275350E-03	7.7695936252542E-04
L^2	8.9549330528203E-04	3.2125439410145E-04

Comparaison P analytique - P deux champs

Pour le maillage $N = 20$, cas du polynôme nul au bord :

Dernier residu du solveur de Stokes (obtenu en deux itérations) :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 8.6287653679940E - 16$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	2.0711455530783E-04	1.7103667774193E-04
L^2	4.4466112762429E-05	7.6341032617006E-05

Comparaison U analytique - U deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	2.0713875645618E-04	1.7103667774193E-04
L^2	4.4454592310148E-05	7.6339285013842E-05

Comparaison V analytique - V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	7.2503642100963E-04	4.7356225229367E-04
L^2	2.1369756645506E-04	1.6611383330435E-04

Comparaison P analytique - P deux champs

Maillage $N = 10$, cas de la cavité sin-cos :

Dernier résidu obtenu (en deux itération) :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 3.0746172519940E - 14$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	3.5391830373400E-02	4.9636783516332E-02
L^2	1.0978061546065E-02	2.2457157272937E-02

Comparaison U analytique - U deux champs e1cm

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	8.4144285995003E-02	8.1960396344414E-02
L^2	2.0292520885218E-02	2.7577942288779E-02

Comparaison V analytique - V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	1.5055558965801	0.27609057480111
L^2	0.37076662787987	0.11995385317385

Comparaison P analytique - P deux champs

Maillage $N = 20$, cas de la cavité sin-cos :

Dernier résidu obtenu (en deux itération) :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 1.3424030256441E - 13$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	5.9719987025607E-03	1.2785382575433E-02
L^2	1.4848585545440E-03	6.0066702575581E-03

Comparaison U analytique - U deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	2.2595840027684E-02	2.0890650097409E-02
L^2	3.8925433668546E-03	7.5911157487454E-03

Comparaison V analytique - V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	0.96822050399513	0.30531766206790
L^2	0.12856507630874	5.7751600023197E-02

Comparaison P analytique - P deux champs

Nous pouvons observer que l'approximation est meilleure dans le cas test du polynôme nul au bord. Dans le cas de la cavité sinus-cosinus, la solution analytique présente deux oscillations dans chacune des directions x et y, c'est pourquoi une bonne approximation est plus difficile à obtenir, en particulier, on observe que la pression en nettement moins bien approchée que la vitesse. Remarquons également que l'erreur diminue lorsque le maillage s'affine. Ces observations nous permettent de considérer que le solveur de Stokes en vitesse-pression est opérationnel.

6.1.2 Solveur quatre champs

Dans le cas de la cavité entraînée, nous avons comparé les résultats des deux solveurs afin de valider la mise en œuvre de l'algorithme décrit dans la section (4). Les erreurs obtenues suivent.

Pour le maillage $N = 10$, le dernier residu du solveur Stokes (obtenu en deux itérations) est :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 4.7891682916543E - 15$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^∞	1.8188114275786E-07	1.8203984973597E-07
L^2	3.9427958689944E-08	6.7989374076522E-08

Comparaison U quatre champs - U deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^{∞}	2.1482518493959E-07	4.1149912829996E-07
L^2	6.4664029140859E-08	1.4694905484474E-07

Comparaison V quatre champs-V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^{∞}	3.3306690774948E-05	2.3592239319470E-05
L^2	6.8527507485866E-06	6.8111195906254E-06

Comparaison P quatre champs-P deux champs

Pour le maillage $N = 20$, le dernier residu du solveur de Stokes (obtenu en deux itérations) est :

$$\| BU - C \|_{0,h} = 2.5173224766796E - 14$$

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^{∞}	1.0411677429101E-06	2.4953899897540E-06
L^2	1.1859632275964E-07	7.7746792092554E-07

Comparaison U quatre champs-U deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^{∞}	6.6766246056837E-07	3.0936991015640E-06
L^2	1.1820701050768E-07	9.0166893924420E-07

Comparaison V quatre champs-V deux champs

Type d'erreur	PRES DU BORD	LOIN DU BORD
L^{∞}	1.9567680793564E-04	1.5543122315620E-04
L^2	2.5616928013849E-05	3.1579594875863E-05

Comparaison P quatre champs-P deux champs

Nous observons que les résultats obtenus par les deux solveurs sont proches, même pour un maillage grossier ($N = 10$), ceci est en accord avec les résultats de convergence de la section (4). de plus, remarquons que la pression est bien approchée. Ceci n'était pas prédit par un résultat théorique, notre hypothèse de convergence de la suite $(p_n)_n$ semble donc correcte. Nous venons de vérifier que le solveur de Bingham "quatre champs" fonctionne bien dans le cas newtonien. Nous allons vérifier dans toute la suite qu'il donne des résultats cohérents et interprètables dans les cas $g > 0$.

6.2 Etude de la convergence en fonction du maillage

Nous avons superposé, pour différents maillages, les courbes des vitesses horizontales, en coupe suivant l'axe vertical au centre du domaine (voir figure 3). Nous remarquons que l'écart entre les solutions obtenues pour différents maillages diminue quand le maillage s'affine. Remarquons également que que la solution présente quatre régimes distincts.

1. Un premier régime où u est nulle se situe sur l'intervalle [0,0.2] (environ). Ce régime correspond à une zone rigide où la vitesse est nulle (zone situéeau fond de la cavité).

2. Le deuxième régime correspond à une zone à l'état fluide située sur l'intervalle [0.2,0.6] (environ).

3. Le troisième régime [0.6,0.8] (environ) correspond à une zone rigide en rotation où la vitesse est constante.

4. Enfin, la dernier régime correspond à autre zones fluide où la vitesse croit vers un.

La discontinuité des conditions aux limites fait apparaître des singularités aux sommets supérieurs du domaines. Au voisinage de ces singularités, les contraintes σ et le taux de déformation tendent simultanément vers l'infini (se souvenir de la relation constitutive). La figure (4) montre l'évolution de σ^{12} au voisinage de ces coins. Remarquons que la valeur est d'autant plus grande que le maillage est fin. La résolution numérique de cette singularité nécessiterait une approche spécifique telle que le rafinement local du maillage au voisinage des coins.

6.3 Recherche du paramètre d'augmentation optimal

Nous avons pu observer que le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence varie de manière significative selon la valeur de r. Afin d'étudier le comportement de l'algorithme itératif, nous avons représenté deux types de courbes. Sur la figure (5), nous pouvons observer l'évolution du résidu $\| \gamma^n - D(u^n) \|_{0,h}$ au cours des itérations. Nous remarquons que l'algorithme converge beaucoups plus vite pour une valeur particulière de r (située à environ $r = 35$). Pour les r plus petits ou plus grands, la vitesse de convergence est plus faible. La vitesse de convergence correspond à la pente asymptotique en valeur absolue de cette courbe, c'est la limite quand N tend versl'infini du quotient :

$$-\frac{\| \gamma^n - D(u^n) \|_{0,h}}{N}$$

Cette vitesse asymptotique de convergence est représentée en fonction de r sur la figure(6). Les courbes que nous y voyons permettent de rendre compte des faits suivants :

- la valeur optimale de r dépend de g, elle semble se situer (à g fixé) sur la courbe des vitesses de convergence en fonction de r pour $g = 0$ (6),

- après un pic où la valeur de r est optimale, les courbes des vitesses de convergence en fonction de r font apparaître une asymptote (fig: 6) indépendantes de g.

6.4 Solutions pour divers seuils de plasticité

6.4.1 Comportement pour des g petits

Lorsque g tend vers 0, on peut vérifier que la solution obtenue tend vers la solution à $g = 0$, ce qui est prédit par un résultat donné dans [5] et repris récemment dans [16].

Les figures en fin de rapport montrent ce comportement. De plus, elles permettent la comparaison avec d'autres travaux [4] dont les résultats coïncident avec les nôtres.

Les zones rigides sont délimitées par la courbe $\| \sigma \| = g$, c'est ce critère que nous avons choisi pour les représenter.

6.4.2 Comportement pour des g grands

Lorsque g grandit, les zones rigides doivent se développer jusqu'à envahir presque totalement le domaine de l'écoulement. Nous avons effectué des essais pour des valeurs de g variant entre 0 et 150. Ceci nous a permis d'observer en particulier l'évolution des zones rigides. Nous pouvons alors constater, à mesure que g grandit, que des zones mortes apparaissent dans la partie inférieure du domaine, tandis qu'une zone rigide en rotation se développe dans la moitié supérieure du domaine, prenant la forme d'un demi-disque.

Pour les plus grandes valeurs de g, les zones mortes et la zone rigide en rotation tendent à se rejoindre, remarquons cependant que les zones mortes et la zone en rotation ne peuvent se rejoindre pour un g fini puisque le fluide est entraîné par le bord supérieur. ceci est confirmé par la figure (7) qui montre que la vitesse de rotation du “demi-disque” tend vers zéro quand g tend vers l'infini.

La seconde figure (8) donne une information supplémentaire : la décroissance est exponentielle.

Une autre façon d'observer les zones rigides et leur mouvement est de représenter la vorticité en élévation. En effet, cette dernière est constante dans les zones rigides. Sur la dernière figure, on peut observer des plateaux correspondants aux deux zones rigides.

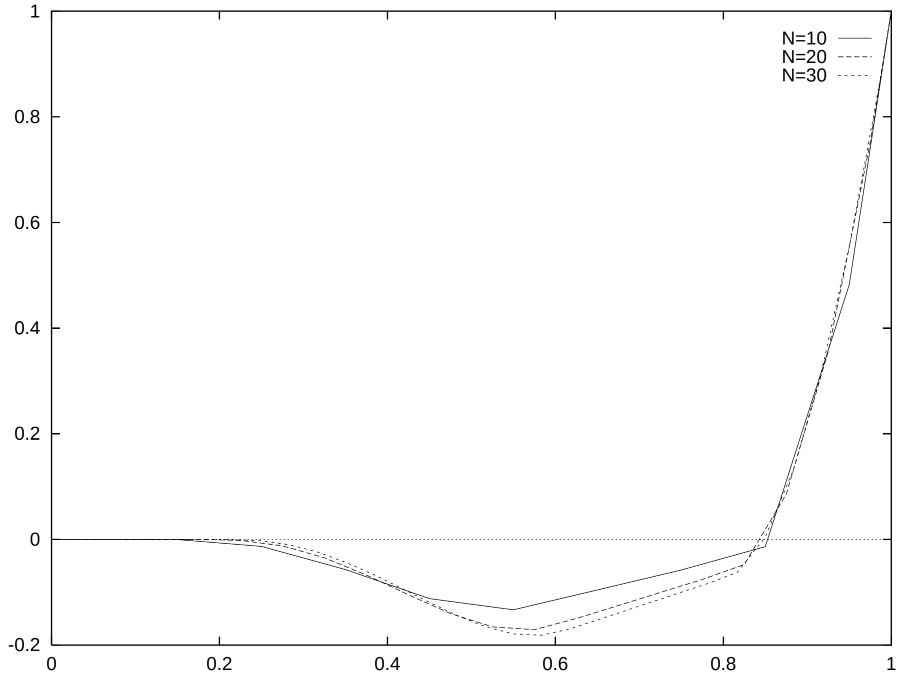


Figure 3: u en coupe verticale au centre pour $g = 10$ et $N = 10, 20, 30$.

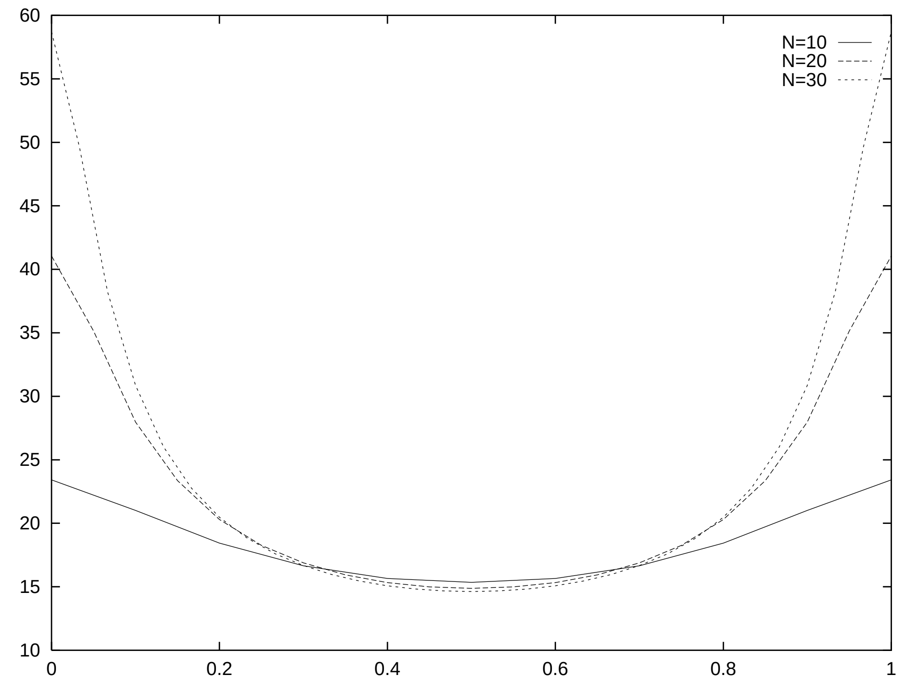


Figure 4: σ_{12} au bord supérieur pour $N = 10, 20, 30$.

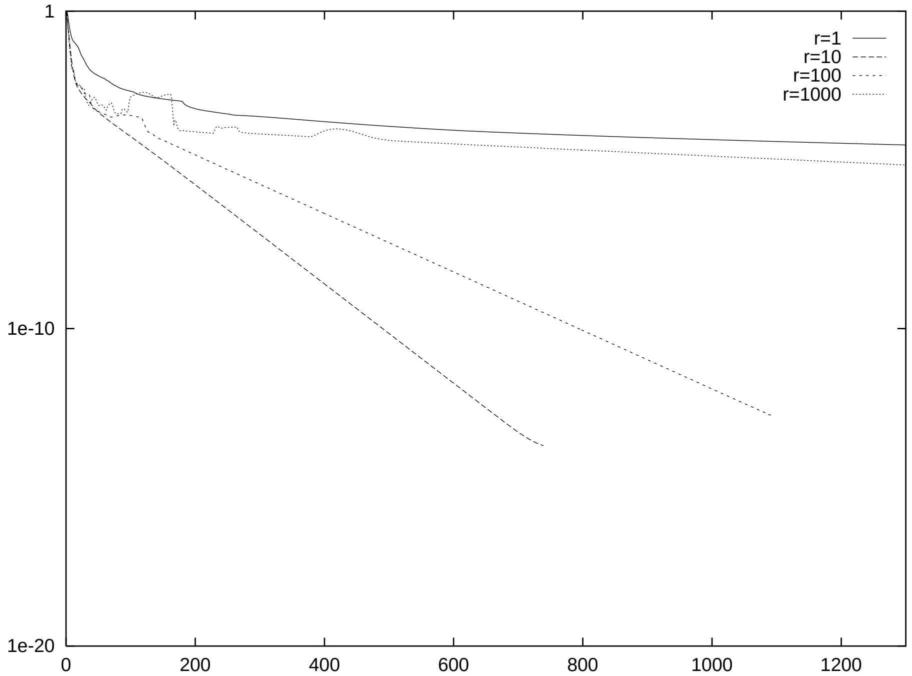


Figure 5: Résidus pour $g = 10$ et $r = 1, 10, 100, 1000$.

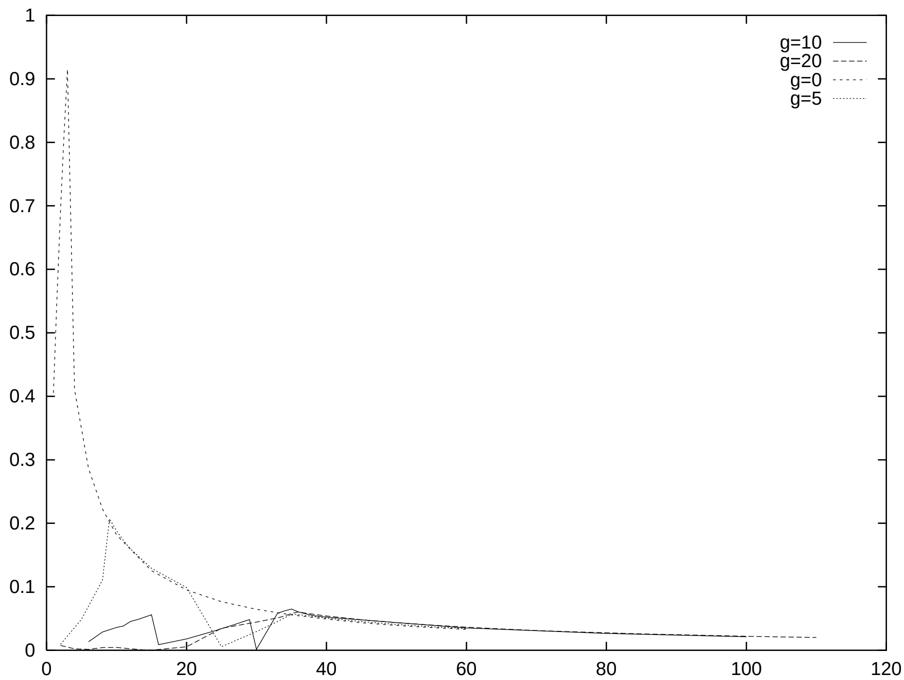


Figure 6: Vitesses de convergence en fonction de r pour divers g.

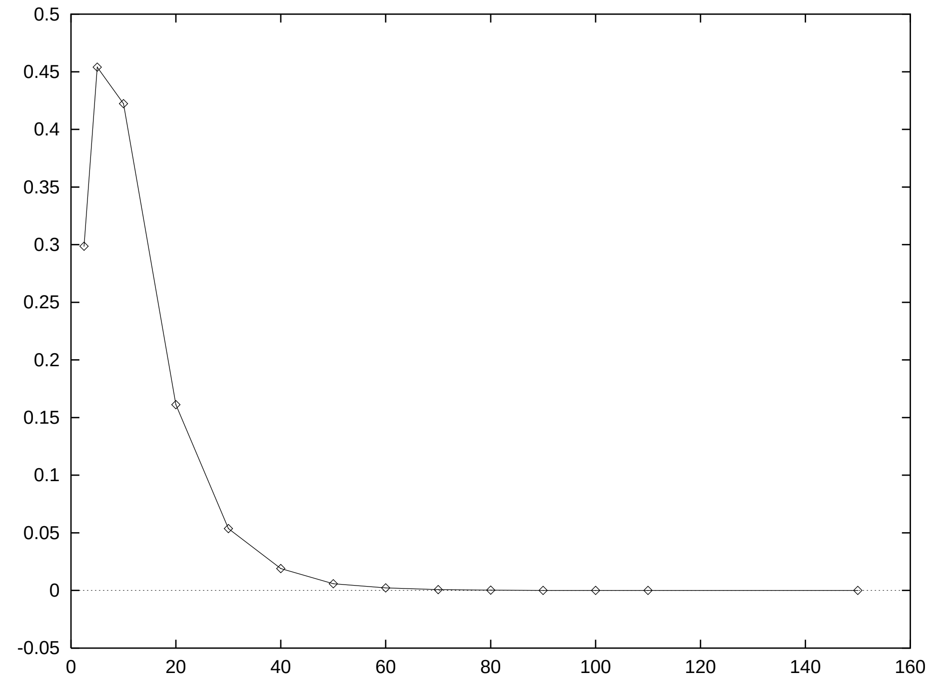


Figure 7: Vorticité dans la zone rigide en rotation en fonction de g , $N = 10, 20, 30$.

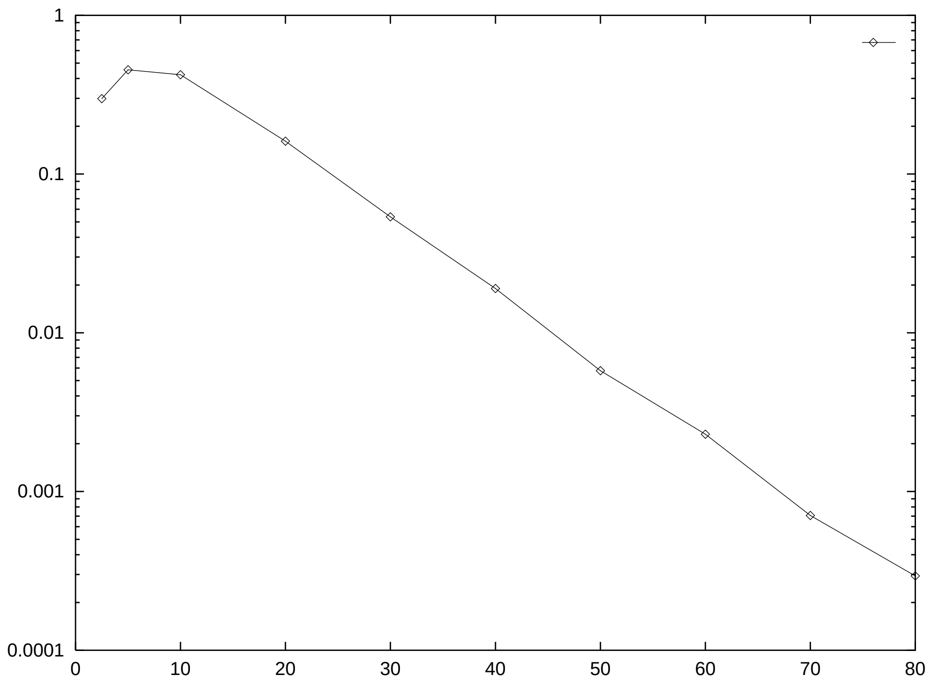
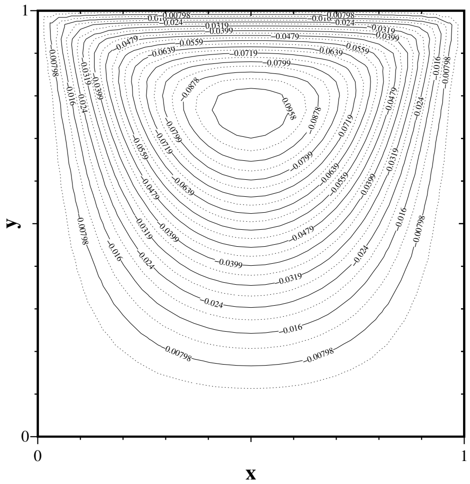
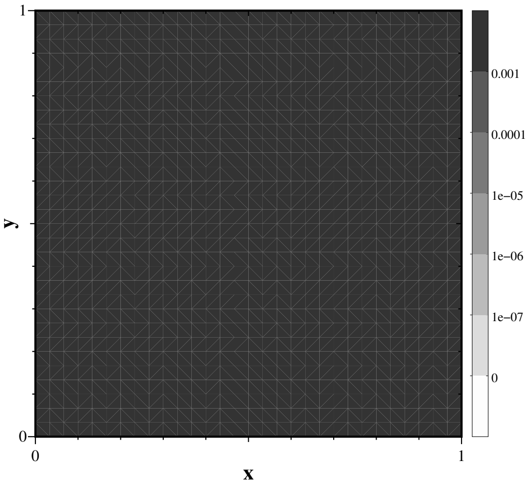


Figure 8: Vorticité dans la zone rigide en rotation en fonction de g , $N = 10, 20, 30$.

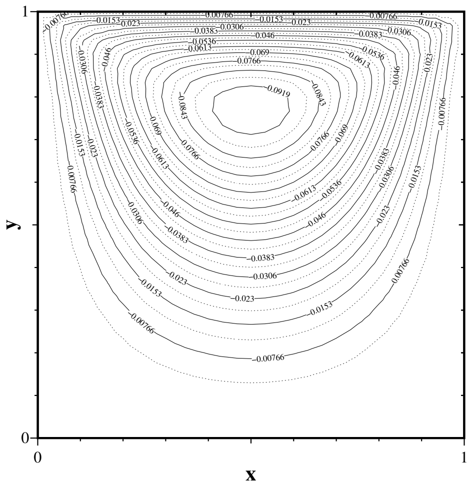
Fonction de Courant pour g=0



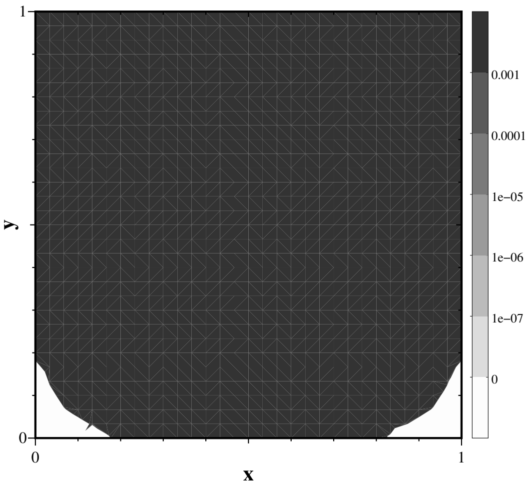
Zones Rigides/Fluides, g=0



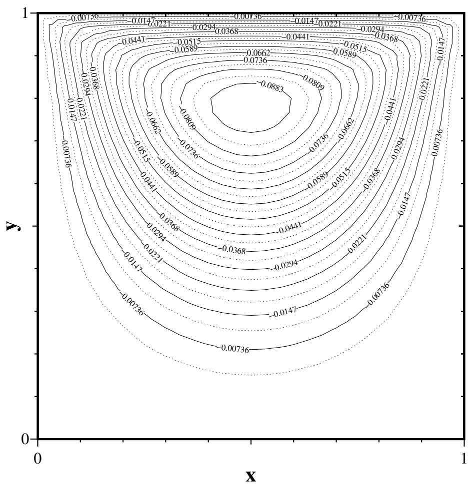
Fonction de Courant pour g=0.5



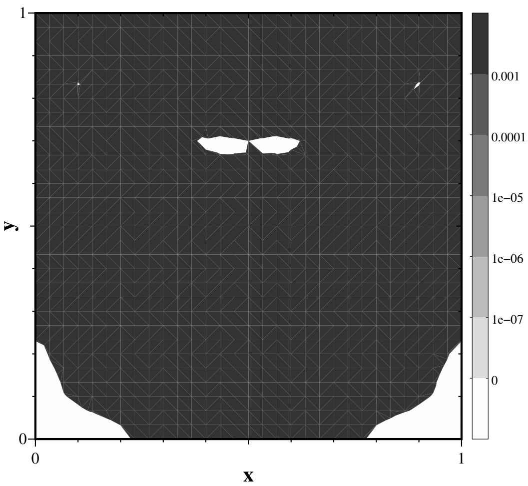
Zones Rigides/Fluides, g=0.5



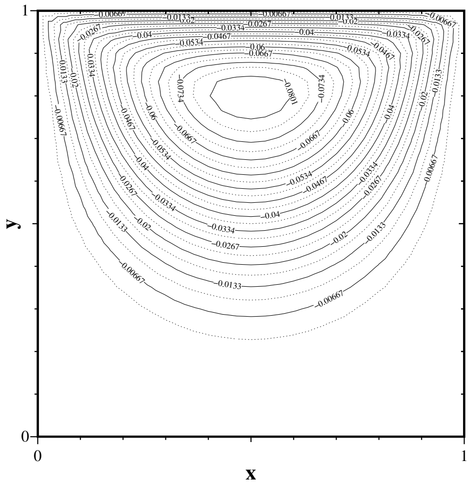
Fonction de Courant pour g=1



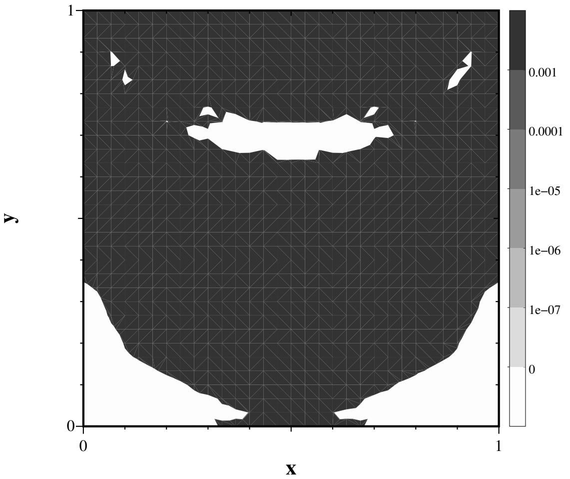
Zones Rigides/Fluides, g=1



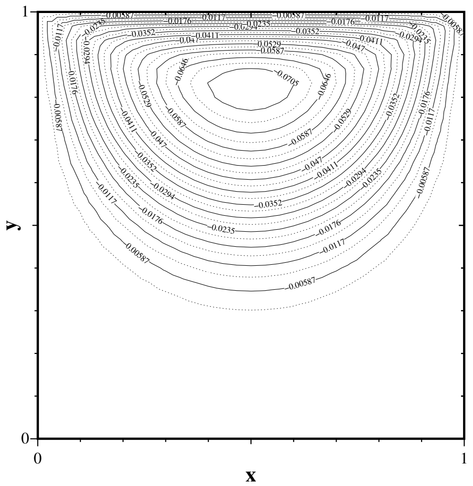
Fonction de Courant pour g=2.5



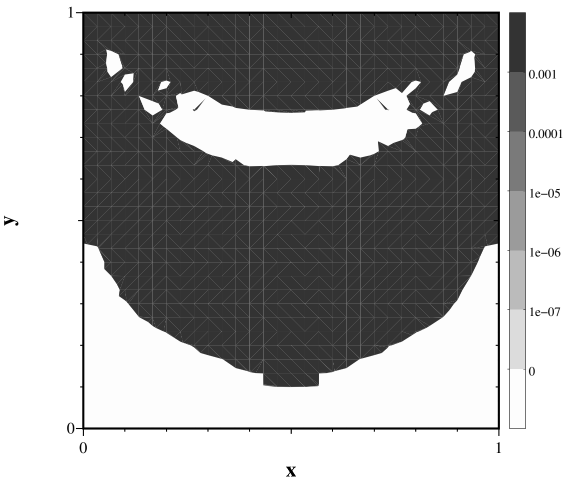
Zones Rigides/Fluides, g=2.5



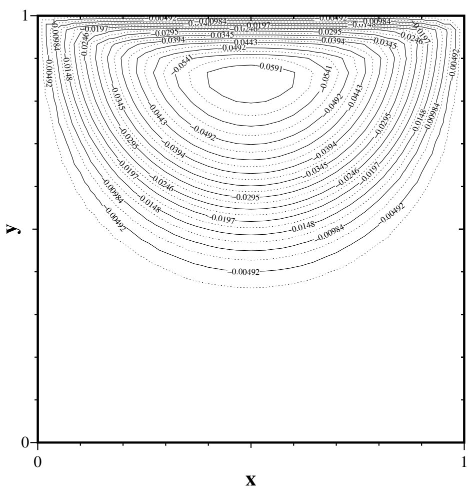
Fonction de Courant g=5



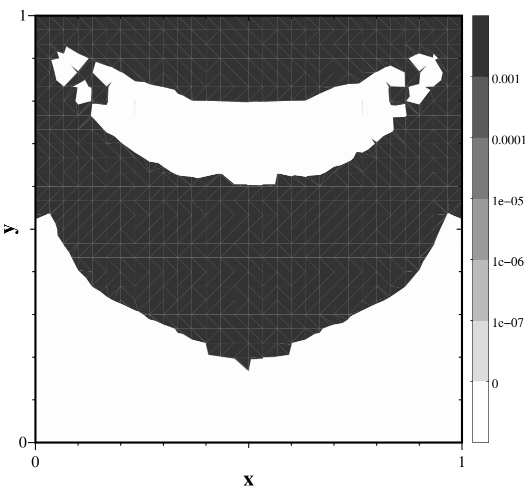
Zones Rigides/Fluides, g=5

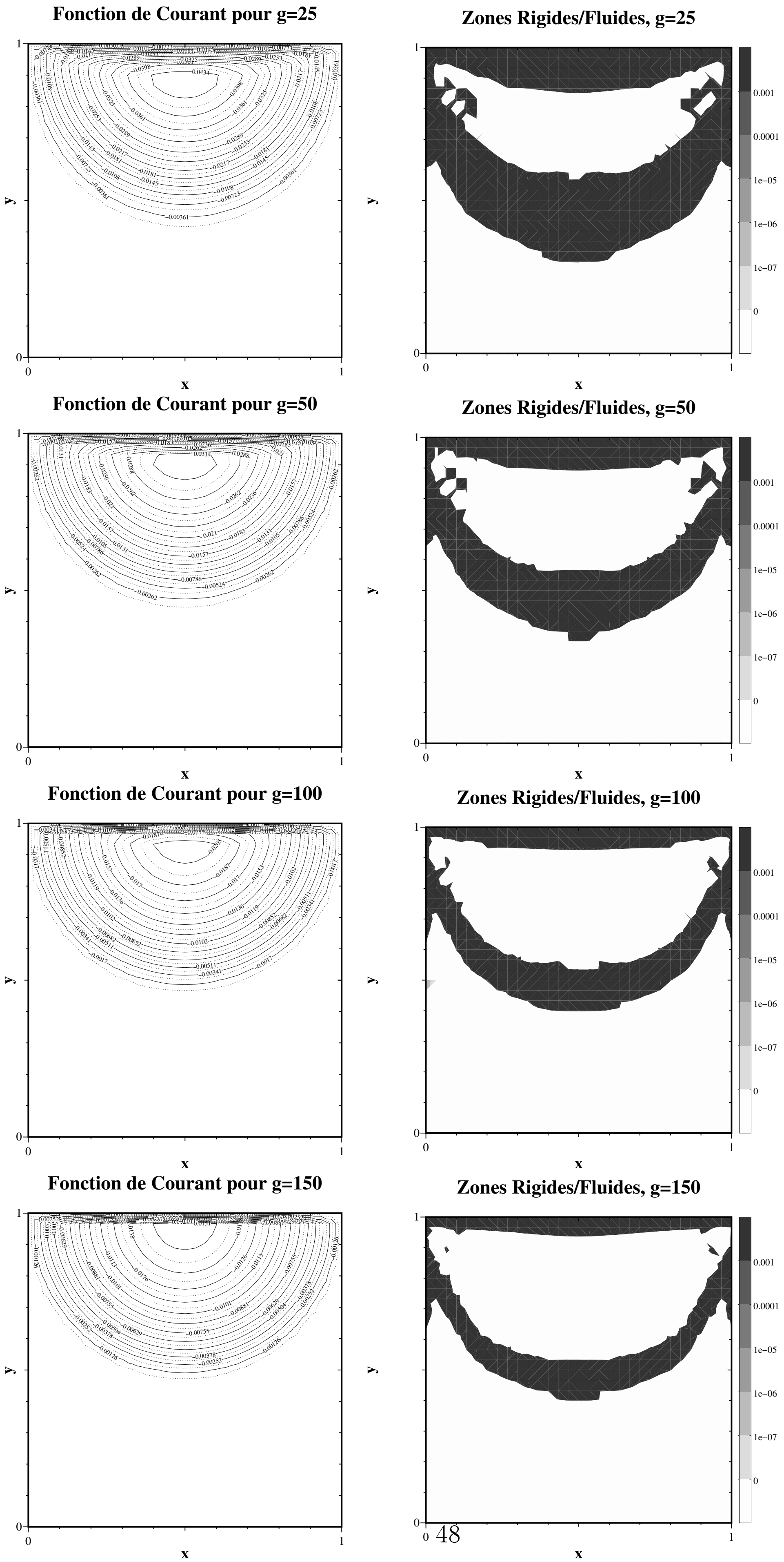


Fonction de Courant g=10



Zones Rigides/Fluides, g=10




Fonction de Courant pour g=25
Zones Rigides/Fluides, g=25
Fonction de Courant pour g=50
Zones Rigides/Fluides, g=50
Fonction de Courant pour g=100
Zones Rigides/Fluides, g=100
Fonction de Courant pour g=150
Zones Rigides/Fluides, g=150
x
y
0
1
0.001
0.0001
1e−05
1e−06
1e−07
0

Références

[1] B.D.Reddy. Mixed variational inequalities arising in elastoplasticity. *Nonlinear Anal.*, 19, 1992.

[2] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et application.* Masson, 1993.

[3] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arsing from lagrangian multiplier. *RAIRO, série Analyse Numérique*, R2: 129–151, 1974.

[4] D.Begis. Etude numerique de l'écoulement d'un fluide viscoplastique de bingham par une méthode de lagrangien augmenté. rapport de recherche 355, IRIA, juin 1979.

[5] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[6] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, theory and algorithms.* Springer-Verlag, 1886.

[7] R. Glowinski and M. Fortin. *Méthodes de Lagrangien Augmenté, applications à la résolution de problèmes aux limites.* Dunod, 1982.

[8] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator Splitting method in Non-Linear Mechanics.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 1989.

[9] J. L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20: 493–519, 1967.

[10] P. A. Raviart. *Méthode d'éléments finis em Mécanique de Fluides.* Eyrolles, 1981.

[11] D. Sandri. Analyse numérique de fluides non newtoniens : Fluides viscoelatiques et quasi-newtoniens. thèse 95-91, Univeristé Lyon 1, juillet 1991.

[12] P. Saramito. Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a θ-method. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28: 1–35, 1994.

[13] P. Saramito and J. M. Piau. Approximation mixte du problème de Stokes à trois champs; application au modèle de Phan-Thien et Tanner en contraction brusque. *28 ^{e} colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie, Le Mans*, octobre 1993.

[14] M. Sofonea and I. R. Ionescu. *Functional ans Numerical Methods in Viscoplasticity.* Oxford University Press, 1993.

[15] M. J. Strauss. Variations of korn's and sobolev's inequalities. *Proceedings of Symposia in Pure Math.*, 23: 207–214, 1973.

[16] W.Han. Quantitative error estimate in modeling the laminar stationary flow of a bingham fluid. *Appl. Math. Comput.*, 47, 1992.

[17] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1980.