THÈSE

Présentée par

Nicolas Roquet

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Résolution numérique d'écoulements à effets de seuil par éléments finis mixtes et adaptation de maillage

---

Soutenue le 10 juillet 2000

Composition du jury :

M.	Ioan R. Ionescu	*Président*
M.	Pierre Alart	*Rapporteur*
M.	Dominique Sandri	*Rapporteur*
M.	Pierre Saramito	*Examinateur*
M.	Jean-Claude Paumier	*Examinateur*
M.	Richard Michel	*Examinateur*
M.	Hervé Le Meur	*Examinateur*

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul - Grenoble

Remerciements

Avant tout, je souhaite remercier très vivement et très chaleureusement mes proches parents et mon épouse ; sans leur indispensable, inconditionnel et constant soutien moral et matériel, cette thèse n'aurait jamais pu exister.

En toutes circonstances, M. Pierre Saramito a encadré mes travaux avec une constante disponibilité et un optimisme inébranlable. Il a su établir une atmosphère de travail toujours motivante et amicale. Il m'a aidé à développer mon goût pour la recherche théorique et pratique en m'accordant une grande liberté dans mes investigations, tout en me prodiguant des conseils de grande valeur. Pour toutes ces raisons, je le remercie vivement.

M. Jean-Claude Paumier m'a apporté une soutien précieux pour l'achèvement de mes travaux. Son attitude amicale a contribué à rendre agréable mon arrivée au LMC.

Je remercie M. Ioan Ionescu qui m'a fait l'honneur de présider ce jury et j'exprime ma reconnaissance à MM. Pierre Alart et Dominique Sandri qui ont accepté de faire un rapport sur mon travail. Leurs conseils et remarques me permettent d'envisager de nouvelles perspectives scientifiques très réjouissantes.

M. Richard Michel a suivi les divers aspects de ma thèse en témoignant intérêt scientifique et sympathie. Le soutien qu'il m'a apporté lorsque c'était nécessaire m'a rendu de grands services.

M. Hervé Le Meur a bien voulu s'intéresser à mon travail, je le remercie d'avoir accepté d'y consacrer du temps.

Je souhaite témoigner toute ma gratitude à M. Jacques Blum pour m'avoir fait confiance en m'accueillant au sein du LMC. Je souhaite également remercier M. Gérard Chouteau qui m'a permis de mener cette thèse à son terme.

Enfin je remercie Claudine Meyrieux et le personnel du secrétariat ainsi que les collègues doctorants qui m'ont accueilli avec beaucoup de gentillesse au LMC.

Résumé

Ce travail décrit une méthode numérique mise en œuvre pour un problème d'inéquations variationnelles, avec une analyse de convergence suivie d'applications concrètes. Les inéquations sont issues de lois rhéologiques décrivant deux effets de seuil : un seuil en écoulement et un seuil de glissement à la paroi. La méthode doit déterminer avec précision les frontières de zones rigides et de zones de glissement. A cet effet, elle se compose d'un algorithme de lagrangien augmenté, d'une discrétisation par éléments finis P_k et d'un procédé d'adaptation de maillage.
En l'absence de glissement, nous démontrons que l'adaptation de maillage permet d'améliorer l'erreur pour $k \geq 2$. Dans le cas mono-dimensionnel, cette idée est illustrée par le calcul explicite de l'erreur. Pour un cas bidimensionnel particulier, nous obtenons une estimation H^1 quasi-optimale pour $k = 2$, cette estimation est confirmée numériquement. Un problème d'écoulement particulier est ensuite résolu numériquement ; des valeurs critiques des deux seuils sont obtenues. L'ensemble montre l'efficacité de la méthode sur un cas concret. Enfin, en l'absence de glissement, sur un problème plus complexe, avec une géométrie induisant une singularité, nous obtenons des résultats numériques précis montrant que la méthode est efficace sur des cas volumineux.

Mots-clefs : inéquations variationnelles – modèle de Bingham – glissement – éléments finis – adaptation de maillage – estimation d'erreur – simulation numérique – écoulement dans une conduite – écoulement autour d'un cylindre

Abstract

This work describe a numerical method applied to a problem involving variational inequalities, with a convergence analysis and some concretes applications. The inequalities come from rheological laws, describing two threshold phenomena : a flow threshold and a threshold for slip at the wall. The method must accurately catch boundaries of both rigid zones and slip zones. For that purpose, it consists in an Augmented Lagrangian algorithm, a P_k finite element method and a mesh adaptation process.
When no slip occurs, we point out the improvement of the error for $k \geq 2$ thanks to the mesh adaptation. In the mono-dimensional case, the explicit computation of the error illustrates this phenomenon. Furthermore, on a particular bidimensional case, the mesh refinement permits to show a quasi-optimal H^1 estimate for $k = 2$.
A particular flow is then numerically solved ; critical values of the two thresholds are caught, showing the efficiency of the method. Finally, on a more complex problem with a singularity and no-slip condition, we obtain accurate numerical results, showing that the method is efficient for complex flows.

key words : variational inequalities – Bingham model – slip at the wall – finite element – mesh adaptation – error estimate – numerical simulation – flow in pipe – flow around a cylinder

Introduction

Le présent travail a pour objectif d'élaborer une méthode numérique précise et efficace pour résoudre certaines inéquations variationnelles qui proviennent d'écoulements avec effets de seuil.

Qu'entend-on exactement par *effet de seuil* ? Si un phénomène se produit dès lors qu'une quantité dépasse une *valeur critique*, alors nous parlons d'*effet de seuil*. Nous qualifions précisément de *seuil* cette *valeur critique*. C'est un effet largement répandu dans de nombreux domaines. Nous avons pour notre part choisi de nous intéresser à des effets de seuil présents dans le domaine de la mécanique des matériaux en écoulement. Ainsi nous considérons d'une part ce qu'on appelle un *fluide à seuil* et d'autre part, un phénomène de *glissement à seuil*.
Dans un *fluide à seuil*, l'effet de seuil est un phénomène local : lorsque la contrainte dépasse localement une certain seuil (un *seuil en écoulement*), le matériau se déforme localement, ailleurs, le matériau se comporte comme un solide rigide. Notons immédiatement une conséquence importante : le matériau peut se comporter entièrement comme un solide rigide, c'est un phénomène souvent nommé *blocage* et qui survient la plupart du temps lorsque le seuil est très grand. Le phénomène de *glissement à seuil* est également local : lorsque la force tangentielle à la paroi dépasse un certain seuil (un *seuil de glissement*), le matériau se met à glisser, alors qu'ailleurs, il adhère à la paroi. Ce type de phénomène est connu du lecteur familier des lois de frottement de la mécanique des solides. Indiquons tout de suite que notre intérêt se portant essentiellement sur l'effet de seuil, nous utiliserons les modèles les plus simples qui décrivent cet effet.

Dans le cadre de nos problèmes de mécanique, c'est la physique du problème qui va déterminer les qualités requises pour une méthode numérique efficace et opérationnelle. Sans rentrer pour l'instant dans les détails, indiquons que le caractère local des effets de seuil que nous considérons conduit à l'existence de frontières internes à l'écoulement. L'enjeu qui apparaît alors quasi-naturellement est le suivant : déterminer avec précision la localisation et la forme de ces frontières internes. Une conséquence immédiate et cruciale est la détermination précise de la valeur de blocage du seuil en écoulement, c'est-à-dire la valeur à partir de laquelle les zones rigides occupent tout le domaine de l'écoulement (c'est ce qu'on appelle un problème d'analyse limite). Ceci ressort d'ailleurs nettement de la littérature sur la simulation numérique des écoulements de fluide à seuil et il y est clair qu'il s'agit d'un problème difficile.

Lorsqu'on souhaite déterminer numériquement de telles frontières, on est confronté à une difficulté majeure : de nombreux codes de résolution des problèmes non-linéaires s'appuient sur des méthodes de Newton qui ne peuvent pas s'appliquer *directement*[1] dans

1. Il existe en effet des variantes dites «Newton généralisé» et «quasi-Newton» qui sont intensivement développées depuis peu (voir P. Alart [1]) dans le but d'être appliquées à des problèmes semblables au nôtre.

le cas présent. Si on désire malgré tout les utiliser directement, une ressource consiste à régulariser les modèles. C'est un procédé assez répandu dans la littérature, son intérêt pratique étant l'utilisation directe de codes préexistant. Malheureusement cette régularisation revient à remplacer les zones rigides par des zones de très faible déformation. De même, les zones d'adhérence à la paroi deviennent des zones où la vitesse à la paroi est très faible. Dans de telles conditions, la notion de frontière des zones déformées n'a évidemment plus lieu, ce qui rend particulièrement délicate l'analyse des résultats. En effet, à partir de quelle valeur doit-on considérer que la très faible déformation correspond à une zone rigide plutôt qu'à une zone déformée ? Dans certains cas, des critères existent, qui prennent en considération le paramètre qui pilote la régularisation. Néanmoins, les résultats obtenus dépendent de ce paramètre, or, il nous semble que cette dépendance n'est pas souhaitable, dans la mesure où nous pouvons nous en passer.

Nous avons donc choisi une approche moins répandue car elle nécessite le développement d'un outil de calcul numérique. Nous ne régularisons pas les seuils et nous mettons en œuvre un algorithme dit de *lagrangien augmenté* pour un problème discrétisé par éléments finis. A l'issue d'un calcul numérique, la solution approchée qui est calculée fait apparaître des zones rigides approchées. Le champ approché correspondant au taux de déformations y est réellement nul et non très faible. La notion de zones rigides pour la solution calculée est donc sans équivoque. La précision du calcul et donc des frontières n'est ainsi liée qu'à la précision de l'approximation par éléments finis. Ceci est le premier point qui satisfait notre désir de précision concernant la détermination des frontières des zones rigides et d'adhérence. Puisque la précision des frontières ne semble plus liée qu'à celle de l'approximation par éléments finis, nous cherchons à renforcer cette dernière. C'est ce que nous avons souhaité faire en *adaptant les maillages*.

Il nous a semblé important de montrer que notre méthode était opérationnelle sur des cas concrets. C'est pourquoi nous l'avons utilisée pour étudier deux problèmes fondamentaux. Le premier est l'écoulement de matière viscoplastique dans une conduite droite de section carrée, sous l'action motrice d'une chute de pression. Ce problème classique est enrichi par l'introduction du glissement à seuil. Un exemple classique de ce type de problème est l'écoulement de bitume dans les pipe-line. Le second problème est en rapport avec la sédimentation d'objets dans des matériaux viscoplastiques. On peut par exemple penser à des morceaux de fruits dans une cuve de confiture, ou encore à des cailloux dans du ciment.

Dans la mesure où nous avons abordé deux aspects particuliers et complémentaires d'un même problème général, ce rapport se compose de trois parties : une première partie introductive et deux parties développant chacune un cas particulier.

La première partie expose le modèle général à partir duquel nous avons travaillé. L'analyse de l'approximation par éléments finis d'un problème mono-dimensionnel très simple y est détaillée, afin d'amener simplement les idées qui seront développées dans les contextes plus généraux des parties II et III.

Dans la partie II nous nous intéressons aux écoulements dans des conduites droites de section constante, tandis que la partie III concerne les écoulements bidimensionnels, lents et confinés, *sans glissement à la paroi*. Les parties II et III suivent un plan identique.

- Le modèle y est tout d'abord résumé dans un premier chapitre, en tenant compte du contexte particulier des écoulements considérés. Une formulation variationnelle convenant bien à l'élaboration d'une méthode numérique est ensuite donnée.
- Une présentation de notre méthode numérique est faite dans un deuxième chapitre. Après avoir abordé les questions d'existence et d'unicité du problème variationnel approché, nous précisons les aspects concrets de la méthode numérique qui est utilisée dans les chapitres de simulation numérique.
- L'analyse numérique de l'approximation par éléments finis est abordée dans un troisième chapitre. Nous souhaitons en particulier mettre l'accent sur l'utilité des éléments finis d'ordre supérieur à 1, à condition de compenser le manque de régularité des solutions par l'adaptation de maillage.
  Une analyse détaillée est effectuée dans la partie II. Dans un premier temps, nous considérons que la condition de glissement n'a pas lieu et, dans ce contexte, nous généralisons pour un domaine polygonal une démonstration de Glowinski [33] pour montrer, sous certaines hypothèses non classiques mais réalistes, que l'estimation d'erreur H^1 peut être améliorée pour une approximation P_2 lorsqu'un maillage convenable est utilisé. Cette idée est précisée sur le cas particulier du domaine circulaire où la solution est connue explicitement ; nous étendons notre résultat via la technique isoparamétrique et obtenons alors une estimation quasi-optimale. Les estimations obtenues sont nettement confirmées par des tests de mesures d'erreur. Dans un second temps, nous effectuons une estimation H^1 lorsque le glissement a lieu sur toute la paroi, mais pour un seuil en écoulement nul.
  Dans la partie III, l'analyse de convergence se limite à des mesures d'erreur, qui montrent que les estimations de la partie II sont susceptibles d'être étendues à des cas plus généraux.
- Le quatrième chapitre des parties II et III concerne la simulation numérique de problèmes concrets.
  Ainsi dans la partie II, nous cherchons à résoudre le problème de Poiseuille pour une section carrée, par le calcul numérique. La méthode prouve alors son efficacité, bien que l'approximation soit seulement P_1. Cinq régimes d'écoulements sont déterminés ainsi que l'évolution des zones rigides et des points de transition adhérence/glissement dans ces différents régimes. Ce chapitre peut aussi être considéré comme une mise à l'épreuve et une validation de la méthode. L'introduction du glissement rend en fait le problème peu classique, ce qui donne aux résultats obtenus un intérêt propre du point de vue de la mécanique.
  Dans la partie III, nous abordons la résolution numérique d'un problème bidimensionnel plus complexe. Il s'agit de l'écoulement incompressible autour d'un cylindre en translation à vitesse constante entre deux plaques parallèles. La pression est une inconnue et la géométrie induit une singularité. Des résultats précis sont obtenus.

En particulier, l'adaptation de maillage permet à nouveau de déterminer nettement différentes zones rigides et de montrer leur évolution selon la distance entre le cylindre et la plaque. Ce chapitre montre que notre méthode peut résoudre précisément des problèmes complexes. En outre, précisons que l'étude des ces effets de paroi est nouvelle.

Afin de permettre une lecture indépendante des parties II et III, on pourra trouver quelques petites redondances, notamment dans la présentation de la méthode numérique. Le diagramme de lecture de ce rapport est présenté sur la figure 1. Le lecteur intéressé par la simulation numérique pourra lire le premier chapitre de chacune des trois parties puis se reporter au dernier chapitre des parties II et III.
Le lecteur intéressé par la mise en œuvre de notre méthode pourra essentiellement se reporter aux sections II.2.2, II.2.3 et III.2.2, III.2.3.
Le reste du rapport concerne essentiellement l'analyse numérique.

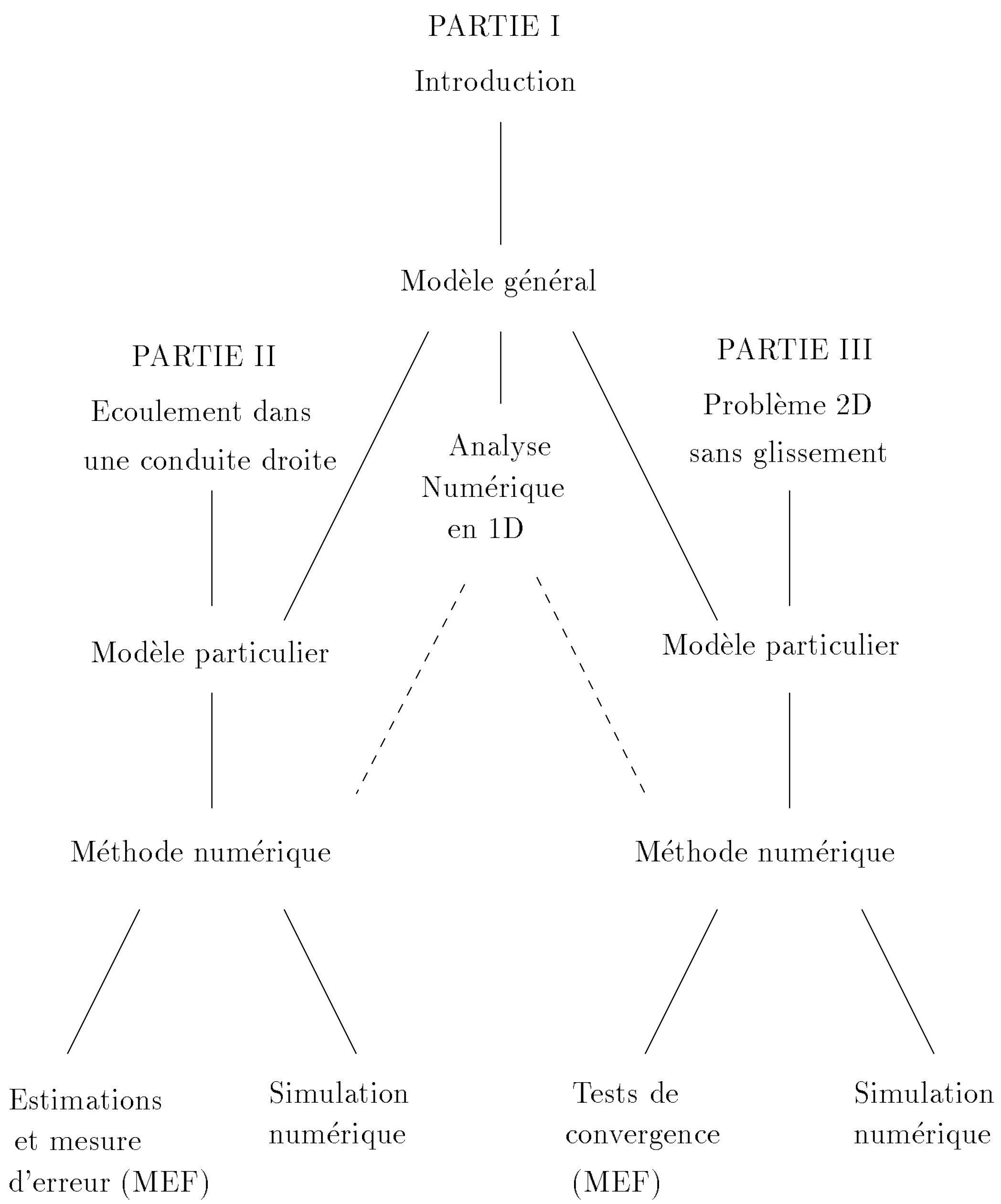


FIG. 1 – *Plan du rapport*

Notations

Les notations utilisées dans tout le rapport sont définies ici.

Paramètres rhéologiques, nombres sans dimension et champs

c_f : coefficient de friction

s_g : seuil de glissement

η : viscosité

σ_0 : Seuil de contrainte

Bi : nombre de Bingham, nombre sans dimension proportionnel au seuil d'écoulement

S : seuil de glissement sans dimension, nombre sans dimension proportionnel au seuil de glissement

C_F : coefficient de friction sans dimension

σ_{tot} : tenseur des contraintes

σ : déviateur du tenseur des contraintes

$\mathbf{u}$: vecteur des vitesses

$d = D(\mathbf{u})$: tenseur des taux de déformation

p : pression

Espaces fonctionnels et normes

$W^{s,p}(\Omega)$, $H^s(\Omega)$: espaces de Sobolev

$L^{p,\lambda}(\Omega)$: espace de Morrey

$BV(\Omega)$: fonctions à variations bornées

$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$: espace de Campanato

$|.|_{s,p;\Omega}$: semi-norme usuelle sur $W^{s,p}(\Omega)$

$\|.\|_{s,p;\Omega}$: norme usuelle sur $W^{s,p}(\Omega)$

$X(\Omega)$: espace des champs de vitesses

$V(\Omega)$: $\{\mathbf{v} \in X(\Omega) \; ; \; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$

$M(\Omega)$: espaces des pressions

$T(\Omega)$: espace des contraintes

$(.,.)$: produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$

$\|.\|$: norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

Domaines et sous-domaines

Ω : domaine d'écoulement, ouvert de $I\!R^2$

Ω_0 : zones rigides, partie de Ω sur laquelle $D(\mathbf{u}) = 0$

Ω^+ : zones déformées, partie de Ω sur laquelle $D(\mathbf{u}) \neq 0$

$\Omega_{0,\varepsilon}$: partie de Ω sur laquelle $\|D(\mathbf{u})\| \in]0;\varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$

Ω_ε : partie de Ω sur laquelle $\|D(\mathbf{u})\| > \varepsilon$

Discrétisation

ρ_K : rondeur du triangle K, diamètre du cercle inscrit

h_K : diamètre du triangle K, longueur de la plus grande arête de K

q_K : qualité du triangle K, rapport du diamètre à la rondeur de K

ω_h : réunion des éléments d'un maillage de Ω qui rencontrent la frontière des zones rigides

ω^+ : réunion des éléments d'un maillage de Ω qui rencontrent les zones déformées et qui ne sont pas inclus dans ω_h

ω_0 : réunion des éléments d'un maillage de Ω qui rencontrent les zones rigides et qui ne sont pas inclus dans ω_h

γ_h : réunion des arêtes du bord d'un maillage de Ω qui rencontrent les points de transition adhérence/glissement

γ^+ : réunion des arêtes d'un maillage de Ω qui rencontrent les parties du bord de Ω où le glissement a lieu et qui ne sont pas incluses dans γ_h

γ_0 : réunion des arêtes d'un maillage de Ω qui rencontrent les parties du bord de Ω où l'adhérence a lieu et qui ne sont pas incluses dans γ_h

Expressions particulières

$$F_\Omega(\beta) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{\beta}{\|\beta\|}(\|\beta\| - Bi) & si\ \|\beta\| \geq Bi \\ 0 & sinon \end{cases}$$

définit le taux de déformation dans le modèle de Bingham, lorsque $\beta = \sigma$.

$$F_{\Gamma_S}(b) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{C_F}\dfrac{b}{\|b\|}(\|b\| - S) & si\ \|b\| \geq S \\ 0 & sinon \end{cases}$$

définit la vitesse tangente à la paroi dans la loi de glissement lorsque $b = -(\sigma.\mathbf{n})_\mathbf{t}$.

$\mathrm{mes}(E)$: mesure de Lebesgue de $E \subset I\!R^N$.

$B(x_0, \rho) = \{x \in I\!R^N\ ;\ \|x - x_0\| < \rho\}$

Notations spécifiques au problème de Poiseuille

Le notations qui suivent sont utilisées dans la partie II, au chapitre 4, pour décrire les différents régimes d'écoulement dans le problème de Poiseuille. Sauf mention explicite du contraire, ces notations se rapportent au cas d'une section carrée.

Bi_A : Valeur limite de Bi au delà de laquelle le matériau adhère à toute la paroi
Bi_B : Valeur limite de Bi au delà de laquelle le matériau est bloqué
Bi_G : Valeur limite de Bi au delà de laquelle le matériau glisse sur toute la paroi
Bi_T : Valeur limite de Bi au delà de laquelle le matériau se translate en bloc
Bi_C : Valeur limite de Bi au delà de laquelle le bouchon est en contact avec la paroi sur toute la paroi
S_T : Valeur limite de S au dessous de laquelle le matériau se translate en bloc, pour $Bi > Bi_T$ et au delà de laquelle le blocage a lieu pour $Bi > Bi_B$
S_G : Valeur limite de S au dessous de laquelle le matériau glisse sur toute la paroi
S_A : Valeur limite de S au dessous de laquelle le matériau adhère à toute la paroi
Y_T : Ordonnée d'un point de transition adhérence/glissement
U_T : Vitesse du matériau lorsque celui-ci se translate en bloc

Table des matières

Table des figures

Première partie

Présentation générale du problème

L'objectif de cette première partie est d'introduire les problèmes que nous souhaitons aborder dans les parties II et III.

Ainsi, le modèle d'écoulement qui nous préoccupe est tout d'abord présenté de manière générale dans un premier chapitre. Ce sont deux cas particuliers de ce modèle général qui seront ensuite explorés dans les parties II et III.

Le second chapitre aborde, pour un problème très simple, quelques-unes des particularités de l'approximation par éléments finis du modèle. Les résultats obtenus permettrons de justifier la démarche adoptée dans les parties II et III pour construire une méthode numérique précise.

Chapitre 1

Modélisation des écoulements considérés

Nous allons présenter les relations qui permettent de décrire des écoulements stationnaires, lents et confinés de matériaux viscoplastiques.

Après avoir rappelé la forme classique des lois de conservation, nous décrirons une loi de comportement fréquemment utilisée dans la littérature sur les matériaux viscoplastiques. Cette loi particulière, nommée traditionnellement le modèle de Bingham, nous semble être la plus simple parmi celles qui décrivent un effet de seuil en écoulement. Elle permet donc de satisfaire notre volonté de traiter essentiellement la difficulté du seuil. Suivant la même idée, nous présenterons ensuite une loi simple de glissement à seuil. Finalement, l'ensemble des relations ainsi présentées sera écrit sous une forme sans dimension.

1.1 Lois de conservation

Un fluide viscoplastique homogène, de densité ρ, s'écoulant à la vitesse $\mathbf{u}$ dans un domaine $\Omega \subset I\!R^N$ $(N \geq 1)$ obéit aux lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse suivantes :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{div}\, \sigma_{tot} + \mathbf{f},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\, \mathbf{u}) = 0,$$

où on a posé :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u},$$

$$\sigma_{tot} = \sigma - pI,$$

$$d = D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2},$$

σ_{tot} désigne le tenseur des contraintes de Cauchy, σ son déviateur, p est identifiée à une pression et d sera appelé le taux de déformation. Nous faisons l'hypothèse que la densité ρ est constante, ce qui implique : $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Alors les équations deviennent :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{div}\, \sigma - \boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

De plus, nous considérons des écoulements stationnaires où l'inertie $(\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ est négligeable. Ceci réduit encore la conservation de la quantité de mouvement :

$$\mathbf{div}\, \sigma - \boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

1.2 Relation constitutive et loi de viscosité

Nous allons maintenant relier le déviateur σ du tenseur des contraintes au taux de déformation d, c'est-à-dire écrire une relation constitutive (on parlera aussi de loi de comportement).

L'*effet de seuil d'écoulement* est caractérisé par l'existence d'un niveau de contraintes, un seuil, en deça duquel il n'y a pas de déformation ($d = 0$). Ceci introduit naturellement un *seuil de contrainte d'écoulement* $\sigma_0 > 0$ et rend nécessaire l'utilisation d'un moyen de comparaison de σ_0 avec les contraintes σ. Ce moyen est appelé *critère de plasticité*. Lorsque les contraintes franchissent le seuil σ_0 (au sens du critère de plasticité), le matériau se déforme et sa viscosité η intervient. Il existe plusieurs critères de plasticité et on peut imaginer de nombreuses lois de dépendance entre η et d.

Comme notre préoccupation principale va être de traiter des difficultés propres à l'effet de seuil, nous nous limiterons dans la suite de manière exclusive à l'étude d'une loi de comportement particulière : le *modèle de Bingham* (Bingham [9]). En effet, parmi les modèles classiques présentant un effet de seuil, celui-ci nous semble le plus simple, puisque sa viscosité η est constante.

Nous définissons à présent le modèle de Bingham par :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \dfrac{d}{\|d\|} + 2\eta d & \text{si} \qquad d \neq 0 \\ \text{indéterminé avec } \|\sigma\| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.3}$$

soit aussi, de manière équivalente :

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad \|\sigma\| < \sigma_0 \\ \dfrac{1}{2\eta} \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|} \left(\|\sigma\| - \sigma_0\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.4}$$

Le critère de plasticité $\|\sigma\| < \sigma_0$ est appelé *critère de Von Mises*, où $\|.\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Pour $\sigma_0 = 0$, on retrouve la classique loi linéaire dite newtonienne : $\sigma = 2\,\eta\, d$. Le modèle de Bingham est donc une extension de la loi de comportement newtonienne, par l'introduction d'un effet de seuil, effet non-linéaire.

Signalons que, dans la loi (1.3), lorsque la viscosité varie en loi de puissance par rapport à $\|d\|$:

$$\eta(\|d\|^2) = \alpha \|d\|^{r-2} \text{ avec } r > 1$$

on parle du *modèle d'Herschel-Bulkley*. C'est un modèle qui sert de référence dans de nombreux travaux expérimentaux et qui est, à ce titre, souvent utilisé dans des travaux de simulation numérique. Il nous arrivera donc parfois dans ce rapport de faire référence à des travaux utilisant ce modèle, lorsque ceux-ci traitent essentiellement des effets liés au seuil σ_0. Dans le cas du modèle d'Herschel-Bulkley, la relation (1.4) donne :

$$d = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|} \left(\dfrac{\|\sigma\| - \sigma_0}{2\alpha} \right)^{1/(r-1)} & \text{si} \qquad \|\sigma\| - \sigma_0 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, vu l'expression de η et la relation (1.4), nous avons :

$$2\alpha \|d\|^{r-2} d = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad \|\sigma\| < \sigma_0 \\ \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|} \left(\|\sigma\| - \sigma_0\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

nous en déduisons immédiatement une expression de la norme $\|d\|$ de d :

$$\|d\| = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad \|\sigma\| < \sigma_0 \\ \left(\dfrac{\|\sigma\| - \sigma_0}{2\alpha} \right)^{1/(r-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi, nous pouvons conclure que :

$$
\begin{aligned}
d &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|\sigma\| < \sigma_0 \\ \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|}\left(\dfrac{\|\sigma\| - \sigma_0}{2\alpha}\right) \times \dfrac{1}{\|d\|^{r-2}} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|\sigma\| < \sigma_0 \\ \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|}\left(\dfrac{\|\sigma\| - \sigma_0}{2\alpha}\right)^{1/(r-1)} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lorsque $1 < r < 2$, on parle d'un matériau rhéo-épaississant, quand au contraire $r > 2$, on parle d'un matériau rhéo-fluidifiant. Le cas $r = 2$ correspond à une viscosité η constante et nous retrouvons les relations équivalentes (1.3) et (1.4).

1.3 Conditions aux limites, loi de glissement

La frontière Γ de Ω est supposée partitionnée en Γ_D, Γ_N et Γ_S, avec $\Gamma_D \cup \Gamma_S \neq \emptyset$, sur lesquelles nous définissons les conditions suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad & \text{sur} \quad \Gamma_D \\
\sigma.\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad & \text{sur} \quad \Gamma_N
\end{aligned}
$$

où $\mathbf{n}$ est définie sur Γ et désigne la normale extérieure à Ω. En outre, pour un vecteur $\mathbf{w} \in I\!R^N$, la composante tangentielle au bord Γ est définie par :

$$
\mathbf{w_t} = \mathbf{w} - (\mathbf{w}.\mathbf{n})\mathbf{n}
$$

Sur Γ_S, nous imposons une condition de glissement à seuil. Cette loi se construit par analogie avec la loi de comportement. De manière générale, nous pouvons nous donner une fonction $c_f > 0$ et écrire une telle loi sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}.\mathbf{n} = 0 \\
&c_f(\mathbf{u_t})\mathbf{u_t} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \quad \|(\sigma_{tot}.\mathbf{n})_\mathbf{t}\| < s_g, \\ -\dfrac{(\sigma_{tot}.\mathbf{n})_\mathbf{t}}{\|(\sigma_{tot}.\mathbf{n})_\mathbf{t}\|}(\|(\sigma_{tot}.\mathbf{n})_\mathbf{t}\| - s_g) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Dans cette loi, s_g désigne un seuil de glissement au dessous duquel l'adhérence à lieu. Tout comme pour la loi de comportement, nous choisissons la loi la plus simple en considérant pour la suite c_f **constant**. Ceci nous permettra d'isoler les phénomènes et les difficultés liés à l'existence du seuil de glissement s_g. Signalons que cette loi simple a été proposée par A. Fortin *et al.* [25].

REMARQUE **1.3.1**

1. *Dans cette loi, nous pouvons remplacer σ_{tot} par σ car :*

$$(\sigma_{tot}.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} = ((\sigma - pI).\mathbf{n})_{\mathbf{t}} = (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} - p(\mathbf{n}.\mathbf{t}) = (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}}$$

2. *Dans la pratique, la condition sur Γ_N sera utilisée pour traduire une condition de symétrie, ce qui permet de réduire le volume des calculs lors d'une simulation numérique.*

Indiquons en outre, que d'autres lois de glissement ont été proposées par Ionescu et Vernescu [47] pour des écoulements de fluide de Bingham. Ces lois s'apparentent à des lois de frottement de Coulomb et s_g **n'y est pas constant**. Ces lois prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}.\mathbf{n} = 0 \\ \| (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} \| \leq s_g : \left\{ \begin{array}{l} \| (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} \| < s_g \Longrightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{t}} = 0 \\ \| (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} \| = s_g \Longrightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{t}} = -\lambda (\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}} \ , \ \lambda > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Lorsque $s_g = \mu | (\sigma.\mathbf{n}).\mathbf{n}|$, (avec μ un coefficient> 0) nous obtenons une loi de Coulomb, lorsque $s_g = \mu(\sigma_0 + \|D(\mathbf{u})\|)$, nous obtenons une loi proposée par Cristescu et Suliciu [22]. Ces lois sont plus difficiles à manipuler que (1.5) avec c_f et s_g constants car elles compliquent l'effet de seuil en rendant le seuil de glissement dépendant des champs σ ou $\mathbf{u}$. Ceci constitue une difficulté qui ne correspond pas à notre objectif.

1.4 Adimensionnement

Nous proposons maintenant d'écrire les relations (1.1)-(1.5) sous une forme sans dimension. Dans cette section, nous mettons un tilde sur les grandeurs sans dimension.

Soient U et L des grandeurs de référence :

$$\mathbf{u} = U\widetilde{\mathbf{u}}\,, \quad \mathbf{u}_D = U\widetilde{\mathbf{u}_D}\,, \quad x = L\widetilde{x}.$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.1) devient :

$$\frac{1}{L}(\widetilde{\mathbf{div}}\,\sigma - \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}p) + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

et nous avons toujours : $\widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{\mathbf{u}}$=0.

Par ailleurs, $d = (U/L)\tilde{d}$, donc nous obtenons pour la loi de comportement (1.3) :

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{lll} \|\sigma\| < \sigma_0 & \text{si} & \tilde{d} = 0 \\ 2\,\eta \dfrac{U}{L}\tilde{d} + \sigma_0 \dfrac{\tilde{d}}{\|\tilde{d}\|} & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

puis, en posant $\Sigma = \dfrac{\eta U}{L}$ et $Bi = \dfrac{\sigma_0}{\Sigma}$, nous trouvons une expression de la loi de comportement sans dimension :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\Sigma} = \begin{cases} \|\widetilde{\sigma}\| < Bi & \text{si} \quad \widetilde{d} = 0 \\ 2\,\widetilde{d} + Bi\dfrac{\widetilde{d}}{\|\widetilde{d}\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

De même, lorsque nous écrivons la loi de comportement sous la forme (1.4), nous obtenons :

$$\frac{U}{L}\widetilde{d} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \Sigma\|\widetilde{\sigma}\| < \sigma_0 \\ \dfrac{1}{2\eta}\dfrac{\widetilde{\sigma}}{\|\widetilde{\sigma}\|}\left(\Sigma\|\widetilde{\sigma}\| - \sigma_0\right) & sinon \end{cases}$$

soit :

$$2\widetilde{d} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|\widetilde{\sigma}\| < Bi \\ \dfrac{\widetilde{\sigma}}{\|\widetilde{\sigma}\|}\left(\|\widetilde{\sigma}\| - Bi\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons ensuite écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec $\Sigma\widetilde{\sigma_{tot}} = \sigma_{tot}$:

$$\widetilde{\mathbf{div}}\,\widetilde{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}\widetilde{p} + \widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$$

où nous avons posé : $\tilde{\mathbf{f}} = \dfrac{L^2}{\eta U}\mathbf{f}$.

Enfin, la loi de glissement (1.5) devient :

$$\widetilde{\mathbf{u}}.\mathbf{n} = 0$$

$$c_f\, U\widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \quad \|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\| < \dfrac{s_g}{\Sigma}, \\ -\dfrac{\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}}{\|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\|}\left(\Sigma\|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\| - s_g\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit, finalement :

$$\widetilde{\mathbf{u}}.\mathbf{n} = 0$$

$$C_F\,\widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \quad \|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\| < S, \\ -\dfrac{\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}}{\|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\|}\left(\|\left(\widetilde{\sigma_{tot}}.\mathbf{n}\right)_{\mathbf{t}}\| - S\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où nous avons posé : $C_F = \dfrac{c_f\, U}{\Sigma}$ et $S = \dfrac{s_g}{\Sigma}$.

1.5 Modèle retenu

Nous considérons désormais des grandeurs écrites sans dimension. L'absence d'ambiguïté nous permet d'omettre les tildes sur ces grandeurs. Les problèmes que nous allons résoudre dans les parties II et III consistent alors à trouver $(\mathbf{u}, \sigma, p)$ vérifiant les relations qui suivent :

$$d = D(\mathbf{u}) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{div}\,\sigma - \boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.9}$$

ainsi que l'une des deux relations équivalentes désignant la loi de comportement sans dimension :

$$\sigma = \begin{cases} \|\sigma\| < Bi & \text{si} \qquad d = 0 \\ 2\,d + Bi\dfrac{d}{\|d\|} & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.10}$$

$$2\,d = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad \|\sigma\| < Bi, \\ \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|}\,(\|\sigma\| - Bi) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.11}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sur} & \Gamma_D \\ \sigma.\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur} & \Gamma_N \\ \mathbf{u}.\mathbf{n} = 0 & \text{sur} & \Gamma_S \end{array} \tag{1.12}$$

et la relation suivante, désignant la loi de glissement sur Γ_S :

$$C_F\,\mathbf{u_t} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \qquad \|\,(\sigma.\mathbf{n})_\mathbf{t}\,\| < S, \\ -\dfrac{(\sigma.\mathbf{n})_\mathbf{t}}{\|\,(\sigma.\mathbf{n})_\mathbf{t}\,\|}(\|\,(\sigma.\mathbf{n})_\mathbf{t}\,\| - S) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.13}$$

Dans la partie II, la pression p sera en fait une donnée et, dans la partie III, nous envisagerons une situation où $\Gamma_S = \emptyset$. Ainsi, dans chacune de ces parties, nous aborderons des difficultés de nature différente.

Récapitulons enfin les différents paramètres sans dimension et leur signification.

$Bi = \dfrac{\sigma_0\,L}{U\,\eta}$	:	nombre de Bingham,
$S = \frac{s_g}{\Sigma}$	:	seuil de glissement sans dimension,
$C_F = \dfrac{c_f\,U}{\Sigma}$	:	coefficient de frottement sans dimension.

Finalement, outre la géométrie et les nombres sans dimension, les données sont un terme source $\mathbf{f}$ et une vitesse imposée sur Γ_D : $\mathbf{u}_D$.

Bien sûr, le choix des grandeurs de référence U et L dépend des problèmes concrets que l'on considère et d'autres nombres sans dimension peuvent apparaître. c'est le cas par exemple lorsqu'un paramètre pilote une configuration de la géométrie (la distance entre deux plaques, par exemple, dans le dernier chapitre de la partie III).

Chapitre 2

Analyse d'une approximation du cas mono-dimensionnel

Nous souhaitons dans ce chapitre décrire en détail l'approximation par éléments finis d'un cas très simple, afin de fixer les idées sur les difficultés à envisager dans un cadre plus général.

Nous commençons donc par décrire un problème mono-dimensionnel dont nous donnons la solution explicitement, puis nous décrivons le problème approché par éléments finis. Pour une approximation continue et affine par morceau (P_1-continue) de la vitesse, nous calculons explicitement la solution approchée, ainsi que l'erreur d'approximation dans les normes H^1, $W^{1,\infty}$ et L^∞. La même opération est répétée pour une approximation continue quadratique par morceau (P_2-continue) de la vitesse. Les résultats obtenus pour ces deux approximations particulières sont finalement comparés et montrent alors l'utilité d'adapter le maillage au voisinage des frontière de la zone rigide, pour l'approximation quadratique.

2.1 Problème de Poiseuille plan

Le problème considéré ici est schématisé par la figure 2.1.

Soit deux plaques parallèles séparées par une distance $2L$. Un fluide de Bingham, de seuil σ_0, est mis en mouvement entre ces deux plaques sous l'action d'une chute de pression f. Nous supposons que le matériau adhère à la paroi.

Un tel écoulement est nommé "Poiseuille plan". C'est une approximation de l'écoulement dans une conduite rectiligne de section rectangulaire, où le rectangle qui constitue la

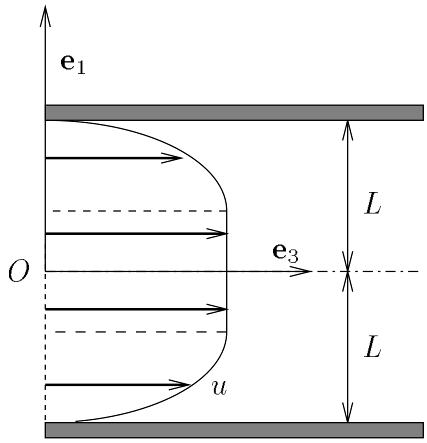


FIG. 2.1 – *Représentation schématique de l'écoulement entre deux plaques parallèles, ou «Poiseuille plan».*

section possède un côté très grand devant l'autre. En conséquence, la vitesse n'a qu'une composante non-nulle, notée u, suivant l'axe $\mathbf{e}_3$, et elle ne dépend que de $x \in]-L; L[$ (elle est considérée constante par rapport à y). De même la contrainte de cisaillement est représentée par un champs scalaire noté ici σ et ne dépend que de x.

Par symétrie, nous sommes ramenés à l'intervalle $]0; L[$, quitte à poser la condition de symétrie :

$$\sigma(0) = 0$$

Une fois défini le nombre sans dimension :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{Lf}$$

nous posons $\Omega =]0; 1[$, $\Gamma_S = \emptyset$, $\Gamma_N = \{0\}$ ainsi que $\Gamma_D = \{1\}$ et cherchons à trouver la solution du problème mono-dimensionnel suivant, composé de la loi de comportement, de la loi de conservation de la quantité de mouvement, de la condition de symétrie en $x = 0$ et de la condition d'adhérence en $x = 1$:

PROBLÈME **2.1.1** *Trouver des fonctions u et σ définies sur $]0; 1[$ telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx}(x) = F_\Omega(\sigma) \stackrel{déf}{=} \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\sigma(x)}{|\sigma(x)|}(|\sigma(x)| - Bi) & si & |\sigma(x)| > Bi \\ 0 & sinon & \end{array} \right. \\ \dfrac{d\sigma}{dx}(x) = -1 \\ \\ \sigma(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Ici la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ est automatiquement satisfaite puisque $\mathbf{u}(x,y,z) = u(x)\mathbf{e}_3$. La solution de ce problème s'obtient aisément et figure dans de nombreux ouvrages (voir par exemple dans [33], les relations (6.13) et (6.14) page 94). Il s'agit de :

$$\sigma(x) = -x$$

et pour $Bi < 1$, on a :

$$d(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{du}{dx}(x) = \begin{cases} Bi - x & \text{si} \quad x > Bi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{(Bi-1)^2}{2} - \dfrac{(Bi-x)^2}{2} & \text{si} \quad x > Bi \\[2ex] \dfrac{(Bi-1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $Bi \geq 1$, la vitesse u est identiquement nulle, l'écoulement est bloqué.

En outre, si nous posons :

$$X(\Omega) = \left\{ v \in H^1(0;1)\ ;\ v(1) = 0 \right\}$$

il est possible de montrer [1] que les champs $u \in X(\Omega)$, $\sigma \in L^2(0;1)$ et $d \in L^2(0;1)$ satisfont, pour tous $v \in X(\Omega)$, $\xi \in L^2(0;1)$ et $\tau \in L^2(0;1)$, les relations :

$$\begin{gathered} \int_0^1 \sigma(x)\frac{dv}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 d(x)(\xi(x) - d(x))\,\mathrm{d}x + Bi\int_0^1 |\xi(x)|\,\mathrm{d}x - Bi\int_0^1 |d(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \sigma(x)(\xi(x) - d(x))\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 \tau(x)d(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \tau(x)\frac{du}{dx}(x)\,\mathrm{d}x \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ces relations constituent la formulation variationnelle du problème 2.1.1 et permettent de définir un «problème approché» via la méthode des éléments finis.

2.2 Problème approché par éléments finis

Soient $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$ les points d'une subdivision de $]0;1[$ qui définit un maillage de Ω. Le milieu des mailles $]a_i;a_{i+1}[$ sera noté $a_{i+1/2}$ et leur longueur $\Delta x_i = a_{i+1} - a_i$. On posera en outre $h = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$.

1. nous le ferons dans un cadre plus général dans les parties II et III

Définissons maintenant les espaces vectoriels de dimension finie dans lesquels nous allons chercher les approximations u_h de la vitesse et σ_h de la contrainte de cisaillement. Pour $k \geq 0$ nous notons classiquement P_k l'ensemble des polynômes de degré k et nous posons :

$$X_h^{k,-1}(0;1) = \left\{ v_h :]0;1[\longrightarrow I\!R \ ; \ v_h|_{]a_i;a_{i+1}[} \in P_k \ , \ \forall\, i = 0, ..., n-1 \right\}$$

$$X_h^{k,0}(0;1) = X_h^{k,-1}(0;1) \cap C^0[0;1]$$

Dans la suite, nous souhaitons étudier l'erreur $e_h = u - u_h$ pour l'approximation :

$$u_h \in X_h^{k,0}(0;1) \cap X(\Omega) \ , \quad \text{avec } k = 1 \text{ et } k = 2$$

Avec un tel choix pour u_h, nous avons $\dfrac{du_h}{dx} \in X_h^{k-1,-1}(0;1)$ et il semble donc naturel de chercher :

$$\sigma_h \in X_h^{k-1,-1}(0;1)$$

Nous pouvons en fait justifier rigoureusement ce choix d'espace pour la contrainte en écrivant le problème approché. Compte tenu de la formulation variationnelle (2.1), nous écrivons un problème approché comme suit :

$$\int_0^1 \sigma_h(x) \frac{dv_h}{dx}(x)\, dx = \int_0^1 v_h(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, v_h \in X_h^{k,0}(0;1)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 d_h(x)(\xi_h(x) - d_h(x))\, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \ Bi \int_0^1 |\xi_h(x)|\, \mathrm{d}x - Bi \int_0^1 |d_h(x)|\, \mathrm{d}x \\
&\qquad \geq \ \int_0^1 \sigma_h(x)(\xi_h(x) - d_h(x))\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \xi_h \in X_h^{k-1,-1}(0;1)
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \tau_h(x) d_h(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \tau_h(x) \frac{du_h}{dx}(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \tau_h \in X_h^{k-1,-1}(0;1)$$

il est alors possible de montrer qu'avec notre choix d'espaces, il existe une solution (σ_h, u_h, d_h) et que u_h et d_h sont uniques[2]. En fait, nous allons considérer dans ce chapitre un problème approché qui présente un intérêt pratique pour l'écriture d'algorithmes dans des contextes plus généraux (parties II et III) :

Problème **2.2.1**

$$\int_0^1 \sigma_h(x) \frac{dv_h}{dx}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 v_h(x)\, \mathrm{d}x \ \ , \forall v_h \in X_h^{k,0}(0;1)$$

2. nous montrerons ceci dans la partie II

et sur $]a_i ; a_{i+1}[$, *avec* $0 \leq i \leq n-1$ *:*

$$si \quad k=1, \quad d_h = F_\Omega(\sigma_h)$$

$$si \quad k=2, \quad d_h(a_j) = F_\Omega(\sigma_h(a_j)) \ , \ j=i, i-1$$

Nous allons maintenant construire explicitement u_h et σ_h pour ce dernier problème, puis nous calculerons les erreurs $|e_h|_{1,2;\Omega}$, $|e_h|_{1,\infty;\Omega}$ et $|e_h|_{0,\infty;\Omega}$ afin de comparer les approximations pour $k=1$ et $k=2$.

Remarque **2.2.1** *(Utilisation de la formule explicite)*
Dans les situations plus générales des parties II et III, nous considérerons le problème approché sans formule explicite pour ce qui est des questions d'estimation d'erreur, pour simplifier l'analyse. Cependant, pour le calcul numérique, nous utiliserons les formules explicites parce que la programmation des algorithmes s'en trouve simplifiée. Les tests numériques nous permettrons de constater que la méthode qui est programmée (avec les formules explicites) donne des résultats qui sont en bon accord avec les résultats théoriques d'estimation d'erreur.

2.3 Approximation P_1 de la vitesse

Fixons, pour toute cette partie, $k=1$.

Les fonctions σ_h et d_h étant constantes sur chaque maille, nous noterons $\sigma_{i+1/2}$ et $d_{i+1/2}$ leur valeur sur la maille $]a_i ; a_{i+1}[$ (pour $0 \leq i \leq n-1$). Nous noterons également ϕ_i la fonction de base de $X_h^{1,0}(0;1)$ associées à a_i (pour $0 \leq i \leq n$). La fonction de base de $X_h^{1,-1}(0;1)$ associée à $a_{i+1/2}$ sera notée $\psi_{i+1/2}$. Rappelons l'expression de ces fonctions de base. Pour $1 \leq i \leq n-1$, nous avons :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} & \text{sur} \quad]a_{i-1}; a_i[\\ \dfrac{a_{i+1}-x}{\Delta x_i} & \text{sur} \quad]a_i; a_{i+1}[\\ 0 & \text{sur} \quad]0; a_{i-1}[\cup]a_{i+1}; 1[\end{cases}$$

et pour les points extrêmes $a_0 = 0$ et $a_n = 1$:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{a_1 - x}{\Delta x_0} & \text{sur} \quad]0; a_1[\\ 0 & \text{sur} \quad]a_1; 1[\end{cases} \qquad \phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad]0; a_{n-1}[\\ \dfrac{1-x}{\Delta x_{n-1}} & \text{sur} \quad]a_{n-1}; 1[\end{cases}$$

et pour $0 \leq i \leq n-1$:

$$\psi_{i+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad]a_i; a_{i+1}[\\ 0 & \text{sur} \quad]0; a_i[\cup]a_{i+1}; 1[\end{cases}$$

Commençons par calculer la fonction σ_h. Nous avons :

$$\int_0^1 \sigma_h(x)\frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_i(x)\,\mathrm{d}x\ , \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Compte tenu de l'expression de ϕ_i :

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} \sigma_h(x)\frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sigma_h(x)\frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_{i-1}}^{a_{i+1}} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}{2} \overset{\text{déf}}{=} \Delta x_{i-1/2}$$

d'où :

$$\frac{\sigma_{i+1/2}-\sigma_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} = -1\ , \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{2.2}$$

D'autre part, pour $i = 0$:

$$\int_0^{\Delta x_0} \sigma_h(x)\phi_0'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x_0}{2}$$

autrement dit :

$$\sigma_{1/2} = -\frac{\Delta x_0}{2} \tag{2.3}$$

des relations (2.2) et (2.3), nous déduisons, par récurrence, que σ_h est caractérisé par :

$$\sigma_{i+1/2} = \sigma(a_{i+1/2})$$

Ensuite, nous remarquons que, pour $i \geq 0$:

$$d_{i+1/2} = F_\Omega(\sigma_{i+1/2}) = F_\Omega(\sigma(a_{i+1/2})) = d(a_{i+1/2})$$

En particulier, nous remarquons que, sur $]0;x_0[$, $d = d_h = 0$.

Pour simplifier, nous considérons désormais deux nombres $h > 0$ et $h_0 > 0$ ainsi qu'un intervalle $K_0 =]x_0; x_0+h_0[$ tels que :

- K_0 est l'unique maille contenant le point $x = Bi$,
- le pas du maillage est constant et égal à h en dehors de K_0.

Nous connaissons σ_h et d_h, calculons maintenant l'expression de u_h. On sait que u_h est l'unique primitive de d_h satisfaisant la condition $u_h(1) = 0$. Ainsi, pour $0 \leq i \leq n-1$ et $x \in]a_i; a_{i+1}[\cap]x_0+h_0; 1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
u_h(x) &= \int_1^{a_{i+1}} d_h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{a_{i+1}}^{x} d_h(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{a_{i+1}} d(y)\,\mathrm{d}y + (x-a_{i+1})d(a_{i+1/2}) \\
&= \frac{(Bi-1)^2}{2} - \frac{(Bi-a_{i+1})^2}{2} + (x-a_{i+1})d(a_{i+1/2})
\end{aligned}$$

L'égalité $\displaystyle\int_1^{a_{i+1}} d_h(y)\,\mathrm{d}y = \int_1^{a_{i+1}} d(y)\,\mathrm{d}y$ exprime l'égalité des aires représentées par chacune des deux intégrales et est visible sur la figure Fig. 2.2.

De même, sur K_0, nous écrivons :

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_1^{x_0+h_0} d_h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_0+h_0}^{x} d_h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^{x_0+h_0} d(y)\,\mathrm{d}y + (x - x_0 - h_0) d(x_0 + h_0/2) \\ &= \frac{(Bi-1)^2}{2} - \frac{(Bi - x_0 - h_0)^2}{2} + (x - x_0 - h_0) d(x_0 + h_0/2) \end{aligned}$$

et enfin, sur $]0; x_0[$, u_h est constant et vaut, par continuité en x_0 :

$$u_h(x_0) = \frac{(1-Bi)^2}{2} - \frac{(x_0 + h_0 - Bi)^2}{2} - h_0\, d(x_0 + h_0/2)$$

Résumons les expressions obtenues pour σ_h, d_h et u_h :

Proposition 2.3.1 *Les quantités σ_h, d_h et u_h vérifiant le problème 2.2.1 s'éxplicitent comme suit :*

$$\sigma_h(x) = \begin{cases} -(i-1/2)h & si \quad x \in]0; x_0[\cup]x_0 + h_0; 1[\\ -x_0 - h_0/2 & si \quad x \in]x_0; x_0 + h_0[\end{cases}$$

$$d_h(x) = \begin{cases} Bi - (i-1/2)h & si \quad x \in]x_0 + h_0; 1[\\ Bi - x_0 - h_0/2 & si \quad x \in]x_0; x_0 + h_0[\ \ et \ \ Bi < x_0 + h_0/2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$u_h(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-Bi)^2}{2} - \dfrac{(a_{i+1} - Bi)^2}{2} + (x - a_{i+1})(Bi - a_i - h/2) & sur \quad]a_i; a_{i+1}[\cap]x_0 + h_0; 1[\\ \dfrac{(1-Bi)^2}{2} - \dfrac{(x_0 + h_0 - Bi)^2}{2} + (x - x_0 - h_0) d(x_0 + h_0/2) & sur \quad]x_0; x_0 + h_0[\\ \dfrac{(1-Bi)^2}{2} - \dfrac{(x_0 + h_0 - Bi)^2}{2} - h_0\, d(x_0 + h_0/2) & sur \quad]0; x_0[\end{cases}$$

On peut maintenant calculer facilement différentes normes d'erreur pour $e_h = u - u_h$.

Proposition 2.3.2 *L'erreur e_h entre la solution u du problème 2.1.1 et la solution approchée u_h vérifie :*

$$|e_h|_{1,\infty;\Omega} = \max\left\{\frac{h}{2}, \beta h_0\right\}$$

$$|e_h|_{1,2;\Omega} = \left(\frac{1-Bi}{12}h^2 + \frac{\alpha-2}{12}h_0h^2 + \gamma h_0^3\right)^{1/2}$$

$$|e_h|_{0,\infty;\Omega} = \max\left\{\frac{h^2}{8}\ ,\ \delta\, h_0^2\right\}$$

et les constantes α, β, γ et δ ne dépendent pas de h et sont bornées indépendamment de h_0, elles sont définies par :

$$\alpha = \frac{Bi - x_0}{h_0} \in [0;1]$$

$$\beta = \begin{cases} 1-\alpha & si \qquad Bi > x_0 + h_0/2 \\ 1/2 & sinon \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)^3}{3} & si \qquad Bi > x_0 + h_0/2 \\ \frac{1}{24} + \frac{1}{3}(\alpha - 1/2)^3 + \alpha(\alpha-1/2)^2 & sinon \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)^2}{2} & si \qquad Bi > x_0 + h_0/2 \\ \max\left\{\frac{1}{8}\ ,\ \dfrac{(1-\alpha)^2}{2} + \alpha - \frac{1}{2}\right\} & sinon \end{cases}$$

PREUVE :

Commençons par calculer l'erreur $d - d_h$ en norme $L^\infty(0;1)$:

$$|d - d_h|_{0,\infty;]x_0+h_0;1[} = \frac{d(1-h) - d(1)}{2} = \frac{h}{2}$$

Si $Bi > x_0 + h_0/2$, on a :

$$|d - d_h|_{0,\infty;]x_0;x_0+h_0[} = |d(x_0+h_0)| = h_0 + x_0 - Bi = (1-\alpha)h_0$$

Si au contraire $Bi \le x_0 + h_0/2$, on a :

$$|d - d_h|_{0,\infty;]x_0;x_0+h_0[} = |d(x_0+h_0) - d(x_0+h_0/2)| = \frac{h_0}{2}$$

donc on obtient l'erreur dans la norme $L^\infty(0;1)$:

$$|e_h|_{1,\infty;\Omega} = |d - d_h|_{0,\infty;\Omega} = \max\left\{\frac{h}{2}, \beta h_0\right\}$$

avec une constante β ne dépendant que de la construction du maillage :

$$\beta = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si} \quad Bi > x_0 + h_0/2 \\ 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant l'erreur dans la norme $H^1(0;1)$.

Si $Bi > x_0 + h_0/2$:

$$\int_{x_0}^{x_0+h_0} |d-d_h|^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{(1-\alpha)^3}{3} h_0^3$$

sinon :

$$\int_{x_0}^{x_0+h_0} |d-d_h|^2(y)\,\mathrm{d}y = h_0^3 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{3}(\alpha - 1/2)^3 + \alpha(\alpha-1/2)^2 \right)$$

de plus, le calcul sur l'intervalle $]x_0+h_0;1[$ donne :

$$\int_{x_0+h_0}^{1} |d-d_h|^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1-(x_0+h_0)}{h} \times \frac{h^3}{12} = \frac{1-x_0-h_0}{12}h^2 = \frac{1-Bi}{12}h^2 + \frac{\alpha-2}{12}h_0 h^2$$

Finalement, nous obtenons l'erreur :

$$|u-u_h|_{1,2;\Omega} = \left(\frac{1-Bi}{12}h^2 + \frac{\alpha-2}{12}h_0h^2 + \gamma h_0^3 \right)^{1/2}$$

avec les constantes :

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)^3}{3} & \text{si} \quad Bi > x_0 + h_0/2 \\ \frac{1}{24} + \frac{1}{3}(\alpha-1/2)^3 + \alpha(\alpha-1/2)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finissons avec le calcul de $|e_h|_{0,\infty;\Omega}$. Nous avons, si $Bi > x_0 + h_0/2$:

$$e_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a_{i+1})(a_i - x) & \text{sur} \quad]a_i;a_{i+1}[\cap]x_0+h_0;1[\\ \frac{1}{2}(x-x_0-h_0)(2Bi - x_0 - h_0 - x) & \text{sur} \quad]Bi;x_0+h_0[\\ \dfrac{(Bi-x_0-h_0)^2}{2} & \text{sur} \quad]0;Bi[\end{cases}$$

et si au contraire $Bi \leq x_0 + h_0/2$:

$$e_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a_{i+1})(a_i - x) & \text{sur} \quad]a_i;a_{i+1}[\cap]x_0+h_0;1[\\ \frac{1}{2}(x-x_0-h_0)(x_0 - x) & \text{sur} \quad]Bi;x_0+h_0[\\ \dfrac{(\alpha-1)^2}{2}h_0^2 - (x-x_0-h_0)(\alpha-1/2)h_0 & \text{sur} \quad]x_0;Bi[\\ \dfrac{(\alpha-1)^2}{2}h_0^2 + (\alpha-1/2)h_0^2 & \text{sur} \quad]0;x_0[\end{cases}$$

donc :

$$|e_h|_{0;\infty;]x_0+h_0;1[} = \left| e_h\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)\right| = \frac{h^2}{8}$$

$$|e_h|_{0;\infty;]Bi;x_0+h_0[} = \begin{cases} \left|e_h\left(\frac{h_0+2x_0}{2}\right)\right| = \frac{h_0^2}{8} & \text{si} \qquad Bi \leq x_0 + h_0/2 \\ |e_h(Bi)| = \frac{(\alpha-1)^2}{2}h_0^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$|e_h|_{0;\infty;]0;Bi[} = \begin{cases} |e_h(x_0)| = \left(\frac{(\alpha-1)^2}{2} + \alpha - 1/2\right) h_0^2 & \text{si} \qquad Bi \leq x_0 + h_0/2 \\ \frac{(\alpha-1)^2}{2}h_0^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

CQFD. □

2.4 Approximation P_2 de la vitesse

Fixons, pour toute cette partie, $k = 2$.

La fonction σ_h étant discontinue, nous noterons σ_i^- et σ_i^+ les valeurs de σ_h respectivement à gauche et à droite du point a_i. Nous adopterons de même les notations d_i^- et d_i^+.
Nous noterons également ψ_i^- et ψ_i^- les fonctions de base de $X_h^{1,-1}(0;1)$ associées à a_i. Les fonctions de base de $X_h^{2,0}(0;1)$ associées à a_i seront notées ϕ_i et nous écrirons $\phi_{i+1/2}$ celles associées à $a_{i+1/2}$.
Rappelons l'expression de ces fonctions de base :

$$\forall i,\ 0 < i < n\ ,\quad \phi_i = \begin{cases} \frac{x-a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}\frac{x-a_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1}/2} & \text{sur} \quad]a_{i-1};a_i[\\ \frac{a_{i+1}-x}{\Delta x_i}\frac{a_{i+1/2}-x}{\Delta x_i/2} & \text{sur} \quad]a_i;a_{i+1}[\\ 0 & \text{sur} \quad]0;a_{i-1}[\, \cup\,]a_{i+1};1[\end{cases}$$

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{\Delta x_0 - x}{\Delta x_0}\frac{\Delta x_0/2 - x}{\Delta x_0/2} & \text{sur} \quad]0;\Delta x_0[\\ 0 & \text{sur} \quad]\Delta x_0;1[\end{cases}$$

$$\forall i,\ 0 \leq i < n\ ,\quad \phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{x-a_i}{\Delta x_i/2}\frac{a_{i+1}-x}{\Delta x_i/2} & \text{sur} \quad]a_i;a_{i+1}[\\ 0 & \text{sur} \quad]0;a_i[\, \cup\,]a_{i+1};1[\end{cases}$$

$$\psi_i^-(x) = \frac{x-a_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}\mathbf{1}_{K_{i-1}} \quad ; \quad \psi_i^+(x) = \frac{a_{i+1}-x}{\Delta x_i}\mathbf{1}_{K_i}$$

où $\mathbf{1}_{K_j}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle K_j, valant 1 sur K_j et 0 ailleurs.

Remarquons en premier lieu que $\sigma_h = \sigma$. Nous avons en effet :

$$\int_0^1 \sigma_h(x) \frac{d\phi_{i+1/2}}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_{i+1/2}(x)\,\mathrm{d}x$$

donc nous déduisons en intégrant par partie sur le support de $\phi_{i+1/2}$ que :

$$-\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d\sigma_h}{dx}(x)\phi_{i+1/2}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \phi_{i+1/2}(x)\,\mathrm{d}x$$

or, sur $]a_i; a_{i+1}[$, on a :

$$\sigma_h(x) = \sigma_i^+ \psi_i^+(x) + \sigma_{i+1}^- \psi_{i+1}^-(x)$$

et c'est pourquoi, sur cet intervalle, $\frac{d\sigma_h}{dx}$ est constant et vaut :

$$\frac{\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^+}{\Delta x_i}$$

donc nous trouvons finalement la relation de type «différence-finie» :

$$\frac{\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^+}{\Delta x_i} = -1 \quad \text{sur} \quad]a_i; a_{i+1}[\tag{2.4}$$

Par ailleurs, nous pouvons aussi écrire :

$$\int_0^1 \sigma_h(x) \frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_i(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se traduit par :

$$\int_{a_{i-1/2}}^{a_i} \sigma_h(x) \frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_i}^{a_{i+1/2}} \sigma_h(x) \frac{d\phi_i}{dx}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_{i-1/2}}^{a_{i+1/2}} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x$$

en effectuant des intégrations par partie au premier membre, nous trouvons :

$$\sigma_i^- - \sigma_i^+ - \frac{\sigma_i^- - \sigma_{i-1}^+}{\Delta x_{i-1}} \int_{a_{i-1/2}}^{a_i} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^+}{\Delta x_i} \int_{a_i}^{a_{i+1/2}} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_{i-1/2}}^{a_{i+1/2}} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

Le même calcul avec ϕ_0 fournit :

$$-\sigma_0^+ - \frac{\sigma_1^- - \sigma_0^+}{\Delta x_0} \int_0^{\Delta x_0} \phi_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\Delta x_0} \phi_0(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

En utilisant (2.4) dans (2.5) et dans (2.6) (avec $i = 0$), on trouve que :

$$\sigma_i^- = \sigma_i^+ \text{ et } \sigma_0 = 0$$

autrement dit, σ_h est une fonction continue vérifiant :

$$\sigma_h(0) = 0 \text{ et } \frac{d\sigma_h}{dx}(x) = -1 \text{ dans }]0;1[$$

nous voyons alors que σ_h est déterminé de manière unique et que $\sigma_h(x) = \sigma(x) = -x$.

Compte tenu de cette première remarque, nous avons :

$$d_i^- = d_i^+ = d(a_i) = F_\Omega(\sigma(a_i))$$

donc d_h est en fait continue et plus précisément encore, si nous appelons $K_0 =]x_0; x_0 + h_0[$ l'élément qui contient le point $x = Bi$, nous constatons en observant l'expression de d qu'en fait : $d - d_h = 0$ sur $]0;1[\backslash K_0$.

Puisque $d_h(x_0) = 0$ et que $d_h(x_0 + h) = d(x_0 + h) = Bi - x_0 - h_0$, nous pouvons donner l'expression de d_h sur K_0 de la manière suivante :

$$d_h = \begin{cases} d = Bi - x & \text{si} \quad x \in]0;1[\backslash K_0 \\ (Bi - x_0 - h_0)\dfrac{x - x_0}{h_0} & \text{sinon} \end{cases}$$

nous en déduisons alors l'expression de u_h, l'unique primitive de d_h telle que $u_h(1) = 0$. Avant de calculer l'erreur d'approximation, résumons l'expression des champs approchés σ_h, d_h et u_h :

Proposition **2.4.1** *Les quantités approchées $\sigma_h \in X_h^{1,-1}(0;1)$, $d_h \in X_h^{1,-1}(0;1)$ et $u_h \in X_h^{2,0}(0;1)$ sont données par les expressions :*

$$\sigma_h(x) = \sigma(x) = -x$$

$$d_h(x) = \begin{cases} Bi - x & \textit{sur} \quad]x_0 + h_0; 1[\\ (\alpha - 1)(x - x_0) & \textit{sur} \quad]x_0; x_0 + h_0[\\ 0 & \textit{sur} \quad]0; x_0[\end{cases}$$

$$u_h(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 - Bi)^2}{2} - \dfrac{(x - Bi)^2}{2} & \textit{sur} \quad]x_0 + h_0; 1[\\ \dfrac{(1 - Bi)^2}{2} + (\alpha - 1)\dfrac{(x - x_0)^2}{2} + \dfrac{\alpha(1 - \alpha)}{2}h_0^2 & \textit{sur} \quad]x_0; x_0 + h_0[\\ \dfrac{(1 - Bi)^2}{2} + \dfrac{\alpha(1 - \alpha)}{2}h_0^2 & \textit{sur} \quad]0; x_0[\end{cases}$$

où α est défini comme dans la proposition 2.3.2.

De ceci nous pouvons aisément déduire l'erreur $d - d_h$ en chaque point $x \in]0; 1[$:

$$d - d_h = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad]0; x_0[\cup]x_0 + h_0; 1[\\ Bi - x - (\alpha - 1)(x - x_0) & \text{sur} \quad]Bi; x_0 + h_0[\\ -(\alpha - 1)(x - x_0) & \text{sur} \quad]x_0; Bi[\end{cases}$$

et ainsi, nous obtenons l'erreur dans la norme $L^\infty(0; 1)$:

$$|d - d_h|_{0;\infty;\Omega} = |d - d_h|_{0;\infty;K_0} = |d_h(Bi)| = \alpha(\alpha - 1)h_0$$

où α est défini comme dans le cas où $k = 1$ par $\alpha = \dfrac{Bi - x_0}{h_0} \in [0; 1]$. Nous pouvons également calculer :

$$|d - d_h|_{0;2;\Omega} = |d - d_h|_{0;2;K_0} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sqrt{3}} h_0^{3/2}$$

Enfin, nous pouvons exprimer l'erreur e_h en chaque point $x \in]0; 1[$:

$$e_h(x) = u(x) - u_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad]x_0 + h_0; 1[\\ -\dfrac{(x - Bi)^2}{2} - (\alpha - 1)\dfrac{(x - x_0)^2}{2} - \dfrac{\alpha(1 - \alpha)}{2} h_0^2 & \text{sur} \quad]Bi; x_0 + h_0[\\ -(\alpha - 1)\dfrac{(x - x_0)^2}{2} - \dfrac{\alpha(1 - \alpha)}{2} h_0^2 & \text{sur} \quad]x_0; Bi[\\ -\dfrac{\alpha(1 - \alpha)}{2} h_0^2 & \text{sur} \quad]0; x_0[\end{cases}$$

nous pouvons en déduire l'erreur sur u dans la norme $L^\infty(0; 1)$.

En conclusion, en utilisant ce qui précède et le fait que par définition $|d - d_h|_{0,2;\Omega} = |e_h|_{1,2;\Omega}$ et $|d - d_h|_{0,\infty;\Omega} = |e_h|_{1,\infty;\Omega}$, nous obtenons :

PROPOSITION **2.4.2** *L'erreur e_h entre la solution u du problème 2.1.1 et la solution approchée u_h vérifie :*

$$|e_h|_{1,2;\Omega} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\sqrt{3}} h_0^{3/2}$$

$$|e_h|_{1,\infty;\Omega} = \alpha(\alpha - 1)h_0$$

$$|e_h|_{0,\infty;\Omega} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} h_0^2$$

2.5 Conclusion

En comparant les propositions 2.3.2 et 2.4.2, nous pouvons constater les faits suivants :

1. En maillage uniforme ($h_0 = h$), nous avons pour $k = 1$ ou $k = 2$: $|e_h|_{0,\infty;\Omega} = \mathcal{O}(h^2)$ et $|e_h|_{1,\infty;\Omega} = \mathcal{O}(h)$. Seule la norme $H^1(\Omega)$ est plus précise en P_2 (en $\mathcal{O}(h^{3/2})$) qu'en P_1 (en $\mathcal{O}(h)$).

2. L'adaptation de maillage ($h_0 \neq h$) ne permet pas d'améliorer l'erreur en P_1, ce qui rend, en ce sens, le maillage uniforme optimal pour l'approximation P_1 de la vitesse.
3. Avec un maillage adapté ($h_0 \neq h$) et une approximation P_2 de la vitesse, on peut atteindre une précision arbitraire avec seulement trois éléments (ce qui fait six degrés de liberté, compte tenu de la condition $u_h(1) = 0$).

Ainsi, nous pouvons conclure qu'avec un maillage convenable (h_0 assez petit), pour un même nombre de degrés de liberté, l'approximation P_2 de la vitesse donne nettement plus de précision que l'approximation P_1.

Pour des problèmes plus complexes, nous pouvons donc espérer, grâce à l'adaptation du maillage, atteindre la précision donnée par l'opérateur d'interpolation, et cela sans engager un sur-coût en degrés de liberté par rapport au cas «P_1-uniforme». Toutefois, il nous faudra trouver un moyen pour raffiner automatiquement le maillage au voisinage des frontières des zones rigides. Notre cas mono-dimensionnel peut donner une indication à ce sujet. En effet, il semble que la quantité suivante permette ce raffinement :

$$\varphi(x) = \sqrt{\sigma(x)u'(x)} = \begin{cases} \sqrt{x(x-Bi)} & \text{si} \qquad x \geq Bi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Précisons cela. Si nous considérons φ_h l'interpolé P_1 de φ, nous avons :

$$|\varphi - \varphi_h|_{1,\infty;]a_i;a_{i+1}[} \leq c|\varphi''|_{0,\infty;]a_i;a_{i+1}[}\Delta x_i$$

pour avoir une erreur en $\mathcal{O}(c_0)$, il nous suffit donc de considérer :

$$\Delta x_i = \frac{c_0}{|\varphi''|_{0,\infty;]a_i;a_{i+1}[}}$$

alors, en observant que :

$$\varphi''(x) = \begin{cases} \dfrac{-Bi^2/4}{\{x(x-Bi)\}^{3/2}} & \text{si} \qquad x \geq Bi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous voyons que Δx_i tend vers 0 au voisinage des frontières des zones rigides.

Remarque **2.5.1** *Dans la mesure où l'avantage du choix $k = 2$ sur le choix $k = 1$ ressort nettement, nous n'avons pas cherché à généraliser les calculs de e_h pour d'autres valeurs de k. Nous pouvons quand même remarquer, que, pour $k \geq 2$, $\sigma \in X_h^{k-1,0}(0;1) \subset X_h^{k-1,-1}(0;1)$, par conséquent, le choix $\sigma_h = \sigma$ convient. On trouve alors à nouveau que $d = d_h$ en dehors de $K_0 =]x_0; x_0 + h_0[$ (l'unique maille contenant la valeur Bi). Ainsi, on a :*

$$|e_h|_{1,q;\Omega} = |e_h|_{1,q;K_0} \ , \ \forall q \in [1; +\infty]$$

De même, $u = u_h$ sur $]x_0 + h_0; 1[$ (car $u_h' = d_h =$ sur cet intervalle et $u_h(1) = 0$) et puisque u est continue en x_0 et constante sur $]0; x_0[$, nous avons $u_h = u_h(x_0)$ sur $]0; x_0[$ et donc :

$$|e_h|_{0,\infty;\Omega} = |e_h|_{0,\infty;K_0}$$

Remarque **2.5.2** *Il est connu (voir Glowinski et al. [36]), que u vérifie l'inéquation variationnelle de seconde espèce suivante :*

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\left(\frac{dv}{dx}(x) - \frac{du}{dx}(x)\right) \mathrm{d}x \\ + \quad & Bi\int_0^1 \left|\frac{dv}{dx}(x)\right| \mathrm{d}x - Bi\int_0^1 \left|\frac{du}{dx}(x)\right| \mathrm{d}x \\ \geq \quad & \int_0^1 f(x)\,(v(x) - u(x))\,\mathrm{d}x \ , \ \forall\, v \in X(\Omega) \end{aligned}$$

où l'on a posé $f(x) = 1$ sur $]0; 1[$. Soit $u_h \in X_h^{1,0}(0;1) \cap X(\Omega)$ l'approximation par éléments finis P_1 de ce problème, définie par :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{du_h}{dx}(x)\left(\frac{dv_h}{dx}(x) - \frac{du_h}{dx}(x)\right) \mathrm{d}x \\ + \quad & Bi\int_0^1 \left|\frac{dv_h}{dx}(x)\right| \mathrm{d}x - Bi\int_0^1 \left|\frac{du_h}{dx}(x)\right| \mathrm{d}x \\ \geq \quad & \int_0^1 f(x)\,(v_h(x) - u_h(x))\,\mathrm{d}x \ , \ \forall\, v_h \in X_h^{1,0}(0;1) \cap X(\Omega) \end{aligned}$$

Lorsque f est un élément quelconque de $L^2(0;1)$, il est démontré dans [36] que :

$$\|u - u_h\|_{1,2;]0;1[} = \mathcal{O}(h)$$

nous retrouvons donc le même ordre que celui établi en section 2.3. Toutefois, c'est une approximation différente de celle considérée section 2.3 puisqu'aucune formule explicite n'y intervient. Dans la partie II, chapitre 3, nous nous intéresserons à l'estimation de l'erreur pour ce type d'approximation, lorsque le domaine Ω est bidimensionnel.

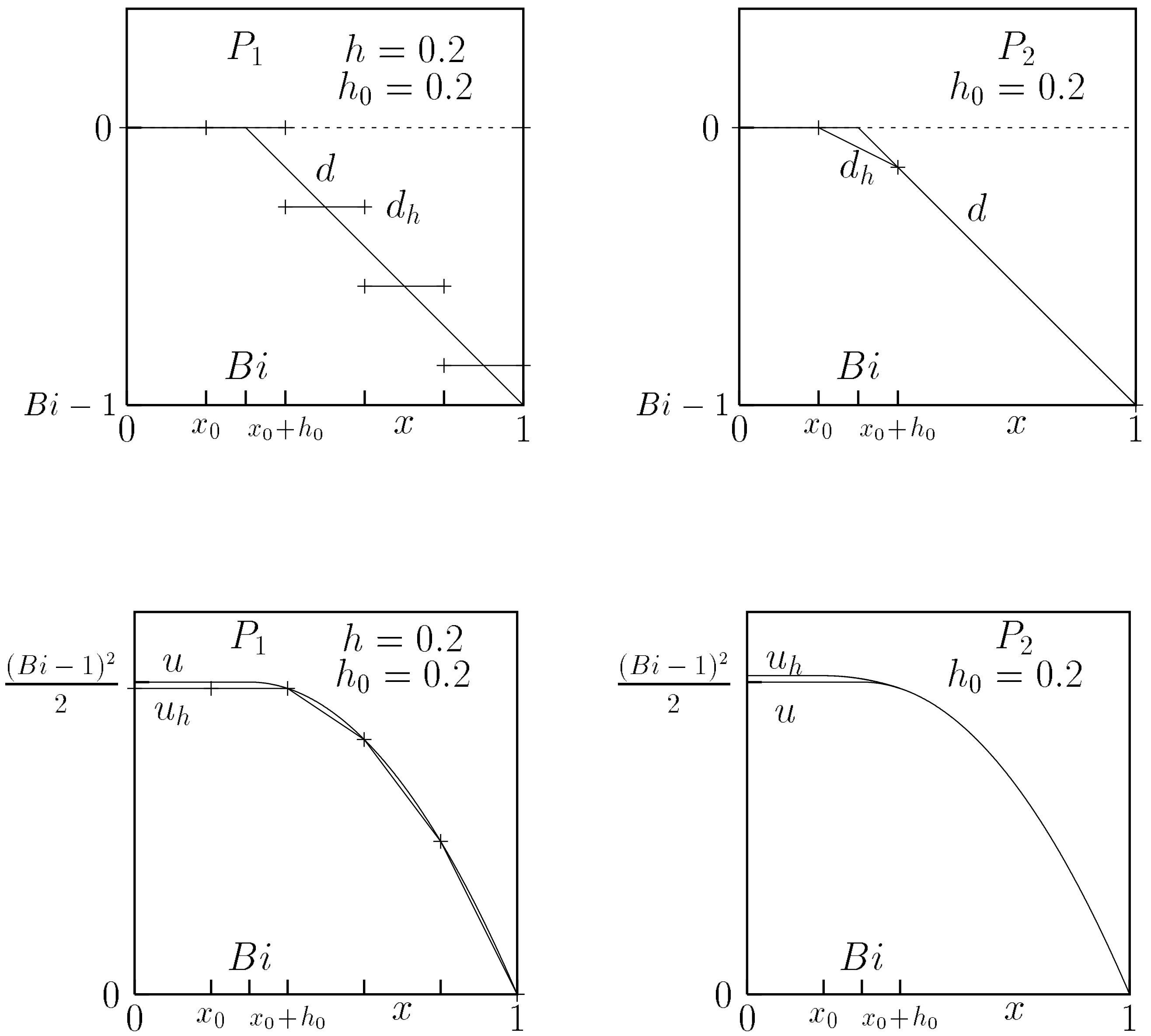


FIG. 2.2 – *Vitesse u et taux de déformation d pour le modèle mono-dimensionnel de l'écoulement de Poiseuille plan, comparés aux approximations u_h et d_h par éléments finis P_1 et P_2.*

Deuxième partie

Écoulements en conduite droite

Dans cette partie, nous explorons quelques aspects de l'analyse et de la simulation numériques pour un cas particulier du modèle général présenté dans la partie I.

Nous commencerons par préciser le modèle particulier que nous considérons ici, puis nous en donnerons des formulations bien adaptées à l'écriture d'une méthode numérique et à une analyse de convergence. La description détaillée d'une méthode numérique est ensuite réalisée et complétée par des résultats de convergence pour l'approximation par éléments finis. Enfin la simulation numérique d'un cas particulier achève cette partie en donnant des résultats de mécanique concrets.

Chapitre 1

Généralités sur le problème continu

Le but de ce chapitre est de donner plusieurs formulations du modèle général présenté dans la partie I, dans un cas particulier où la loi de glissement s'applique sur toute la paroi Γ du domaine Ω, soit $\Gamma = \Gamma_S$, et où la pression p est donnée.

Tout d'abord, nous écrivons ce modèle particulier. Ensuite, nous en donnons une formulation variationnelle à plusieurs champs inconnus qui est bien adaptée à l'écriture d'un algorithme. Enfin nous donnerons quelques formulations plus classiques dont le seul champ inconnu est la vitesse, car elles constituerons des outils intéressants pour l'analyse de l'erreur d'approximation par éléments finis au chapitre 3.

1.1 Écriture du modèle pour les écoulements de Poiseuille

Nous considérons l'écoulement laminaire permanent dans une conduite rectiligne de section constante $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et d'axe $\mathbf{e_3}$, sous l'action d'une variation constante de pression notée $f > 0$. La loi de glissement est imposée sur toute la paroi du cylindre. Par la suite, nous nommerons cette situation *Problème de Poiseuille*[1]. Lorsque Ω sera un disque, nous parlerons pour simplifier du problème de «Poiseuille circulaire».

La figure Fig. 1.1 résume le problème que nous décrivons.

Le champ des vitesses est colinéaire à l'axe $\mathbf{e_3}$ du cylindre et n'a donc qu'une composante non-nulle u_3, que nous nommerons encore u par un abus de notation volontaire. La relation

1. En fait, on devrait plutôt parler de problème de Poiseuille généralisé, car les écoulement dit «de Poiseuille» considèrent la condition d'adhérence à la paroi.

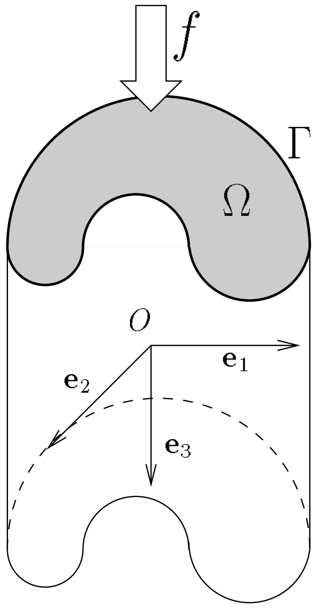


FIG. 1.1 – *Portion d'une conduite cylindrique de section* Ω *dans laquelle s'écoule un fluide de Bingham sous l'action d'une variation constante* f *de pression.*

d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ est donc automatiquement satisfaite. Les seules composantes non-nulles du déviateur σ du tenseur des contraintes sont les cisaillements σ_{32} et σ_{31}. Le tenseur σ peut donc être représenté par un vecteur de $I\!R^2$, encore noté $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{31}, \sigma_{32})$. La loi de comportement et la conservation de la quantité de mouvement s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\nabla} u = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \qquad \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_0 \\ \dfrac{1}{\eta} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \left(\|\boldsymbol{\sigma}\| - \sigma_0\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + f = 0 \tag{1.2}$$

L'écriture de la loi de glissement se simplifie également. En effet le vecteur $(\sigma.\mathbf{n})_{\mathbf{t}}$ devient le scalaire $\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}$ et le vecteur $\mathbf{u_t}$ devient le scalaire u. Nous pouvons alors écrire sur Γ :

$$u = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad |\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}| \leq s_g \\ \dfrac{-1}{c_f} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}}{|\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}|} \left(|\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}| - s_g\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.3}$$

On adimensionne le problème (1.1) - (1.3) en considérant a une longueur caractéristique de la section Ω et $U = a^2 f/\eta$. Les trois nombres sans dimension deviennent :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{af}, \quad C_F = \frac{c_f a}{\eta}, \quad S = \frac{s_g}{af}$$

Dans toute la suite, nous écrirons pour simplifier $\boldsymbol{\sigma}$ et u les champs sans dimension. Nous

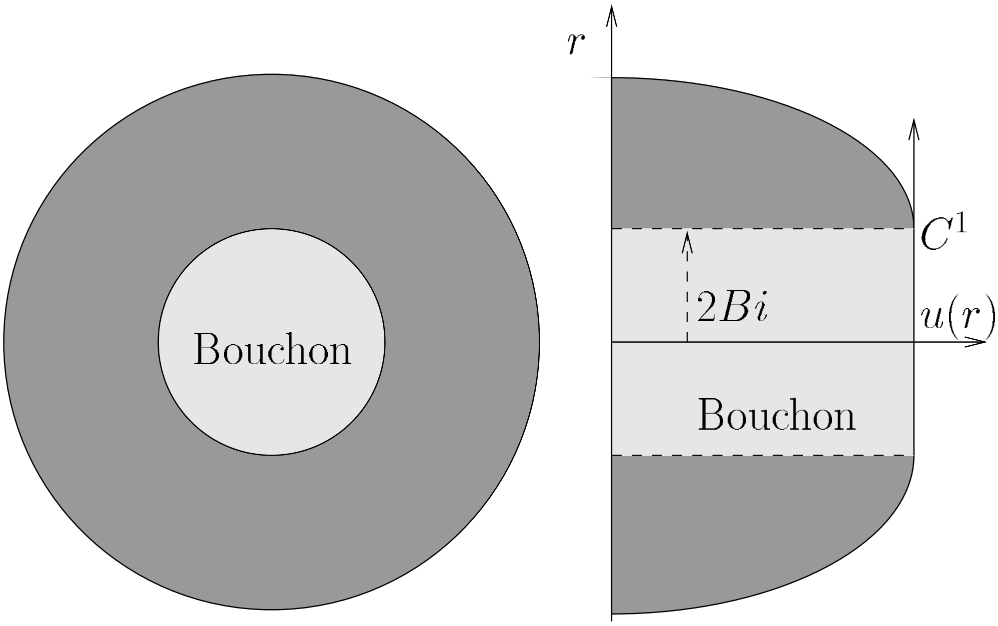


FIG. 1.2 – *Représentation schématique de la solution d'un problème de Poiseuille, lorsque Ω est un disque, pour $S \geq 1/2$. La taille du bouchon augmente proportionnellement à Bi et le blocage a lieu pour $Bi \geq 1/2$ (Dans le cas où $S < 1/2$, le blocage est remplacé par une translation en bloc du matériau).*

cherchons alors à résoudre le système suivant :

$$\text{sur } \Gamma \ , \ \ u = F_\Gamma(-\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{-1}{C_F}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}}{|\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}|}(|\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}| - S) & \text{si} \qquad |\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}| > S \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla} u = F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|}(\|\boldsymbol{\sigma}\| - Bi) & \text{si} \qquad \|\boldsymbol{\sigma}\| > Bi \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -1 \tag{1.6}$$

Signalons que les notations $F_\Omega(.)$ et $F_\Gamma(.)$ seront d'un usage constant dans toute la suite.

Dans le cas où Ω est un disque, la solution est connue explicitement et nous l'avons représentée schématiquement sur la figure 1.2. Son expression est donnée par exemple dans Glowinski [33] dans le cas où l'adhérence est imposée à la paroi. Dans le cas où la condition de glissement a lieu sur toute la paroi, on peut trouver un calcul détaillé dans Fortin et al. [25]. Il est commode d'écrire la solution en coordonnées cylindriques.

La vitesse u est donnée, pour $Bi < \frac{1}{2}$, par :

$$u(r) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1-r^2}{4} + Bi(r-1) & \text{si} & 2Bi < r < 1 \\ \left(Bi - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{sinon} & \end{array} \right\} + \frac{1}{C_F} \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2} - S & \text{si} & S < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Nous voyons que le blocage complet a lieu lorsque : $S \geq \frac{1}{2}$ et $Bi \geq \frac{1}{2}$.

Lorsque $S \leq \frac{1}{2}$, l'écoulement présente un bouchon central circulaire dont le rayon grandit proportionnellement à Bi, puis, quand Bi dépasse la valeur $\frac{1}{2}$, l'écoulement tout entier consiste en un bouchon qui se translate en glissant à la paroi à la vitesse constante $\frac{1}{C_F}\left(\frac{1}{2} - S\right)$.

Nous renvoyons à l'annexe A pour les expressions dimensionnées.

REMARQUE **1.1.1** *(Non-unicité des contraintes)*
Les composantes non-nulles du tenseur des contraintes sont $\sigma_{\theta z}$ et $\sigma_{r z}$. Cependant, il est classique d'imposer une symétrie radiale en écrivant $\sigma_{\theta z} = 0$. La conservation de la quantité de mouvement donne alors :

$$\sigma_{r z} = -\frac{r}{2}$$

de sorte que les contraintes sont déterminées de manière unique. Par contre, il est remarqué dans le livre de Glowinski, Lions et Trémolières [35], volume 2, pages 103-104, que si nous n'imposons pas cette condition de symétrie, nous pouvons obtenir une infinité de solutions possibles pour $\sigma_{\theta z}$. L'unicité des contraintes est donc conditionnée, dans cet exemple, par une hypothèse de symétrie radiale.

1.2 Formulation directe à plusieurs champs

Nous allons donner une formulation bien adaptée à l'écriture d'un algorithme. Cette formulation comporte cinq champs inconnus :

- le champ scalaire de la vitesse u,
- le champ de vecteur des contraintes de cisaillement $\boldsymbol{\sigma}$,
- le champ scalaire de la composante normale à la paroi des contraintes $s = -\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}$,
- le champ de vecteur du gradient de vitesse $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} u$,
- le champ scalaire de la vitesse à la paroi, soit la trace de u sur Γ : $z = \gamma u$.

Cette formulation est assortie d'un résultat d'existence et unicité, l'unicité étant partielle. Un tel résultat est analogue au cas où la condition d'adhérence est imposée sur toute la paroi. Ce dernier cas est exposé dans [57].

1.2.1 Formulation variationnelle

Nous supposons ici que Ω est un ouvert de $I\!R^2$ suffisamment régulier pour donner un sens à ce qui suit. Nous munissons $H^1(\Omega)$ du produit scalaire $(\boldsymbol{\nabla} v, \boldsymbol{\nabla} w)_{0,2;\Omega} + C_F\,(\gamma v, \gamma w)_{0,2;\Gamma}$, ce qui en fait un espace de Hilbert, le coefficient C_F étant strictement positif. Le produit scalaire L^2 classique sera noté simplement $(.,.)$ en l'absence d'ambiguïté. Nous conviendrons de noter dans la suite les fonctions tests surmontées d'une barre.

Commençons par le lemme suivant, très utile pour la suite :

LEMME **1.2.1**

1. *Étant donnés deux vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\beta}$ de $I\!R^2$, les relations suivantes sont équivalentes :*

$$(i)\ \boldsymbol{\beta} = \begin{cases} \boldsymbol{\xi} + Bi\dfrac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} & si \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ ind\acute{e}termin\acute{e}\ avec\ \|\boldsymbol{\beta}\| \leq Bi & Sinon \end{cases}$$

$$(ii)\ \boldsymbol{\xi} = F_\Omega(\boldsymbol{\beta}) \overset{d\acute{e}f}{=} \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}(\|\boldsymbol{\beta}\| - Bi) & si \quad \|\boldsymbol{\beta}\| \geq Bi \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$(iii)\ \boldsymbol{\xi}.(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) + Bi(\|\overline{\boldsymbol{\xi}}\| - \|\boldsymbol{\xi}\|) \geq \boldsymbol{\beta}.(\overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})\ ,\ \forall \overline{\boldsymbol{\xi}} \in I\!R^2$$

Si $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont deux éléments de $L^2(\Omega)^2$, les relations $(i) - (iii)$ (prises au sens presque partout sur Ω) sont équivalentes à :

$$(iv)\ (\boldsymbol{\xi}, \overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{\boldsymbol{\xi}}|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\xi}|_{0,1;\Omega}) \geq (\boldsymbol{\beta}, \overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})_{0,2;\Omega}\ ,\ \forall \overline{\boldsymbol{\xi}} \in L^2(\Omega)^2$$

2. *De même, pour deux scalaires ζ et b de $I\!R$, les relations suivantes sont équivalentes :*

$$(i)\ \zeta = F_\Gamma(b) \overset{d\acute{e}f}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{C_F}\dfrac{b}{|b|}(|b| - S) & si \quad |b| \geq S \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$(ii)\ C_F\,\zeta(\overline{\zeta} - \zeta) + S(|\overline{\zeta}| - |\zeta|) \geq b(\overline{\zeta} - \zeta)\ ,\ \forall \overline{\zeta} \in I\!R$$

et pour deux éléments ζ et b de $L^2(\Gamma)$, les relations $(i) - (ii)$ (prises au sens presque partout sur Γ) sont équivalentes à :

$$(iii)\ C_F(\zeta, \overline{\zeta} - \zeta)_{0,2;\Gamma} + S(|\overline{\zeta}|_{0,1;\Gamma} - |\zeta|_{0,1;\Gamma}) \geq (b, \overline{\zeta} - \zeta)_{0,2;\Gamma}\ ,\ \forall \overline{\zeta} \in L^2(\Gamma)$$

PREUVE :

Les parties 1 et 2 du lemme se démontrant de manière identique, nous limitons ici notre preuve à la partie 1.

Les équivalences entre (i), (ii) et (iii) ont été montrées dans Sofonea et Ionescu [64]. Il reste donc à montrer que, lorsque $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\beta}$ appartiennent à $L^2(\Omega)^2$, ces assertions $(i)-(iii)$ (prises au sens presque partout sur Ω) sont équivalentes à (iv).

Pour commencer, en choisissant $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\xi}}(x)$, avec $\overline{\boldsymbol{\xi}} \in L^2(\Omega)^2$ dans (iii) puis en intégrant sur Ω, nous constatons que (iii) implique (iv).

Réciproquement, nous allons maintenant montrer que (iv) implique (i). Soit $\Omega^+ = \{x \in \Omega\ ;\ \|\boldsymbol{\xi}\|(x) > 0\}$ et notons $\mathrm{Int}(\Omega^+)$ son intérieur. Soit, de plus, $\boldsymbol{\varphi} \in L^2\left(\mathrm{Int}(\Omega^+)\right)^2$ complétée par 0 en dehors de $\mathrm{Int}(\Omega^+)$, de manière à en faire un élément de $L^2(\Omega)^2$. En choisissant dans (iv) $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} + \lambda\boldsymbol{\varphi}$, pour un scalaire $\lambda > 0$, et en divisant (iv) par λ, nous trouvons :

$$(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi})_{0,2;\mathrm{Int}(\Omega^+)} + Bi\frac{|\boldsymbol{\xi} + \lambda\boldsymbol{\varphi}|_{0,2;\mathrm{Int}(\Omega^+)} - |\boldsymbol{\xi}|_{0,2;\mathrm{Int}(\Omega^+)}}{\lambda} \geq 0$$

puisque $\boldsymbol{\xi}$ n'est pas nul presque partout sur $\mathrm{Int}(\Omega^+)$, nous pouvons faire tendre λ vers 0 et obtenir :

$$\left(\boldsymbol{\xi} + Bi\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}\right)_{0,2;\mathrm{Int}(\Omega^+)} \geq 0\ ,\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2\left(\mathrm{Int}(\Omega^+)\right)^2$$

et ainsi nous trouvons la première partie de (i) :

$$\boldsymbol{\xi} + Bi\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}\ ,\ \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \tag{1.7}$$

Considérons par ailleurs une petite boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ de centre x_0 et de rayon $\varepsilon > 0$, contenue dans l'ensemble $\{x \in \Omega\ ;\ \boldsymbol{\xi}(x) = \mathbf{0}\}$. Nous choisissons cette fois dans (iv) $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{1}_{B(x_0;\varepsilon)}\boldsymbol{\beta}$, où $\mathbf{1}_{B(x_0;\varepsilon)}$ désigne la fonction caractéristique de $B(x_0;\varepsilon)$. Nous obtenons alors :

$$Bi\int_{B(x_0;\varepsilon)} \|\boldsymbol{\beta}\|\,\mathrm{d}x \geq \int_{B(x_0;\varepsilon)} \|\boldsymbol{\beta}\|^2\,\mathrm{d}x$$

donc, en divisant par $\mathrm{mes}(B(x_0;\varepsilon))$ et en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons (pour presque tout x_0 tel que $\boldsymbol{\xi}(x_0) = \mathbf{0}$) :

$$Bi\|\boldsymbol{\beta}\| \geq \|\boldsymbol{\beta}\|^2$$

En utilisant $(1/2)Bi^2 + (1/2)\|\boldsymbol{\beta}\|^2 \geq Bi\|\boldsymbol{\beta}\|$, ceci revient donc à écrire la seconde relation de (i) :

$$Bi \geq \|\boldsymbol{\beta}\|\ ,\ \text{si } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

Donc en fait, compte tenu des relations (1.7) et (1.8), nous concluons finalement que $(iv) \Longrightarrow (i)$.

CQFD. $\square$

Nous allons maintenant considérer le problème variationnel suivant :

PROBLÈME **1.2.1** *Trouver* $\mathbf{d} \in L^2(\Omega)^2$, $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^2$, $u \in H^1(\Omega)$ *d'une part, et* $z \in L^2(\Gamma)$ *et* $s \in L^2(\Gamma)$ *d'autre part, vérifiant les relations suivantes pour toutes fonctions test* $\overline{\mathbf{d}} \in L^2(\Omega)^2$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(\Omega)^2$, $\overline{u} \in H^1(\Omega)$, $\overline{z} \in L^2(\Gamma)$ *et* $\overline{s} \in L^2(\Gamma)$ *:*

$$(\mathbf{d}, \overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d})_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{\mathbf{d}}|_{0,1;\Omega} - |\mathbf{d}|_{0,1;\Omega}) \geq (\boldsymbol{\sigma}, \overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d})_{0,2;\Omega} \tag{1.9}$$

$$(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{d})_{0,2;\Omega} = (\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\nabla} u)_{0,2;\Omega} \tag{1.10}$$

$$C_F\,(z, \overline{z} - z)_{0,2;\Gamma} + S(|\overline{z}|_{0,1;\Gamma} - |z|_{0,1;\Gamma}) \geq (s, \overline{z} - z)_{0,2;\Gamma} \tag{1.11}$$

$$(\overline{s}, z)_{0,2;\Gamma} = (\overline{s}, \gamma u)_{0,2;\Gamma} \tag{1.12}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}\overline{u})_{0,2;\Omega} + (s, \gamma\overline{u})_{0,2;\Gamma} = (1, \overline{u})_{0,2;\Omega} \tag{1.13}$$

L'ensemble de ces relations constitue désormais la formulation variationnelle du problème (1.4)-(1.6) et nous pouvons en préciser l'interprétation :

PROPOSITION **1.2.1** *Supposons que* z, s, u, $\boldsymbol{\sigma}$ *et* $\mathbf{d}$ *satisfont le problème variationnel 1.2.1. Alors :*

(i) $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$,
(ii) $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ *est solution du problème (1.4)-(1.6),*
(iii) $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} u$ *p.p. dans* Ω,
(iv) $-\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} = s \in L^2(\Gamma)$ *et*
(v) $z = \gamma u \in H^{1/2}(\Gamma)$.

PREUVE :

D'après (1.10), nous avons $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} u$ p.p. sur Ω et (1.5) est alors satisfaite en utilisant la première partie du lemme 1.2.1.
De plus, (en choisissant $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$) nous voyons que (1.13) signifie que $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + 1 = 0$ est vraie dans $H^{-1}(\Omega)$, mais comme $\{x \mapsto 1\} \in L^2(\Omega)$, (1.6) est obtenue presque partout et on a $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}$ est donc définie dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Nous pouvons alors écrire à partir de (1.13) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}, \overline{u}\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} + (s, \gamma\overline{u})_{0,2;\Gamma} = (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + 1, \overline{u})_{0,2;\Omega}$$

Comme (1.6) est vraie p.p., le membre de droite s'annule. En outre, pour tout $\overline{z} \in H^{1/2}(\Gamma)$, nous pouvons trouver un $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ tel que $\overline{z} = \gamma\overline{u}$ (surjectivité de γ), donc on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} + s, \overline{z}\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

ce qui signifie que $s = -\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et donc en fait dans $L^2(\Gamma)$, car s appartient à cet espace.

En utilisant ensuite cette relation ainsi que (1.12) dans la seconde partie du lemme 1.2.1 (quitte à y remplacer ζ par z et b par s), nous retrouvons la loi de glissement (1.4).

CQFD. □

REMARQUE **1.2.1** *Dans le cas où l'adhérence est imposée à la paroi, la condition $u = 0$ remplace la loi de glissement (1.4) sur Γ et le problème variationnel prend alors la forme :*

PROBLÈME ***1.2.2*** *Trouver $\mathbf{d} \in L^2(\Omega)^2$, $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^2$, $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant les relations suivantes pour toutes fonctions test $\overline{\mathbf{d}} \in L^2(\Omega)^2$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(\Omega)^2$ et $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$:*

$$(\mathbf{d}, \overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d})_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{\mathbf{d}}|_{0,1;\Omega} - |\mathbf{d}|_{0,1;\Omega}) \geq (\boldsymbol{\sigma}, \overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d})_{0,2;\Omega} \tag{1.14}$$

$$(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{d})_{0,2;\Omega} = (\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\nabla} u)_{0,2;\Omega} \tag{1.15}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}\overline{u})_{0,2;\Omega} = (1, \overline{u})_{0,2;\Omega} \tag{1.16}$$

1.2.2 Existence et unicité d'une solution

Nous allons énoncer un résultat d'existence et d'unicité en procédant en trois étapes :

1. nous écrivons notre problème dans un cadre abstrait à trois champs inconnus,
2. nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour le problème abstrait ainsi obtenu,
3. nous appliquons le théorème.

Commençons par remarquer que que l'on peut écrire le problème variationnel (1.9)-(1.13) sous une forme plus condensée. Posons en effet :

$$a\big((\mathbf{d}, z)\,;\,(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z})\big) = (\mathbf{d}, \overline{\mathbf{d}})_{0,2;\Omega} + C_F(z, \overline{z})_{0,2;\Gamma} \tag{1.17}$$

$$b\big((\boldsymbol{\sigma}, s)\,;\,(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z})\big) = (\boldsymbol{\sigma}, \overline{\mathbf{d}})_{0,2;\Omega} + (s, \overline{z})_{0,2;\Gamma} \tag{1.18}$$

$$c(\,(\boldsymbol{\sigma}, s)\,;\,v\,) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + (s, \gamma v)_{0,2;\Gamma} \tag{1.19}$$

$$\chi(\mathbf{d}, z) = Bi|\mathbf{d}|_{0,1;\Omega} + S|z|_{0,1;\Gamma} \tag{1.20}$$

nous observons alors que (1.9)-(1.13) est équivalent à :

$$a\left(\,(\mathbf{d}, z)\,;\,(\overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d}, \overline{z} - z)\,\right) + \chi(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z}) - \chi(\mathbf{d}, z) \geq b\left(\,(\boldsymbol{\sigma}, s)\,;\,(\overline{\mathbf{d}} - \mathbf{d}, \overline{z} - z)\,\right) \tag{1.21}$$

$$b(\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\,;\,(\mathbf{d}, z)\,) = c(\,(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\,;\,u\,) \tag{1.22}$$

$$c(\,(\boldsymbol{\sigma}, s)\,;\,v\,) = (1, v)_{0,2;\Omega} \tag{1.23}$$

Allégeons maintenant les notations en posant $\varphi = (\mathbf{d}, z)$, $\psi = (\boldsymbol{\sigma}, s)$ et $\Phi = L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma)$. Notre problème prend alors la forme :

PROBLÈME **1.2.3** *Trouver $(\varphi, \psi, u) \in \Phi \times \Phi \times H^1(\Omega)$ tel que :*

$$\left\{\begin{array}{llllll} a(\varphi, \overline{\varphi} - \varphi) & -b(\psi, \overline{\varphi} - \varphi) & & +\chi(\overline{\varphi}) - \chi(\varphi) \geq 0 & \forall \overline{\varphi} \in \Phi, \\ -b(\overline{\psi}, \varphi) & & +c(\overline{\psi}, u) & = 0 & \forall \overline{\psi} \in \Phi, \\ & c(\psi, v) & & = (1, v) & \forall v \in H^1(\Omega) \end{array}\right.$$

Enfin nous définissons encore deux sous-espaces [2] :

$$\Phi_{C^*} = \left\{\psi \in \Phi\;;\; c(\psi, v) = 0\;,\; \forall v \in H^1(\Omega)\right\}$$

$$\Phi_{BC^*} = \{\varphi \in \Phi\;;\; b(\psi, \varphi) = 0\;,\; \forall \psi \in \Phi_{C^*}\}$$

Nous pouvons alors utiliser un résultat démontré dans [57] :

THÉORÈME **1.2.1** *On fait les hypothèses :*

(i) $\exists \alpha > 0\;,\; a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_\Phi^2\;,\; \forall \varphi \in \Phi_{BC^*}$

(ii) $\exists c_1 > 0\;,\; \sup_{\varphi \in \Phi} \dfrac{b(\psi, \varphi)}{\|\varphi\|_\Phi} \geq c_1 \|\psi\|_\Phi\;,\; \forall \psi \in \Phi_{C^*}$

(iii) $\exists c_2 > 0\;,\; \sup_{\psi \in \Phi} \dfrac{c(\psi, v)}{\|\psi\|_\Phi} \geq c_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}\;,\; \forall v \in H^1(\Omega)$

on suppose de plus qu'il existe une fonctionnelle χ_ε qui approche χ au sens suivant :

(a) χ_ε est convexe, Gâteaux-différentiable, de dérivée notée χ'_ε,

2. les notations pour ces espaces sont empruntées à D. Sandri [59] qui a étudié la formulation à trois champs du problème de Stokes.

(b) $0 \leq \chi_\varepsilon(\overline{\phi}) - \chi(\overline{\phi}) \leq C_1\,\varepsilon,\ \forall\,\overline{\phi} \in \Phi,$
(c) $\|\chi'_\varepsilon(\overline{\phi})\|_{\Phi'} \leq C_2,\ \forall\,\overline{\phi} \in \Phi.$

Alors il existe une solution $(\varphi, \psi, \mathbf{u}) \in \Phi \times \Phi \times H^1(\Omega)$ *au problème 1.2.3, et* φ *et* u *sont uniques.*

Pour appliquer le théorème 1.2.1, il nous suffit alors de montrer la :

PROPOSITION **1.2.2** *Les formes a, b et c définies par (1.17)-(1.19), ainsi que la fonctionnelle* χ *définie par (1.20) satisfont les hypothèses du théorème 1.2.1.*

PREUVE :

Vérifions point par point chaque hypothèse :

- Ellipticité de a :

$$a\left((\overline{\mathbf{d}}, \overline{z})\,;\,(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z}) \right) = |\overline{\mathbf{d}}|^2_{0,2;\Omega} + C_F|\overline{z}|^2_{0,2;\Gamma} \geq \min\{1, C_F\}\,\|(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z})\|^2_{L^2(\Omega)^2\times L^2(\Gamma)}$$

- b est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma)$, donc on a, pour tout $(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s}) \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma)$:

$$\sup_{(\overline{\mathbf{d}},\overline{z})\in L^2(\Omega)^2\times L^2(\Gamma)} \frac{b\left((\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\,;\,(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z}) \right)}{\|(\overline{\mathbf{d}}, \overline{z})\|_{L^2(\Omega)^2\times L^2(\Gamma)}} = \|(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\|_{L^2(\Omega)^2\times L^2(\Gamma)}$$

- la condition inf-sup sur c est assurée par deux autres conditions inf-sup ; l'une portant sur la forme $(.,\boldsymbol{\nabla}(.))_{0,2;\Omega}$ et l'autre, sur la forme $(.,\gamma(.))_{0,2;\Gamma}$:

$$\begin{aligned}\sup_{(\overline{\boldsymbol{\sigma}},\overline{s})\in L^2(\Omega)^2\times L^2(\Gamma)} \frac{c\left((\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\,;\,v \right)}{\|(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\|} &\geq \frac{1}{2}\sup_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}\in L^2(\Omega)^2} \frac{(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega}}{|\overline{\boldsymbol{\sigma}}|_{0,2;\Omega}} + \frac{1}{2}\sup_{\overline{s}\in L^2(\Gamma)} \frac{(\overline{s}, \gamma v)_{0,2;\Omega}}{|\overline{s}|_{0,2;\Gamma}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{|\boldsymbol{\nabla} v|_{0,2;\Omega} + |\gamma v|_{0,2;\Gamma}\right\}\end{aligned}$$

Enfin, nous renvoyons à l'annexe C pour l'approximation de χ par un χ_ε approprié.

CQFD. □

Finalement, l'équivalence entre (1.9)-(1.13) et (1.21)-(1.23), ainsi que la combinaisons de la proposition 1.2.2 et du théorème 1.2.1 nous permettent d'énoncer :

PROPOSITION **1.2.3** *Il existe une solution* $(\boldsymbol{\sigma}, u, \mathbf{d}, z, s)$ *au problème 1.2.1 et* $(u, \mathbf{d}, z)$ *est unique.*

REMARQUE **1.2.2** *Comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 1.1.1, les contraintes ne sont pas nécessairement uniques.*

REMARQUE **1.2.3** *Pour le cas où l'adhérence est imposée à la paroi, nous voyons que le théorème 1.2.1 s'applique directement au problème 1.2.2, donnant à nouveau l'existence de* $(\boldsymbol{\sigma}, u, \mathbf{d})$ *et l'unicité de* $(u, \mathbf{d})$*.*

1.3 Formulations à un seul champ

L'analyse numérique et théorique des problèmes d'écoulements a très souvent pour point de départ une formulation variationnelle dont l'unique champ inconnu est la vitesse $\mathbf{u}$. Pour le problème de Bingham avec adhérence à la paroi, différentes formulations équivalentes ont été données par Duvaut et Lions [23] et par Glowinski [33]. Nous proposons ici de rappeler quelques unes de ces différentes formulations dans le cadre de notre problème avec glissement. Nous utiliserons en effet, au chapitre 3, plusieurs de ces formulations pour analyser l'erreur dans une méthode d'approximation par éléments finis.

1.3.1 Inéquation variationnelle de seconde espèce

L'élimination des champs $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\sigma}$, s et z dans le problème mixte (1.2.1) donne l'inéquation variationnelle :

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}(v-u))_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma(v-u))_{0,2;\Gamma} \\
&\quad + \; Bi\,\{|\boldsymbol{\nabla} v|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\nabla} u|_{0,1;\Omega}\} \\
&\quad + \; S\,\{|\gamma v|_{0,1;\Gamma} - |\gamma u|_{0,1;\Gamma}\} \;\geq\; (1, v-u)_{0,2;\Omega}\ , \quad \forall v \in H^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

REMARQUE **1.3.1** *Les lois (1.6) proposées par Ionescu et Vernescu [47] induisent des formulations variationnelles plus complexes (voir Ionescu [44]). Cependant, lorsque* s_g *est constant, un problème proche de (1.24) est obtenu, soit l'inéquation variationnelle :*

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}(v-u))_{0,2;\Omega} + Bi\,\{|\boldsymbol{\nabla} v|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\nabla} u|_{0,1;\Omega}\} \\
&\quad + \; S\,\{|\gamma v|_{0,1;\Gamma} - |\gamma u|_{0,1;\Gamma}\} \geq (1, v-u)_{0,2;\Omega}\ , \quad \forall v \in H^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Ceci correspond donc au cas où $C_F = 0$*. Pour conserver l'ellipticité sur* $H^1(\Omega)$ *du problème, il faut alors en fait imposer une condition d'adhérence* $(u = 0)$ *sur une partie de* Γ*, ce qui permet de maintenir l'existence et l'unicité de la solution.*

REMARQUE **1.3.2** *Dans le cas où l'adhérence est imposée à la paroi, nous obtenons le prototype des inéquations variationnelles de seconde espèce :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}(v-u)) + Bi\,\{|\boldsymbol{\nabla} v|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\nabla} u|_{0,1;\Omega}\} \geq (1, v-u)\ , \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{1.25}$$

1.3.2 Introduction d'un multiplicateur dans les inéquations variationnelles

Pour nos estimations d'erreur au chapitre 3, il sera commode de ramener les inéquations variationnelles de seconde espèce que nous avons rencontrées à des équations variationnelles. Ceci peut se faire en introduisant des multiplicateurs de Lagrange.

Pour le problème de Bingham instationnaire, avec inertie et adhérence à la paroi, l'existence et l'interprétation de tels multiplicateurs ont été étudiées dans [23]. Par ailleurs, dans le cas d'une conduite rectiligne de section constante où l'adhérence à la paroi a lieu, Glowinski [33] a donné un procédé de construction des multiplicateurs.

Rappelons tout d'abord les résultats de Glowinski.

LEMME **1.3.1** *(existence d'un multiplicateur - Glowinski [33], page 95, théorème 6.3.)*

Soit :

$$\Lambda(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)^2 \; ; \; \|\boldsymbol{\tau}\| \leq 1 \quad \text{p.p. } \Omega \right\}$$

alors il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\Omega)$ *tel que la solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de l'inéquation variationnelle (1.25) vérifie :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v) + Bi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nabla} v) = (1, v) \; , \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\| \quad \text{p.p. } \Omega$$

REMARQUE **1.3.3** *Il est possible de préciser la nature et la forme de* $\boldsymbol{\lambda}$ *en l'identifiant à une composante des contraintes qu'on peut nommer* contraintes plastiques*. En effet, revenons au problème variationnel 1.2.2. On peut poser, dans cette formulation variationnelle à trois champs :*

$$\sigma = Bi\boldsymbol{\mu} + \mathbf{d} = Bi\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nabla} u$$

C'est un moyen de définir une quantité $\boldsymbol{\mu} \in L^2(\Omega)^2$*, car nous avons vu (remarque 1.2.3) qu'il existe* $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^2$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$ *vérifiant le problème 1.2.2 à trois champs, dans lequel* $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} u$*. En éliminant* $\boldsymbol{\sigma}$ *dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.16), nous obtenons alors :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v) + Bi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nabla} v) = (1, v) \; , \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

De plus, le lemme 1.2.1 permet d'écrire la relation constitutive (soit l'inéquation du problème à trois champs) sous une forme explicite, ce qui permet de vérifier que :

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2 + Bi \, \|\boldsymbol{\nabla} u\| \; , \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

donc :

$$\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\| \ , \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Toujours, d'après le lemme 1.2.1, la loi de comportement peut aussi s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} u + Bi \dfrac{\boldsymbol{\nabla} u}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} & si \qquad \|\boldsymbol{\nabla} u\| \neq 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| < Bi & sinon \end{cases}$$

En utilisant la définition de $\boldsymbol{\mu}$ dans cette dernière relation, nous obtenons :

$$Bi\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nabla} u = \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} u + Bi \dfrac{\boldsymbol{\nabla} u}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} & si \qquad \|\boldsymbol{\nabla} u\| \neq 0 \\ \|Bi\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nabla} u\| < Bi & sinon \end{cases}$$

ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$, nous avons :

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\nabla} u}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} & si \qquad \|\boldsymbol{\nabla} u\| \neq 0 \\ \|\boldsymbol{\mu}\| < 1 & sinon \end{cases}$$

en particulier, $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda(\Omega)$. Nous pouvons donc choisir $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$, ce qui permet d'expliciter $\boldsymbol{\lambda}$ dans les zones déformées (où $\boldsymbol{\nabla} u \neq 0$). Ce choix nous sera utile dans les estimations d'erreur du chapitre 3.

Remarquons en outre que le raisonnement que nous venons de faire est une autre démonstration du lemme 1.3.1.

Pour un problème de frottement en mécanique des solides, un résultat analogue a été construit :

LEMME **1.3.2** *(existence d'un multiplicateur - Glowinski [33], page 79, théorème 5.3)*

Soit :

$$\Lambda(\Gamma) = \{\tau \in L^2(\Gamma) \ ; \ |\tau| \leq 1 \quad \text{p.p. } \Gamma\}$$

L'inéquation variationnelle :

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + (u, v-u)_{0,2;\Omega} + |\gamma v|_{0,1;\Gamma} - |\gamma u|_{0,1;\Gamma} \geq (1, v) \ , \ \forall\, v \in H^1(\Omega) \qquad (1.26)$$

possède une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ et il existe $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ tel que l'inéquation (1.26) soit équivalente à :

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + (u, v)_{0,2;\Omega} + (\lambda, \gamma v)_{0,2;\Gamma} = (1, v)_{0,2;\Omega} \ , \ \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

$$\lambda\,\gamma u = |\gamma u| \quad \text{p.p. } \Gamma$$

Donnons maintenant un résultat qui combine les lemmes 1.3.1 et 1.3.2 dans une version adaptée à notre problème. Il s'agit de montrer de manière constructive l'existence de multiplicateurs pour le problème de Poiseuille avec les deux effets de seuil. C'est un résultat qui nous sera utile dans l'analyse d'erreur en éléments finis.

LEMME **1.3.3** *Il existe* $\lambda_\Gamma \in \Lambda(\Gamma)$ *et* $\boldsymbol{\lambda}_\Omega \in \Lambda(\Omega)$ *tel que :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma v)_{0,2;\Gamma} + Bi(\boldsymbol{\lambda}_\Omega, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + S(\lambda_\Gamma, \gamma v)_{0,2;\Gamma} = (1, v)_{0,2;\Omega} \quad , \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\|\boldsymbol{\nabla} u\| = \boldsymbol{\lambda}_\Omega . \boldsymbol{\nabla} u \ \text{ p.p. } sur\, \Omega \ \ et \ \ |\gamma u| = \lambda_\Gamma \gamma u \ \text{ p.p. } sur\, \Gamma$$

PREUVE :

On reprend la méthode constructive de démonstration donnée dans [33]. Comme on peut alors s'y attendre, on pose :

$$\boldsymbol{\lambda}_\Omega^\delta = \frac{\boldsymbol{\nabla} u^\delta}{\left(\delta^2 + \|\boldsymbol{\nabla} u^\delta\|^2\right)^{1/2}}$$

$$\lambda_\Gamma^\delta = \frac{\gamma u^\delta}{\left(\delta^2 + |\gamma u^\delta|^2\right)^{1/2}}$$

où la régularisation $u^\delta \in H^1(\Omega)$ est caractérisée par :

$$(\boldsymbol{\nabla} u^\delta, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u^\delta, \gamma v)_{0,2;\Gamma} + Bi(\boldsymbol{\lambda}_\Omega^\delta, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + S(\lambda_\Gamma^\delta, \gamma v)_{0,2;\Gamma} = (1, v)_{0,2;\Omega} \quad , \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

En outre, il est clair que $\boldsymbol{\lambda}_\Omega^\delta \in \Lambda(\Omega)$ et $\lambda_\Gamma^\delta \in \Lambda(\Gamma)$. Les ensembles $\Lambda(\Omega)$ et $\Lambda(\Gamma)$ étant convexes, bornés et fermés respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$, on voit qu'il existe des quantités $\boldsymbol{\lambda}_\Omega \in \Lambda(\Omega)$ et $\lambda_\Gamma \in \Lambda(\Gamma)$, limite faible respectivement de $\boldsymbol{\lambda}_\Omega^\delta$ et de λ_Γ^δ.

Comme on sait de plus (voir annexe C) que :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \|u^\delta - u\|_{1,2;\Omega} = 0$$

alors, en faisant tendre δ vers 0, on trouve :

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma v)_{0,2;\Gamma} + Bi(\boldsymbol{\lambda}_\Omega, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + S(\lambda_\Gamma, \gamma v)_{0,2;\Gamma} = (1, v)_{0,2;\Omega}$$

ce qui constitue la première partie de la démonstration.

Choisissons alors $v = u$ dans cette relation. Nous voyons que :

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma u)_{0,2;\Gamma} + Bi(\boldsymbol{\lambda}_\Omega, \boldsymbol{\nabla} u)_{0,2;\Omega} + S(\lambda_\Gamma, \gamma u)_{0,2;\Gamma} = (1, u)_{0,2;\Omega}$$

et d'autre part, on se souvient qu'en choisissant $v = 0$ puis $v = 2u$ dans le problème variationnel (1.24), nous obtenons :

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma u)_{0,2;\Gamma} + S\int_\Gamma |\gamma u| \,\mathrm{d}\Gamma + Bi\int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} u\| \,\mathrm{d}x = (1, u)_{0,2;\Omega}$$

donc, par soustraction des deux résultats, il vient l'égalité :

$$S\int_\Gamma (|\gamma u| - \lambda_\Gamma \gamma u) \,\mathrm{d}\Gamma + Bi\int_\Omega (\|\boldsymbol{\nabla} u\| - \boldsymbol{\lambda}_\Omega.\boldsymbol{\nabla} u) \,\mathrm{d}x = 0$$

or, $\lambda_\Gamma.\gamma u \leq |\lambda_\Gamma|\,|\gamma u| \leq |\gamma u|$ et, de même, $\|\boldsymbol{\nabla} u\| - \boldsymbol{\lambda}_\Omega.\boldsymbol{\nabla} u \geq 0$, on en déduit donc qu'en fait,

$$\|\boldsymbol{\nabla} u\| - \boldsymbol{\lambda}_\Omega.\boldsymbol{\nabla} u = 0$$

et

$$|\gamma u| - \lambda_\Gamma\, \gamma u = 0$$

CQFD. □

Remarque **1.3.4** *La construction des multiplicateurs passe par une régularisation des termes liés aux seuils. La régularisation n'est pas notre objectif en ce qui concerne le calcul numérique. Cependant, c'est une technique de preuve efficace et un point important de la littérature, c'est pourquoi nous en présentons quelques aspects dans l'annexe C.*

Remarque **1.3.5** *Les lemmes 1.3.1 et 1.3.2 ont été énoncé ici pour un second membre f constant et égal à 1, car cela correspond à notre problème. En fait, Glowinski a énoncé ces résultats dans [33] pour un second membre $f \in L^2(\Omega)$.*

Chapitre 2

La méthode de discrétisation

Les méthodes de résolution les plus courantes pour les problèmes de fluide à seuil régularisent le seuil (voir l'annexe C) dans le problème 1.25. Cela permet d'utiliser un algorithme de Newton qui résout l'équation variationnelle résultante. Comme nous l'avons déjà précisé, cela ne correspond pas à notre démarche, car :

- un modèle «régularisé» est un modèle qui est différent du modèle «à seuil» : il n'y a plus de zones rigides mais des zones de faible déformation et de même, il n'y a plus de zones d'adhérence,
- des estimations d'erreur (voir l'annexe C) montrent que la convergence de la solution régularisée vers une solution du problème à seuil peut être lente,
- les temps de calculs pour la méthode de Newton explosent [1] quand le petit paramètre de régularisation tend vers 0 (car alors on fait tendre le modèle régularisé vers le modèle à seuil non régulier),
- l'introduction d'un paramètre supplémentaire à gérer (le petit paramètre de régularisation) ne nous semble pas souhaitable (c'est une complication de plus qui est gênante en pratique).

Notre méthode est donc établie pour le modèle de Bingham et la loi de glissement sans régularisation. Elle consiste en une nouvelle combinaison de trois techniques :

1. une approximation par éléments finis mixtes,
2. un algorithme de lagrangien augmenté [2],
3. un procédé d'adaptation de maillage.

1. Ceci peut probablement être évité en utilisant des méthodes de Newton généralisées, dans ce cas, il n'est plus nécessaire de régulariser.

2. Nous n'avons pas suivi la stratégie consistant à utiliser une méthode de Newton généralisée (comme dans [1]) car la mise en œuvre du lagrangien augmenté nous parraissait plus simple et a donné des résultats satisfaisants.

Chacun de ces trois aspects fait l'objet d'une section particulière de ce chapitre. Ajoutons que nous avons programmé cette méthode en C++ et que nous avons intégré à notre code un mailleur anisotrope [40]-[41] pour réaliser la technique d'adaptation de maillage.

Le lecteur intéressé par les aspects pratiques pourra se reporter directement aux sections 2.2 et 2.3.

2.1 Choix d'une méthode d'éléments finis

Nous commencerons par décrire l'approximation variationnelle du problème continu (1.9)-(1.13), puis nous fixerons les espaces approchés dans le cadre de la méthode des éléments finis. Pour des raisons pratiques qui apparaîtront dans la section 2.2, nous introduirons une variante du problème approché avec des formules explicites. Une formulation à un champ viendra clore cette section. Cette dernière formulation sera utilisée dans le chapitre 3.

2.1.1 Problème variationnel approché

On se donne $X_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $T_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)^2$, et $T_h(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie, pilotée par un paramètre $h > 0$.

On considère alors l'analogue discret de (1.9)-(1.13) :

Problème **2.1.1** *Trouver $u_h \in X_h(\Omega)$, $\mathbf{d}_h \in T_h(\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}_h \in T_h(\Omega)$, $z_h \in T_h(\Gamma)$ et $s_h \in T_h(\Gamma)$ tels que, pour toutes fonctions test $\overline{u}_h \in X_h(\Omega)$, $\overline{\mathbf{d}}_h \in T_h(\Omega)$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h \in T_h(\Omega)$, $\overline{z}_h \in T_h(\Gamma)$ et $\overline{s}_h \in T_h(\Gamma)$, on ait :*

$$(\mathbf{d}_h, \overline{\mathbf{d}}_h - \mathbf{d}_h)_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{\mathbf{d}}_h|_{0,1;\Omega} - |\mathbf{d}_h|_{0,1;\Omega}) \geq (\boldsymbol{\sigma}_h, \overline{\mathbf{d}}_h - \mathbf{d}_h)_{0,2;\Omega} \tag{2.1}$$

$$(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \mathbf{d}_h)_{0,2;\Omega} = (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\nabla} u_h)_{0,2;\Omega} \tag{2.2}$$

$$C_F\,(z_h, \overline{z}_h - z_h)_{0,2;\Gamma} + S(|\overline{z}_h|_{0,1;\Gamma} - |z_h|_{0,1;\Gamma}) \geq (s, \overline{z}_h - z_h)_{0,2;\Gamma} \tag{2.3}$$

$$(\overline{s}_h, z_h)_{0,2;\Gamma} = (\overline{s}_h, \gamma u_h)_{0,2;\Gamma} \tag{2.4}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\nabla}\overline{u}_h)_{0,2;\Omega} + (s_h, \gamma\overline{u}_h)_{0,2;\Gamma} = (1, \overline{u}_h)_{0,2;\Omega} \tag{2.5}$$

On peut alors montrer la :

PROPOSITION **2.1.1** *Supposons qu'il existe des constantes c'_1 et c'_2 indépendantes de h telles que :*

$$(i) \quad \sup_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h \in T_h(\Omega)} \frac{(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\nabla} v_h)_{0,2;\Omega}}{|\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h|_{0,2;\Omega}} \geq c'_1 |\boldsymbol{\nabla} v_h|_{0,2;\Omega} \quad , \forall v_h \in X_h(\Omega)$$

$$(ii) \quad \sup_{\overline{s}_h \in T_h(\Gamma)} \frac{(\overline{s}_h, \gamma v_h)_{0,2;\Gamma}}{|\overline{s}_h|_{0,2;\Gamma}} \geq c'_2 |\gamma v_h|_{0,2;\Gamma} \quad , \forall v_h \in X_h(\Omega)$$

alors le problème 2.1.1 admet une solution dont les composantes u_h et z_h sont uniques.

PREUVE :

La démonstration d'existence et d'unicité que nous avons faite dans le cas du problème continu (1.9)-(1.13) peut encore s'appliquer. Avec les notations (1.17)-(1.20), les relations définissant le problème discret 2.1.1 sont en effet équivalentes au système :

$$a\left((\mathbf{d}_h, z_h)\,;\, (\overline{\mathbf{d}_h} - \mathbf{d}_h, \overline{z}_h - z_h) \right) + \chi(\overline{\mathbf{d}}_h, \overline{z}_h) - \chi(\mathbf{d}_h, z_h) \geq b\left((\boldsymbol{\sigma}_h, s_h)\,;\, (\overline{\mathbf{d}}_h - \mathbf{d}_h, \overline{z}_h - z_h) \right)$$

$$b(\, (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \overline{\mathrm{s}}_h)\,;\, (\mathbf{d}_h, z_h)\,) = c(\, (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \overline{s}_h)\,;\, u_h\,)$$

$$c(\, (\boldsymbol{\sigma}_h, s_h)\,;\, \overline{u}_h\,) = (1, \overline{u}_h)_{0,2;\Omega}$$

Nous aurons donc achevé la démonstration en appliquant, comme dans le cas continu, le théorème 1.2.1 (quitte à remplacer $H^1(\Omega)$ par $X_h(\Omega)$). Cela repose donc sur une vérification des hypothèses portant sur a, b, c et χ, dans ce théorème. Or, en observant la preuve de la proposition 1.2.2, nous constatons que les conditions (i) et (ii) de la proposition 2.1.1 sont bien des conditions suffisantes. En effet, quel que soit le choix des sous-espaces de dimension finie :

- la condition d'ellipticité de a ((i) du théorème 1.2.1) reste assurée sur $X_h(\Omega) \times T_h(\Gamma)$, a étant en fait un produit scalaire,
- la condition inf-sup sur b ((ii) du théorème 1.2.1) reste également vraie, b étant un produit scalaire,
- la condition inf-sup sur c ((iii) du Théorème 1.2.1) est vérifiée lorsque (i) et (ii) sont vraies, (ce qui apparaît dans la preuve de la proposition 1.2.2)
- la propriété d'approximation de χ par un χ_ε adéquat ne dépend pas de $\Phi = T_h(\Omega) \times T_h(\Gamma)$ (voir l'annexe C pour les régularisations possibles).

CQFD. □

REMARQUE **2.1.1** *Plus concrètement encore, si nous choisissons les espaces $X_h(\Omega)$ et $T_h(\Gamma)$ tels que :*

$$\boldsymbol{\nabla} X_h(\Omega) \subset T_h(\Omega)$$

alors la condition inf-sup sur la forme bilinéaire $(.,\boldsymbol{\nabla}(.))_{0,2;\Omega}$ *(condition (i) de la proposition 2.1.1) est satisfaite (nous pouvons prendre* $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h = \boldsymbol{\nabla}(v_h) \in T_h(\Omega)$*). De même, si :*

$$\gamma X_h(\Omega) \subset T_h(\Gamma)$$

alors la condition inf-sup sur $(.,\gamma(.))_{0,2;\Gamma}$ *(condition (ii) de la proposition 2.1.1) est vérifiée (nous pouvons prendre* $\overline{s}_h = \gamma v_h \in T_h(\Gamma)$*).*

Avec un tel choix d'espaces, l'unique élément $\mathbf{d}_h \in T_h(\Omega)$ *vérifiant (2.2) est en fait défini par :*

$$\mathbf{d}_h = \boldsymbol{\nabla} u_h$$

et de même :

$$z_h = \gamma\, u_h$$

Contrairement au cas continu (voir lemme 1.2.1), nous ne pouvons pas affirmer l'équivalence entre l'inéquation variationnelle (2.1) et la relation $\mathbf{d}_h = F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}_h)$ et cela parce que $F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}_h)$ n'est pas nécessairement dans $T_h(\Omega)$. Nous verrons plus loin un exemple où $\mathbf{d}_h$ est donné par $F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}_h)$, mais aussi des exemples où ce n'est pas le cas.

2.1.2 Utilisation de la méthode des éléments finis

Nous souhaitons mettre en œuvre une méthode d'éléments finis pour résoudre le problème (1.9)-(1.13). Autrement dit, nous allons fixer les espaces $X_h(\Omega)$, $T_h(\Omega)$ et $T_h(\Gamma)$ dans l'approximation variationnelle (2.1)-(2.5). Pour faciliter la description, nous considérons dans cette partie que le domaine Ω est polygonal. Suivant Raviart et Thomas [55], on se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω, c'est-à-dire une décomposition finie de Ω telle que :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K$$

et vérifiant les propriétés :

1. chaque élément K de $\mathcal{T}_h$ est un triangle ;
2. les intérieurs de deux triangles de $\mathcal{T}_h$ distincts sont disjoints ;
3. toute arête d'un triangle $K \in \mathcal{T}_h$ est soit arête d'un autre triangle, soit une partie de Γ.

Le paramètre h est alors défini par :

$$h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$$

où h_K est le diamètre du triangle K.

Remarquons que la condition 3 garantit que $\mathcal{T}_h$ définit un maillage de Γ.

Voyons rapidement quelques définitions classiques, en suivant les notations de Raviart et Thomas [55]. Désignons par P_k l'espace des polynômes homogènes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à k, pour n valant 1 ou 2. Nous localisons les degrés de liberté à l'aide du treillis principal $\Sigma_k(K)$ d'ordre k du triangle K. Dans la pratique, les valeurs $k = 0, 1, 2$ vont nous suffire. Alors les définitions de $\Sigma_k(K)$ sont simples :
$\Sigma_0(K)$ est le centre de l'élément K,
$\Sigma_1(K)$ est l'ensemble des sommets de l'élément K,
$\Sigma_2(K)$ est l'ensemble des sommets et des milieux des arrêtes de l'élément K.
Pour une définition générale et d'autres exemples, on peut voir [55]. En outre, nous posons, pour $k \geq 0$:

$$X_h^{k,0}(\overline{\Omega}) = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \ ; \ v_h|_K \in P_k \ , \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

Nous notons $X_h^{k,-1}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$, dont la restriction à K est dans P_k, pour chaque K de $\mathcal{T}_h$. (Elles ne sont pas nécessairement continues à la traversée d'une arête, contrairement aux éléments de $X_h^{k,0}(\Omega)$). Nous définissons de manière analogue :

$$X_h^{k,0}(\Gamma) = \left\{ \zeta_h \in C^0(\Gamma) \ ; \ \zeta_h|_e \in P_k \ , \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et pour toute arrête } e \text{ de } K \cap \Gamma \right\}$$

et $X_h^{k,-1}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur Γ, à valeur réelle et dont la restriction à e est dans P_k pour chaque arrête $e \in K \cap \Gamma$, avec $K \in \mathcal{T}_h$.

Voyons maintenant un exemple où l'on peut facilement choisir les espaces $X_h(\Omega)$, $T_h(\Omega)$ et $T_h(\Gamma)$.

Exemple **2.1.1** *(Une approximation du problème de Poiseuille)*

Considérons de manière générale, pour $k \geq 1$:

$$X_h(\Omega) = X_h^{k,0}(\Omega)$$

Compte tenu de la proposition 2.1.1, nous pouvons choisir :

$$\begin{array}{rcccl} \nabla X_h(\Omega) & \subset & T_h(\Omega) & = & X_h^{k-1,-1}(\Omega)^2 \\ \gamma X_h(\Omega) & \subset & T_h(\Gamma) & = & X_h^{k,0}(\Gamma) \end{array}$$

Désormais nous allons uniquement considérer des approximations définies par cet exemple. Les espaces approchés sont donc maintenant fixés avec $k \geq 1$ comme paramètre.

La délicate et essentielle question de la convergence de ces méthodes d'approximation sera abordée dans le chapitre 3, y compris lorsque le domaine Ω n'est pas polygonal.

Venons maintenant à un aspect pratique important, dans le cadre de cet exemple.

2.1.3 Introduction d'une formule explicite

Intéressons-nous à l'exemple 2.1.1 avec $X_h(\Omega) = X_h^{1,0}(\Omega)$ (approximation P_1-continue de la vitesse), nous avons $T_h(\Omega) = X_h^{0,-1}(\Omega)$. Cela nous fournit donc un exemple où :

$$F_\Omega(\boldsymbol{\beta}_h) \in T_h(\Omega) \ , \ \forall \boldsymbol{\beta}_h \in T_h(\Omega)$$

Ainsi, si nous connaissons $\boldsymbol{\sigma}_h$, il est facile de calculer $\mathbf{d}_h$ grâce à la relation explicite :

$$\mathbf{d}_h = F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}_h)$$

Cependant, il n'en va pas de même pour la loi de glissement puisque nous avons $T_h(\Gamma) = X_h^{1,0}(\Gamma)$ et donc, si b_h est un élément de $T_h(\Gamma)$, nous ne pouvons pas affirmer que $F_\Gamma(b_h) \in T_h(\Gamma)$. De plus, si nous considérons à nouveau l'exemple 2.1.1, mais avec $k = 2$, nous constatons que cette fois-ci, $F_\Omega(\boldsymbol{\beta}_h)$ **n'est pas dans** $T_h(\Omega)$.

Cependant, comme nous le verrons en section 2.2, pour mettre en œuvre concrètement une méthode de résolution, une formule reliant explicitement $\mathbf{d}_h$ et $\boldsymbol{\sigma}_h$, ainsi que z_h et s_h est très utile. L'utilisation de telles formules dans la section 2.2 nous conduira alors à considérer une variante du problème approché 2.1.1 :

PROBLÈME **2.1.2** *Trouver $u_h \in X_h(\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}_h \in T_h(\Omega)$, $\mathbf{d}_h \in T_h(\Omega)$, $s_h \in T_h(\Gamma)$ et $z_h \in T_h(\Gamma)$ tel que, pour toutes fonctions test $\overline{u}_h \in X_h(\Omega)$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h \in T_h(\Omega)$, et $\overline{s}_h \in T_h(\Gamma)$, on ait :*

$$\mathbf{d}_h(a_i) = F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}_h(a_i)) \ , \ \forall\, a_i \in \Sigma_{k-1}(K) \ , \ \forall\, K \in \mathcal{T}_h \tag{2.6}$$

$$(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \mathbf{d}_h)_{2;\Omega} = (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\nabla} u_h)_{2;\Omega}$$

$$z_h(a_i) = F_\Gamma(s_h(a_i)) \ , \ \forall\, a_i \in \Sigma_k(e) \ , \ \forall\, e = K \cap \Gamma \ , \ \forall\, K \in \mathcal{T}_h \tag{2.7}$$

$$(\overline{s}_h, z_h)_{2;\Gamma} = (\overline{s}_h, \gamma u_h)_{2;\Gamma}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\nabla}\overline{u}_h)_{2;\Omega} + (s, \gamma\overline{u}_h)_{2;\Gamma} = (1, \overline{u}_h)_{2;\Omega}$$

Dans la suite, lorsque nous ferons référence au problème 2.1.2, nous supposerons que la conclusion de la proposition 2.1.1 a encore lieu.

REMARQUE **2.1.2** *(Lien avec une formule de quadrature)*
Faire apparaître de telles formules explicites implique l'introduction de la formule de quadrature des trapèzes dans les inéquations variationnelles du problème approché 2.1.1. Rappelons que ces formules de quadrature $I_{h,\Omega}$ et $I_{h,\Gamma}$ sont définies par:

$$\int_K \phi(x)\,dx \approx I_{h,K}(\phi) = \frac{\mathrm{mes}(K)}{3}\sum_{i=1}^{3}\phi(a_i) \ \textit{pour } K \in \mathcal{T}_h \textit{ et } a_i \textit{ un sommet de } K$$

$$\int_e \phi(x)\,dx \approx I_{h,e}(\phi) = \frac{\mathrm{mes}(e)}{2}\sum_{i=1}^{2}\phi(a_i) \textit{ pour } e = K\cap\Gamma \textit{ avec } K\in\mathcal{T}_h \textit{ et } a_i \textit{ un sommet de } e$$

et posons les notations : $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)_{h,\Omega} = I_{h,\Omega}(\boldsymbol{\xi}_1.\boldsymbol{\xi}_2)$ *et* $(\zeta_1,\zeta_2)_{h,\Gamma} = I_{h,\Gamma}(\zeta_1\,\zeta_2)$ *Si nous remplaçons maintenant les inéquations (2.1) et (2.3) par :*

$$(\mathbf{d}_h,\overline{\mathbf{d}}_h-\mathbf{d}_h)_{h,\Omega} + Bi(I_{h,\Omega}(\|\overline{\mathbf{d}}_h\|) - I_{h,\Omega}(\|\mathbf{d}_h\|)) \geq (\boldsymbol{\sigma}_h,\overline{\mathbf{d}}_h-\mathbf{d}_h)_{h,\Omega}\ ,\ \forall\,\overline{\mathbf{d}}_h\in T_h(\Omega) \quad (2.8)$$

$$C_F\,(z_h,\overline{z}_h-z_h)_{h,\Gamma} + S(I_{h,\Gamma}(|\overline{z}_h|) - I_{h,\Gamma}(|z_h|)) \geq (s,\overline{z}_h-z_h)_{h,\Gamma}\ ,\ \forall\,\overline{z}_h\in T_h(\Gamma) \quad (2.9)$$

nous pouvons alors montrer le :

LEMME ***2.1.1*** *Pour que l'inéquation (2.8) soit satisfaite, il suffit que la relation explicite (2.6) soit vérifiée. De même, pour que l'inéquation (2.9) soit satisfaite, il suffit que la relation explicite (2.7) soit vérifiée.*

PREUVE :

Si nous définissons $\mathbf{d}_h$ *par (2.6), alors, d'après le lemme 1.2.1, nous avons, pour tout* $\overline{\boldsymbol{\xi}}\in I\!R^2$ *:*

$$\mathbf{d}_h(a_i).(\overline{\boldsymbol{\xi}}-\mathbf{d}_h(a_i)) + Bi(\|\overline{\boldsymbol{\xi}}\| - \|\mathbf{d}_h(a_i)\|) \geq \boldsymbol{\sigma}_h(a_i).(\overline{\boldsymbol{\xi}}-\mathbf{d}_h(a_i))$$

Soit maintenant $K\in\mathcal{T}_h$ *et* a_i *un sommet de* K. *En se donnant* $\overline{\boldsymbol{\xi}}_h\in T_h(\Omega)$, *en choisissant* $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\xi}}_h(a_i)$, *puis, en multipliant cette inéquation par* $\mathrm{mes}(K)/3$, *en sommant de* 1 *à* 3 *sur l'indice* i *et enfin en sommant sur* $K\in\mathcal{T}_h$, *nous obtenons l'inéquation (2.8).*

CQFD. □

Ce petit lemme donne un sens «variationnel» aux relations 2.6 et 2.7.

Dans la littérature sur l'approximation par éléments finis du problème de Poiseuille, l'introduction, pour $k = 2$, *d'une formule de quadrature permettant d'approcher le terme non-linéaire* $|\boldsymbol{\nabla}\,u|_{0,1;\Omega}$ *est souvent présentée comme une difficulté technique (Glowinski et al. [35], page 105, Glowinski [33], page 99). Dans notre cas, c'est une simplification technique, permettant d'utiliser une relation explicite simple à mettre en œuvre, qui fait apparaître la formule de quadrature des trapèzes dans le problème approché.*

2.1.4 Formulation à un champ

Nous aborderons au chapitre 3 l'analyse du problème discret en nous ramenant à l'étude d'un problème variationnel où le seul champ inconnu est $u_h\in X_h(\Omega)$. Ce problème variationnel est une inéquation variationnelle que nous obtenons à partir de (2.1)-(2.5) par élimination des champs $\boldsymbol{\sigma}_h$, $\mathbf{d}_h$ s_h et z_h :

PROBLÈME **2.1.3** *Trouver $u_h \in X_h(\Omega)$ tel que, pour tout $v_h \in X_h(\Omega)$, on ait :*

$$\begin{array}{l}(\boldsymbol{\nabla} u_h, \boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h))_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u_h, \gamma(v_h - u_h))_{0,2;\Gamma} \\ \quad + Bi\,(|\boldsymbol{\nabla} v_h|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\nabla} u_h|_{0,1;\Omega}) \\ \quad + S\,(|\gamma v_h|_{0,1;\Gamma} - |\gamma u_h|_{0,1;\Gamma}) \geq (1, v_h - u_h)_{0,2;\Omega}\end{array}$$

Une application du théorème de Lions-Stampacchia (voir [49]) sur les inéquations variationnelles de seconde espèce permet de montrer qu'il existe un unique u_h satisfaisant le problème 2.1.3.

2.2 Choix d'un algorithme de lagrangien augmenté

2.2.1 Introduction

Il existe une famille d'algorithmes bien adaptée à nos non-linéarités de type «seuil». Il s'agit des algorithmes de lagrangien augmenté. Ils sont présentés de manière détaillée dans les livres de Fortin et Glowinski [34] et de Glowinski et Le Tallec [37]. Le principe d'une méthode de lagrangien augmenté consiste à appliquer un algorithme de calcul d'un point de selle $((\mathbf{d}, u, z); (\boldsymbol{\sigma}, s))$, pour une fonctionnelle $L_{\Delta t}$ nommée *Lagrangien augmenté*, qui dans notre cas (problème 1.2.1) s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} L_{\Delta t}\left((\overline{\mathbf{d}}, \overline{u}, \overline{z}); (\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{s})\right) & = & \frac{1}{2}|\overline{\mathbf{d}}|^2_{0,2;\Omega} + \frac{C_F}{2}|\overline{z}|^2_{0,2;\Gamma} + Bi|\overline{\mathbf{d}}|_{0,1;\Gamma} + S|\overline{z}|_{0,1;\Gamma} - (1, \overline{u})_{0,2;\Omega} \\ & + & (\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\nabla}\overline{u} - \overline{\mathbf{d}})_{0,2;\Omega} + (\overline{s}, \gamma\overline{u} - \overline{z})_{0,2;\Gamma} \\ & + & \frac{\Delta t}{2}\left\{|\boldsymbol{\nabla}\overline{u} - \overline{\mathbf{d}}|^2_{0,2;\Omega} + |\gamma\overline{u} - \overline{z}|^2_{0,2;\Gamma}\right\} \end{array}$$

avec $\overline{\mathbf{d}}$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ dans $L^2(\Omega)^2$, $\overline{z}$ et $\overline{s}$ dans $L^2(\Gamma)$, $\overline{u}$ dans $H^1(\Omega)$ et $\Delta t > 0$.

Un point de selle de $L_{\Delta t}$ est caractérisé par les relations (1.9)-(1.13) de notre formulation variationnelle, c'est pourquoi nous disions que cette dernière est bien adaptée à l'écriture d'un algorithme. Les algorithmes de lagrangien augmenté sont donc paramètrés par un nombre positif que nous notons Δt [3]. Il est en fait tout-à-fait possible d'utiliser une fonctionnelle L, nommée *lagrangien*, indépendante de Δt, obtenue simplement en supprimant de $L_{\Delta t}$ les termes dépendant de Δt. Cependant, nous allons voir que l'introduction de ce paramètre permet d'obtenir des étapes facile à résoudre dans les algorithmes.

Nous ne souhaitons pas ici entrer dans un exposé détaillé de la construction des algorithmes (pour cela, voir [37]) mais plutôt indiquer la façon concrète dont ils peuvent être

3. Cette notation est justifiée par le fait qu'on peut construire ces algorithmes comme des schémas en temps (voir Glowinski et Le Tallec [37], chapitre 3, section 5).

mis en œuvre. En outre, nous avons souhaité choisir l'un d'entre eux. Pour cela nous avons décidé de comparer deux d'entre-eux :

- le plus simple, c'est-à-dire le *schéma d'Uzawa*,
- une version plus sophistiquée, le θ-*schéma*, qui est plus rapide dans certains cas (voir [37]).

Ainsi, nous commencerons par donner directement les algorithmes obtenus dans notre situation particulière, lorsqu'on applique les descriptions générales de Glowinski et Le Tallec [37]. Nous détaillerons chaque étape du calcul, dans le cadre de la méthode d'éléments finis choisie en section 2.1. Nous finirons par des résultats de convergence qui nous permettrons de choisir un algorithme particulier.

Comme nous l'avons déjà précisé, pour des raisons de simplicité de programmation, nous introduirons dans nos algorithmes des formules explicites. Ceci nous conduira à supposer que la solution calculée par les algorithmes vérifie le problème discret 2.1.2. Précisons que nous ne prouvons pas cette convergence, mais que l'ensemble de nos calculs numériques, au chapitre 3, indiquent que la solution calculée via cette modification d'algorithme conserve une précision satisfaisante.

2.2.2 Description de deux algorithmes

En utilisant les notations $F_\Omega(.)$ et $F_\Gamma(.)$ définies au lemme 1.2.1, page 67, l'algorithme d'Uzawa pour notre problème prend la forme concrète suivante :

Algorithme **2.2.1** *(Uzawa)*

Soient $u^0 \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{d}^0 \in L^2(\Omega)^2$, $z^0 \in L^2(\Gamma)$, $s^0 \in L^2(\Gamma)$ *et* $\boldsymbol{\sigma}^0 \in L^2(\Omega)^2$.

Étant donnés $u^n \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{d}^n \in L^2(\Omega)^2$, $z^n \in L^2(\Gamma)$, $s^n \in L^2(\Gamma)$ *et* $\boldsymbol{\sigma}^n \in L^2(\Omega)^2$, *calculer* $u^{n+1} \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{d}^{n+1} \in L^2(\Omega)^2$, $z^{n+1} \in L^2(\Gamma)$, $s^{n+1} \in L^2(\Gamma)$ *et* $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} \in L^2(\Omega)^2$ *comme suit :*

Étape 1 *:* $u^{n+1} \in H^1(\Omega)$ *résout un problème simple*

$$\begin{aligned} -\Delta t \triangle u^{n+1} &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^n - \Delta t \mathbf{d}^n) + 1 && \text{sur} \quad \Omega \\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + u^{n+1} &= \mathbf{d}^n.\mathbf{n} + z^n - \frac{1}{\Delta t}(s^n + \boldsymbol{\sigma}^n.\mathbf{n}) && \text{sur} \quad \Gamma \end{aligned} \tag{2.10}$$

Étape 2 *: Résolution explicite des non-linéarités*

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{n+1} &:= \frac{1}{\Delta t + 1} F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta t \boldsymbol{\nabla} u^{n+1}) \\ z^{n+1} &:= \frac{C_F}{\Delta t + C_F} F_\Gamma(s^n + \Delta t \gamma\, u^{n+1}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Étape 3 : *Mise à jour des contraintes*

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} & := & \boldsymbol{\sigma}^{n} + \Delta t\,(\boldsymbol{\nabla} u^{n+1} - \mathbf{d}^{n+1}) \\ s^{n+1} & := & s^{n} + \Delta t\,(\gamma u^{n+1} - z^{n+1}) \end{array} \tag{2.12}$$

Le θ-schéma combine les mêmes étapes de manière plus sophistiquée. En outre, comme son nom l'indique, cet algorithme est paramètré par un réel $\theta \in]0; 1/2[$.

ALGORITHME **2.2.2** *(θ-schéma)*

Soient $u^0 \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{d}^0 \in L^2(\Omega)^2$, $z^0 \in L^2(\Gamma)$, $s^0 \in L^2(\Gamma)$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 \in L^2(\Omega)^2$.

Étape n : *initialisation de* $\mathbf{d}$ *et* z

$$\mathbf{d}^n = F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}^n + \Delta t_1 \boldsymbol{\nabla} u^n) \quad ; \quad z^n = F_\Gamma(s^n + \Delta t_1 \gamma u^n) \tag{2.13}$$

Étape $(n+\theta)$: *calcul des champs* u, $\boldsymbol{\sigma}$ *et* s

$$\begin{array}{ll} -\Delta t_1 \triangle u^{n+\theta} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^n - \Delta t_1 \mathbf{d}^n) + 1 & \textit{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u^{n+\theta}}{\partial \mathbf{n}} + u^{n+\theta} = \mathbf{d}^n.\mathbf{n} + z^n - \dfrac{1}{\Delta t_1}(s^n + \boldsymbol{\sigma}^n.\mathbf{n}) & \textit{sur} \quad \Gamma \end{array} \tag{2.14}$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} := \boldsymbol{\sigma}^n + \Delta t_1\,(\boldsymbol{\nabla} u^{n+\theta} - \mathbf{d}^n) \\ s^{n+\theta} := s^n + \Delta t_1\,(\gamma\, u^{n+\theta} - z^n) \end{array} \tag{2.15}$$

Étape $(n+1-\theta)$: *calcul des champs* $\mathbf{d}$, z, $\boldsymbol{\sigma}$ *et* s

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{d}^{n+1-\theta} & := & \dfrac{1}{1+\Delta t_2} F_\Omega(\boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} + \Delta t_2 \boldsymbol{\nabla} u^{n+\theta}) \\ z^{n+1-\theta} & := & \dfrac{C_F}{C_F + \Delta t_2} F_\Gamma(s^{n+\theta} + \Delta t_2 \gamma\, u^{n+\theta}) \end{array} \tag{2.16}$$

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\sigma}^{n+1-\theta} & := & \boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} + \Delta t_2\,(\boldsymbol{\nabla} u^{n+\theta} - \mathbf{d}^{n+1-\theta}) \\ s^{n+1-\theta} & := & s^{n+\theta} + \Delta t_2\,(\gamma\, u^{n+\theta} - z^{n+1-\theta}) \end{array} \tag{2.17}$$

Étape $(n+1)$: *calcul des champs* u, $\boldsymbol{\sigma}$ *et* s

$$\begin{array}{ll} -\Delta t_1 \triangle u^{n+1} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1-\theta} - \Delta t_1 \mathbf{d}^{n+1-\theta}) + 1 & \textit{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + u^{n+1} = \mathbf{d}^{n+1-\theta}.\mathbf{n} + z^{n+1-\theta} - \dfrac{1}{\Delta t_1}(s^{n+1-\theta} + \boldsymbol{\sigma}^{n+1-\theta}.\mathbf{n}) & \textit{sur} \quad \Gamma \end{array} \tag{2.18}$$

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} & := & \boldsymbol{\sigma}^{n+1-\theta} + \Delta t_1\,(\boldsymbol{\nabla} u^{n+1} - \mathbf{d}^{n+1-\theta}) \\ s^{n+1} & := & s^{n+1-\theta} + \Delta t_1\,(\gamma\, u^{n+1} - z^{n+1-\theta}) \end{array} \tag{2.19}$$

avec : $\Delta t_1 = \theta \Delta t$ *et :* $\Delta t_2 = (1-2\theta)\Delta t$

REMARQUE **2.2.1** *Pour $\Delta t = 0$, l'algorithme 2.2.1 n'a pas de sens : on ne peut pas calculer u^{n+1} et σ^n n'évolue pas. Le même remarque vaut pour le θ-schéma.*

Nous voyons apparaître trois types de sous-problèmes :

- un sous-problème linéaire simple consistant à résoudre une équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Robin,
- des calculs explicites correspondant aux non-linéarités,
- des calculs explicites correspondant à la mise à jour des multiplicateurs $\boldsymbol{\sigma}^n$ et s^n.

Nous avons décidé d'utiliser ces algorithmes en les écrivant au niveau discret. Autrement dit, on discrétise chaque étape des algorithmes. Rappelons à cet effet que nous avons fixé les espaces discrets comme suit, pour $k \geq 1$ (avec le notations de la section 2.1.2) :

$$\begin{array}{rcccl} u_h & \in & X_h(\Omega) & = & X_h^{k,0}(\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{d}_h & \in & T_h(\Omega) & = & X_h^{k-1,-1}(\Omega) \\ s_h, z_h & \in & T_h(\Gamma) & = & X_h^{k,0}(\Gamma) \end{array}$$

Nous allons voir chaque étape des algorithmes en détail dans les sections qui suivent.

2.2.3 Résolution du sous-problème linéaire

L'approximation variationnelle des sous-problèmes (2.10), (2.14) et (2.18) prend la forme :

$$\Delta t \, \{(\boldsymbol{\nabla}\, w_h, \boldsymbol{\nabla}\, v_h)_{0,2;\Omega} + (\gamma\, w_h, \gamma\, v_h)_{0,2;\Gamma}\} = (\tau_h, \boldsymbol{\nabla} v_h)_{0,2;\Omega} + (\zeta_h, \gamma v_h)_{0,2;\Gamma} + (1, v_h)_{0,2;\Omega} \quad ,$$
$$\forall\, v_h \in X_h(\Omega)$$

Par exemple, pour Uzawa (étape (2.10)), $w_h = u_h^{n+1}$, $\tau_h = \Delta t \mathbf{d}_h^n - \boldsymbol{\sigma}_h^n$ et $\zeta_h = \Delta t \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} - s_h^n$.

Soit, une fois mis sous forme matricielle :

$$A.W = F$$

Pour résoudre ce système, nous avons mis en œuvre une factorisation LDL^T de A. La factorisation est effectuée une fois pour toute, avant les itérations de l'algorithme utilisé.

2.2.4 Résolution explicite des non-linéarités

Considérons la discrétisation des étapes (2.11), (2.13) et (2.16). Nous effectuons des calculs de la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_h(a) &:= \frac{1}{1+r} F_\Omega(\boldsymbol{\beta}_h)(a) \ \text{ avec } a \in \Sigma_{k-1}(K) \\ \zeta_h(a) &:= \frac{C_F}{C_F+r} F_\Gamma(b_h)(a) \ \text{ avec } a \in \Sigma_k(e) \end{aligned} \tag{2.20}$$

pour $K \in \mathcal{T}_h$ et pour une arrête e du maillage de Γ (les notations sont celles de la section 2.1) et avec $r \in \{0,\ \Delta t,\ \Delta t_1\}$.

En fait, la construction des algorithmes 2.2.1 et 2.2.2 fait en premier lieu apparaître aux étapes (2.11), (2.13) et (2.16) des inéquations variationnelles de la forme :

$$\begin{aligned} &(1+r)(\boldsymbol{\xi}, \overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})_{0,2;\Omega} + Bi\left\{|\boldsymbol{\xi}|_{0,1;\Omega} - |\overline{\boldsymbol{\xi}}|_{0,1;\Omega}\right\} \geq (\boldsymbol{\beta}, \overline{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})_{0,2;\Omega} \\ &(C_F + r)(\zeta, \overline{\zeta} - \zeta)_{0,2;\Gamma} + S\left\{|\zeta|_{0,1;\Gamma} - |\zeta|_{0,1;\Gamma}\right\} \geq (b, \overline{\zeta} - \zeta)_{0,2;\Gamma} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $\overline{\boldsymbol{\xi}} \in L^2(\Omega)^2$ et $\overline{\zeta} \in L^2(\Gamma)$. Ces inéquations se traduisent par les formules explicites (2.11), (2.13) et (2.16) pour notre problème continu 1.2.1 (c'est une application du lemme 1.2.1). De même, si nous construisons les algorithmes à partir du problème discret 2.1.1, nous devons d'abord écrire des inéquations variationnelles de la forme :

$$\begin{aligned} &(1+r)(\boldsymbol{\xi}_h, \overline{\boldsymbol{\xi}}_h - \boldsymbol{\xi}_h)_{0,2;\Omega} + Bi\left\{|\boldsymbol{\xi}_h|_{0,1;\Omega} - |\overline{\boldsymbol{\xi}}_h|_{0,1;\Omega}\right\} \geq (\boldsymbol{\beta}_h, \overline{\boldsymbol{\xi}}_h - \boldsymbol{\xi}_h)_{0,2;\Omega} \\ &(C_F + r)(\zeta_h, \overline{\zeta}_h - \zeta_h)_{0,2;\Gamma} + S\left\{|\zeta_h|_{0,1;\Gamma} - |\zeta_h|_{0,1;\Gamma}\right\} \geq (b_h, \overline{\zeta}_h - \zeta_h)_{0,2;\Gamma} \end{aligned} \tag{2.22}$$

où $\overline{\boldsymbol{\xi}}_h \in T_h(\Omega)$ et $\overline{\zeta}_h \in T_h(\Gamma)$.

Ainsi, notre démarche consiste à appliquer les algorithmes de lagrangien augmenté au problème discret 2.1.1, puis à remplacer les inéquations (2.22) par les formules (2.20) (ce qui donne alors un schéma différent). Ceci explique pourquoi nous avions introduit le problème variationnel approché 2.1.2, bien que nous n'ayons pas la preuve que les algorithmes en calculent une solution. Plus précisément, dans la section suivante, nous abordons les questions de convergence des algorithmes précédents.

2.2.5 Convergence et stabilité des algorithmes

La convergence de l'algorithme 2.2.1 est assurée par un théorème énoncé et démontré dans le livre de Glowinski et Le Tallec [37] (page 84-87) et aussi dans celui de Fortin et Glowinski [34].

THÉORÈME **2.2.1** *(Convergence de l'algorithme d'Uzawa - Glowinski et Le Tallec, page 85)*

L'algorithme 2.2.1 est convergent au sens suivant :

Il existe une solution $(u, \mathbf{d}, z, \boldsymbol{\sigma}, s)$ au problème continu 1.2.1 telle que :

- $u^n \longrightarrow u$ *dans* $H^1(\Omega)$,
- $\mathbf{d}^n \longrightarrow \mathbf{d}$ *dans* $L^2(\Omega)^2$,
- $z^n \longrightarrow z$ *dans* $L^2(\Gamma)$,
- $\boldsymbol{\sigma}^n \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}$ *dans* $L^2(\Omega)^2$*-faible,*
- $s^n \longrightarrow s$ *dans* $L^2(\Gamma)$*-faible.*

De même, nous pouvons en fait affirmer, suivant ces mêmes auteurs, la convergence de la suite $(u_h^n, \mathbf{d}_h^n, z_h^n, \boldsymbol{\sigma}_h^n, s_h^n)$ vers une solution $(u_h, \mathbf{d}_h, z_h, \boldsymbol{\sigma}_h, s_h)$ du problème discret 2.1.1, lorsque les inéquations (2.22) sont utilisées à la place des formules explicites.

Concernant la convergence du θ-schéma, une réponse récente est donnée dans l'article de Haubruge et al. [39]. L'algorithme 3.3 et la proposition 3.4 de cet article correspondent à la situation où on construit l'algorithme pour le problème discret (on n'utilise pas de formules explicites à la place des inéquations). Nous le traduisons ici avec nos notations.

THÉORÈME **2.2.2** *(Convergence du θ-schéma - Haubruge et al. [39], pages 666-668)*

Supposons que :

$$0 < \Delta t_2 \leq \Delta t_1 < 4$$

Alors, il existe $\boldsymbol{\sigma}_h \in T_h(\Omega)$, $\mathbf{d}_h \in T_h(\Omega)$, $z_h \in T_h(\Gamma)$ et $s_h \in T_h(\Gamma)$, tels que :

1. $\boldsymbol{\sigma}_h^n$ *converge vers* $\boldsymbol{\sigma}_h$,
2. $\mathbf{d}_h^n$ *converge vers* $\mathbf{d}_h$,
3. s_h^n *converge vers* s_h,
4. z_h^n *converge vers* z_h,
5. $\boldsymbol{\nabla} u_h^{n+\theta}$ *converge vers* $\mathbf{d}_h$,
6. $\mathbf{d}_h$ *et* $\boldsymbol{\sigma}_h$ *vérifient la loi de comportement discrète (2.1),*
7. z_h *et* s_h *vérifient la loi de glissement discrète (2.3),*
8. σ_h *et* $\mathbf{s}_h$ *vérifient la conservation de la quantité de mouvement discrète (2.5).*

Nous venons d'aborder l'aspect théorique de la convergence, voyons à présent l'aspect pratique. Considérons pour simplifier le cas de Uzawa. Donnons-nous une tolérance $\varepsilon > 0$ et le résidu :

$$R_n = |\mathbf{d}_h^n - \boldsymbol{\nabla} u_h^n|_{0,2;\Omega} + |z_h^n - \gamma\, u_h^n|_{0,2;\Gamma}$$

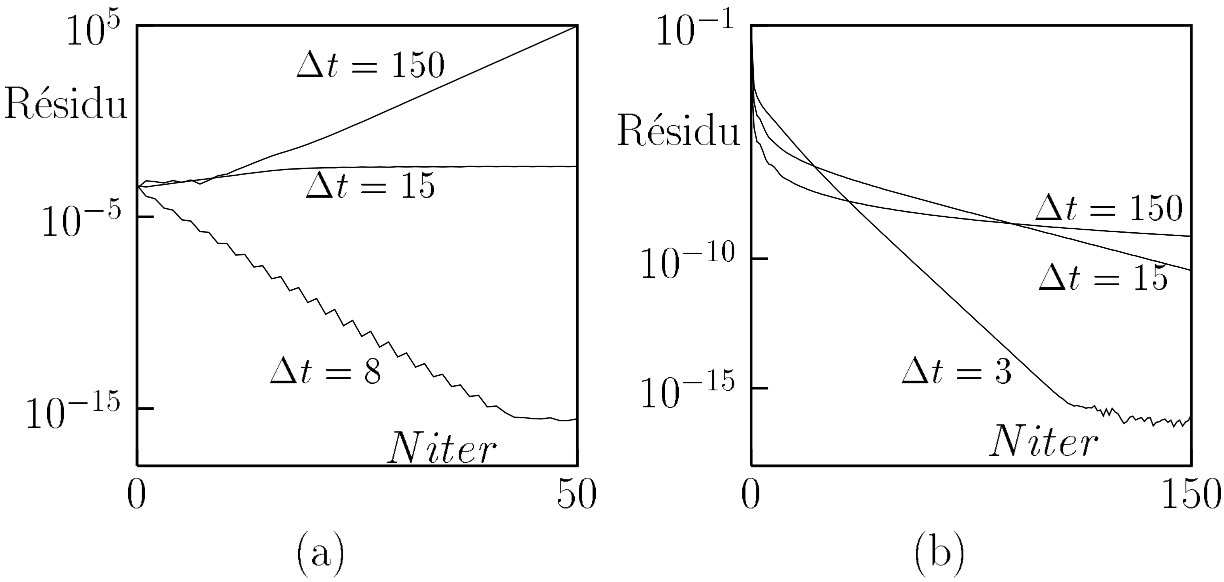


FIG. 2.1 – *(a) Résidu en fonction des itérations pour le θ-schéma avec $\theta = 0.1$: Convergence pour $\Delta t = 8$, divergence pour $\Delta t = 150$ et régime transitoire pour $\Delta t = 15$; (b) Résidu en fonction des itérations pour l'algorithme d'Uzawa et plusieurs valeurs de Δt illustrant le fait que l'algorithme est convergent quel que soit Δt.*

Nous considérons alors que la convergence a lieu lorsque :

$$R_n < \varepsilon \tag{2.23}$$

Afin de comparer les algorithmes 2.2.1 et 2.2.2, nous les avons testés pour une section Ω carrée et $X_h(\Omega) = X_h^{1,0}(\Omega)$.

Le théorème 2.2.2 indique que le θ-schéma est conditionnellement stable. Nous savons que la version que nous avons programmée est différente de celle considérée dans ce théorème et nous voulons savoir si ce phénomène de stabilité conditionnelle est toujours vrai. En testant cet algorithme, nous avons pu confirmer ce phénomène (voir figure Fig. 2.2.5). Ceci est la raison pour laquelle nous avons choisi de ne pas l'utiliser car de plus, la supériorité du θ-schéma sur Uzawa en terme de temps de calcul ne nous est pas apparue nettement. Notre choix se porte donc, pour toute la suite, sur l'algorithme d'Uzawa.

Pour conclure sur la convergence des algorithmes :

- nous savons que la version discrète de l'algorithme 2.2.1 dans laquelle on utilise les inéquations (2.22) converge vers une solution du problème discret 2.1.1,
- nous ne savons pas si la version discrète de l'algorithme 2.2.1 dans laquelle on utilise les formules (2.20) converge vers une solution du problème discret 2.1.2,

- cependant, dans les simulations numériques qui seront présentées au chapitre 4, nous avons pu observer une convergence vers 0 du résidu R_n,
- de plus, dans le cas de Poiseuille circulaire, nous allons voir au chapitre 3 des mesures d'erreur entre u et u_h^n qui montrent la convergence de l'algorithme vers une solution approchée dont la précision semble identique à celle de u_h.

2.3 Adaptation de maillage

Afin de capturer avec précision la frontière des zones rigides, mais aussi celles des zones d'adhérence, nous avons utilisé un logiciel générateur de maillage adapté, BAMG [40]. Ce générateur peut construire un maillage adapté anisotrope, sur une approche de type Delaunay (voir [30]), à partir d'un champ représentatif fourni par l'utilisateur. Nous présentons ici le principe de l'adaptation anisotrope employé par BAMG, puis notre procédé d'utilisation du générateur de maillage BAMG. Il existe des ouvrages entiers sur la génération et l'adaptation de maillage (voir par exemple le livre récent de Frey et George [27]) et nous limitons donc ici naturellement la description au strict minimum.

2.3.1 Principe

Supposons que le problème variationnel 2.1.2 soit résolu sur un maillage initial $\mathcal{T}_0$.

On se donne un champ φ que l'on estime représentatif d'un phénomène à préciser par l'adaptation de maillage. On appellera φ le champ-clef.

Supposons que φ est approché par $\varphi_h \in X_h^{1,0}(\Omega)$. L'erreur d'interpolation dans la direction $\mathbf{d} \in I\!R^2$ est estimée par :

$$e_{K,\mathbf{d}} = h_{K,\mathbf{d}}^2 \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{d}^2} \right| \text{ sur } K$$

où : $h_{K,\mathbf{d}}$ est la longueur de K dans la direction $\mathbf{d}$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{d}^2} = \mathbf{d}^T.H(\varphi).\mathbf{d}$$

et $H(\varphi)$ désigne le Hessien de φ :

$$H(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

suivant Vallet [66], une façon d'adapter le maillage au calcul de φ_h est de niveler l'erreur en la rendant constante, indépendamment des triangles et dans toutes les directions. Notons λ_1, λ_2 les valeurs propres de $H(\varphi)$ et $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ les vecteurs propres associés :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{d}_1^2} = \lambda_1 \text{ et } \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{d}_2^2} = \lambda_2$$

l'erreur $e_{K,\mathbf{d}}$ est indépendante de $\mathbf{d}$ et K lorsque $e_{K,\mathbf{d}_1} = e_{K,\mathbf{d}_2}$, c'est-à-dire quand :

$$h_{K,\mathbf{d}_1}^2 |\lambda_1| = h_{K,\mathbf{d}_2}^2 |\lambda_2| = e_0, \ \forall K \in \mathcal{T}_0$$

où $e_0 > 0$ est une constante indépendante de K.

Le Hessien $H(\varphi)$ étant connu sur K, on suppose que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

On se donne la constante e_0. On veut construire des triangles de longueur h_i dans la direction $\mathbf{d}_i$, avec $h_i = \sqrt{e_0/|\lambda_i|}$, $i = 1, 2$. Dans une métrique où les deux vecteurs $h_i\mathbf{d}_i$ $(i = 1, 2)$ ont la même norme, de tels triangles n'ont pas de direction privilégiée. Nous introduisons donc la métrique $M(\varphi)$ dont les vecteurs propres sont ceux de $H(\varphi)$ et les valeurs propres sont $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$. La norme induite $\|.\|_M$ satisfait alors :

$$\|h_i \mathbf{d}_i\|_M = h_K \sqrt{\mathbf{d}_i^T . M(\varphi) . \mathbf{d}_i} = \sqrt{e_0}, \quad k = 1, 2 \tag{2.24}$$

Dans notre utilisation du code BAMG, e_0 est imposé par l'intermédiaire d'un paramètre c_0 (voir pour les détails [41]) :

$$e_0 = 10^{-2} c_0^2 \,(\sup \varphi - \inf \varphi)$$

Compte tenu de la relation (2.24), nous pouvons considérer que c_0 pilote la taille des triangles. En fait c'est ainsi que c_0 est défini dans [41].

2.3.2 Un procédé de mise en œuvre

Nous utilisons le principe précédent dans un procédé itératif en trois étapes :

1. A partir d'un maillage $\mathcal{T}_i$, le problème 2.1.2 est résolu par l'algorithme 2.2.1 (Uzawa).
2. On détermine $\varphi_i \in X_h^{1,0}(\Omega)$ le champs-clef approché sur $\mathcal{T}_i$, à partir des champs calculés par l'algorithme d'Uzawa.
3. A partir de φ_i, le générateur de maillage anisotrope BAMG [11, 40] construit une approximation de la métrique $M(\varphi_i)$ dans $X_h^{1,0}(\Omega)$ et crée alors un nouveau maillage $\mathcal{T}_{i+1}$ de Ω (en tenant également compte de c_0).

On considère que le procédé a convergé lorsque le nombre d'éléments n'évolue plus.

Une méthode numérique de résolution de problèmes d'écoulements viscoplastiques doit permettre la détermination précise de la frontière des zones rigides. Il nous a donc semblé naturel que le champs-clef fasse en sorte de raffiner le maillage près de la frontière des zones rigides. L'analyse d'un cas mono-dimensionnel au chapitre I.2 a fait apparaître ce phénomène lorsque le critère suivant est utilisé :

$$\varphi(x) = \sqrt{\|\boldsymbol{\nabla} u\|^2 + Bi\|\boldsymbol{\nabla} u\|}(x)$$

Les chapitres suivants montreront que ce choix donne des résultats très satisfaisants.

Remarque **2.3.1** *Pour obtenir $\varphi_i \in X_h^{1,0}(\Omega)$, nous calculons d'abord le champ discontinu :*

$$\widetilde{\varphi}_i(a) = \sqrt{\|\boldsymbol{\nabla} u_h\|^2 + Bi\|\boldsymbol{\nabla} u_h\|}(a)$$

pour a un sommet de triangle si $u_h \in X_h^{2,0}(\Omega)$ et

$$\widetilde{\varphi}_i = \sqrt{\|\boldsymbol{\nabla} u_h\|^2 + Bi\|\boldsymbol{\nabla} u_h\|}$$

sur chaque triangle K de $\mathcal{T}_i$ si $u_h \in X_h^{1,0}(\Omega)$. Ensuite, nous projetons $\widetilde{\varphi}_i$ dans $L^2(\Omega)$ sur $X_h^{1,0}(\Omega)$.

Chapitre 3

Mesure et estimation d'erreur

3.1 Introduction

Les premiers résultats théoriques sur la convergence des méthodes d'éléments finis pour les matériaux de Bingham concernent l'écoulement de Poiseuille avec adhérence à la paroi. C'est un problème où le champs inconnu est la vitesse u. Comme nous l'avons vu au chapitre 1 (section 1.3), celle-ci vérifie alors l'inéquation variationnelle suivante :

$$(\nabla u, \nabla(v-u))_{0,2;\Omega} + Bi(|\nabla v|_{0,1;\Omega} - |\nabla u|_{0,1;\Omega}) \geq (1, v-u)_{0,2;\Omega} \quad , \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.1}$$

et la solution approchée u_h vérifie :

$$(\nabla u_h, \nabla(v_h-u_h))_{0,2;\Omega} + Bi(|\nabla v_h|_{0,1;\Omega} - |\nabla u_h|_{0,1;\Omega}) \geq (1, v_h-u_h)_{0,2;\Omega} \quad , \quad \forall v_h \in X_h(\Omega) \tag{3.2}$$

où $X_h(\Omega)$ est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie.

Un théorème de convergence forte été présenté par Glowinski, Lions et Trémolières [35] (théorème 5.1 page 109)[1]. Ce résultat s'appuie sur l'estimation suivante (page 110 de [35]) :

$$\|u-u_h\|_{1,2;\Omega}^2 \leq \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}\,\{c+Bi\}\,\|r_h u - u\|_{1,2;\Omega} + \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}\|r_h u - u\|_{0,2;\Omega} \tag{3.3}$$

où r_h vérifie :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|v - r_h v\|_{1,2;\Omega} = 0 \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Par exemple, r_h est un opérateur de projection ou bien d'interpolation. Dans ce cas, si l'on choisit $X_h(\Omega) = X_h^{1,0}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors en supposant que $u \in H^2(\Omega)$, nous avons

1. ce théorème a été initialement énoncé dans le cas plus général où le second membre $(1, v-u)$ est remplacé par $(f, v-u)$ avec $f \in L^2(\Omega)$.

$\|u - r_h u\|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h)$ et donc, l'estimation abstraite (3.3) permet de conclure que :

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{1/2})$$

Pour le même problème avec adhérence à la paroi, et toujours avec $X_h(\Omega) = X_h^{1,0}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Glowinski [33] propose une estimation plus fine dans le cas particulier de la section circulaire (cas présenté au chapitre 1 section 1.1). Cet auteur établit une estimation d'erreur, dans la norme H^1, en $\mathcal{O}\left(h\sqrt{|\ln(h)|}\right)$. Ceci est nettement meilleur que le $\mathcal{O}(h^{1/2})$ obtenu jusqu'alors à l'aide de (3.3). L'auteur introduit un ensemble que nous allons utiliser dans la suite. Il s'agit de Ω_ε défini par :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \|\boldsymbol{\nabla} u\| > \varepsilon\}$$

L'estimation est alors obtenue en utilisant le fait que, dans ce cas particulier, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} = \mathcal{O}(-\ln(\varepsilon))$$

De plus, sous l'hypothèse que cette propriété est satisfaite, l'auteur indique que cette estimation en $\mathcal{O}(h\sqrt{|\ln(h)|})$ est encore valable pour n'importe quelle section Ω. En outre, Glowinski [33] remarque, sur la base d'une expérimentation numérique, que :

- $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$,
- l'ensemble $\Omega_0 = \{x \in \Omega; \|\boldsymbol{\nabla} u\| = 0\}$ est un compact à frontière régulière.

Ces remarques nous servirons de points départ pour enrichir des hypothèses de régularité classiques.

Toujours pour ce problème avec adhérence à la paroi, mais en section quelconque, et avec $X_h(\Omega) = X_h^{1,0}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, une ultime amélioration est obtenue en 1977 par Falk et Mercier [24]. Glowinski *et al.* ont repris cette estimation dans l'annexe 5 de [36]. Les auteurs montrent une estimation en $\mathcal{O}(h)$, autrement dit, l'estimation est la même que dans le cas linéaire. Pour atteindre ce résultat, une formulation différente mais équivalente est utilisée, elle consiste à écrire le problème en terme de gradient de vitesse $\mathbf{d}$. Celui-ci est alors approché par l'élément P_0 (autrement dit $\mathbf{d}_h \in X_h^{0,-1}(\Omega)^2$). La non-linéarité apparaît alors dans l'estimation d'erreur sous la forme :

$$\frac{1}{2}|\mathbf{d} - \mathbf{d}_h|^2_{0,2;\Omega} \leq c\,h^2 + Bi\int_\Omega \|R_h(\mathbf{d})\|\mathrm{d}x - Bi\int_\Omega \|\mathbf{d}\|\mathrm{d}x$$

où R_h est l'opérateur de projection (au sens $L^2(\Omega)^2$) sur le sous-espace $X_h^{0,-1}(\Omega)^2$. Un calcul montre que la différence des deux termes non-linéaires est négative, ce qui «escamote» la non-linéarité dans l'estimation.

En fait, l'étude de la littérature concernant l'approximation du problème stationnaire révèle que :

- Il n'existe aucune estimation dans d'autres normes que H^1, en particulier une estimation dans la norme L^∞ est un outil utile lorsqu'on souhaite étudier une situation concrète d'écoulement.
- Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, l'erreur en norme H^1 pour l'approximation P_1 est en $\mathcal{O}(h)$ (quitte à reformuler le problème).

Ajoutons que lors de l'examen de la littérature, nous avons pu lire à plusieurs occasions une phrase qui a retenu notre attention. Il s'agit d'une remarque faite à l'origine dans le second volume de l'ouvrage de référence de Glowinski et al. [35], chapitre 5, paragraphe 3.5 «*Sur l'utilisation d'éléments finis d'ordre supérieur à 1*» :

> «*...compte tenu de la régularité assez peu élevée de la solution, l'intérêt d'utiliser, à nombre de degrés de liberté égal, des éléments finis d'ordre plus grand que 1, n'est pas clairement établi.*»

puis encore dans l'ouvrage de Glowinski [33], remarque 6.5, page 99 :

> *"In these notes, only an approximation by piecewise linear finite elements has been considered. This fact is justified by the existence of a regularity limitation for the solution." "The numerical results which have been obtained, seem to prove that for the same number of degrees of freedom the accuracies at the nodes are of the same order for the finite elements of order 1 and 2."*

Plus tard, Kim [48], reprend cette argument dans un travail sur un problème évolutif, page 295 :

> *"The use of piecewise linear finite elements is attributed to the limitation on the regularity of solutions. The lack of regularity inhibits the use of high-order finite elements, particularly when error estimates are sought."*

Examinons un instant les faits. Tout d'abord, 1976, pour Glowinski, Lions et Trémolières, le problème reste assez ouvert. En 1980, Glowinski est également prudent et n'affirme rien de définitif ("*seem to prove*"). En effet, à notre connaissance, il n'existe à cette date aucune preuve nette que le choix P_2 ne peut jamais donner plus de précision que le choix P_1. De plus, il est tout-à-fait nécessaire de préciser que pour chacune de ces remarques, le contexte des maillages uniformes est sous-entendu.

Quelques problèmes ouverts sont donc :

1. Analyser en détail des cas très simples qui permettent de discuter sur la pertinence de généraliser à des maillages non-uniformes la remarque de Glowinski et al.

2. Étendre les travaux de Glowinski [33], c'est-à-dire exploiter la conjecture suivante :
$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} = \mathcal{O}(-\ln(\varepsilon))$$
3. Étendre, dans la mesure du possible, les travaux de Falk et Mercier [24] au cas plus général d'une approximation de $\mathbf{u}$ qui n'est pas nécessairement P_1.
4. Donner des estimations en norme L^∞ pour la vitesse et, en vue d'un contrôle précis des frontières rigide/fluide, il est important de pouvoir estimer la convergence de $\boldsymbol{\nabla} u_h$ vers $\boldsymbol{\nabla} u$ en norme L^∞.
5. Compte tenu de l'aspect pratique de la formulation 2.1.2 avec formule explicite, il est également souhaitable de reprendre l'ensemble de ces points pour une telle formulation. En particulier, nous avons vu que cette simplification d'ordre pratique impose la formule de quadrature des trapèzes. Il est donc important de connaître le rôle d'une formule de quadrature donnée, autrement dit de connaître les limitations de cette simplification pratique.
6. Étendre l'ensemble des considérations précédentes au cas où il y a aussi glissement à la paroi (suivant la loi introduite)

Vue l'étendue d'un tel travail, nous nous restreignons essentiellement à l'approximation du problème de Poiseuille, avec adhérence à la paroi, décrite par (3.1) et (3.2) et nous aborderons le point 2. Notons que le point 1. a été abordé en guise d'introduction et de motivation pour la présente analyse, dans la partie I. Nous effectuerons également une première approche concernant la loi de glissement (point 6.), toujours dans le cadre du point 2.

Nous développerons, dans les deux sections qui suivent, un travail soumis et accepté pour publication [58].
Nous établirons une estimation abstraite de l'erreur sur la vitesse, en norme H^1, sur la base des travaux de Glowinski [33]. Nous validerons quelques hypothèses de régularité avec le cas d'un domaine circulaire où la solution est connue explicitement mais aussi avec les écoulements de Couette. Nous appliquerons ensuite notre estimation abstraite au cas de l'élément P_k, où k pourra être pris plus grand que 1. Les estimations ainsi obtenues montreront l'utilité d'adapter le maillage pour $k > 1$.
Nous poursuivrons en traitant le cas des domaines non-polygonaux et réguliers par la technique isoparamétrique. Ceci permettra d'établir une estimation d'erreur concrète sur un exemple particulier.

Nous tenterons d'ajouter le glissement à seuil dans le problème, ce qui nous amènera à compléter notre estimation abstraite, puis à discuter des hypothèses de régularité, ainsi que des estimations concrètes qui en découlent.

Enfin, nous terminerons par les résultats de tests numériques qui viendront confirmer que :

Avec un maillage convenable, pour un même nombre de degrés de liberté, l'ap-

proximation P_2 peut offrir une précision nettement supérieure à l'approximation P_1.

3.2 Estimations H^1 pour le modèle de Bingham

Nous nous restreignons ici au cas d'un ouvert Ω polygonal. Nous établissons, dans ce contexte, une estimation abstraite de l'erreur en norme H^1 pour le problème (3.1) approché par (3.2). Ensuite, nous appliquons cette estimation à l'approximation P_k-continue de u, pour des maillages réguliers, quasi-uniformes ou non.

3.2.1 Une estimation abstraite

Observons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE **3.2.1** *(Glowinski, [33])*

Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} = \mathcal{O}(-\ln(\varepsilon))$$

avec :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \|\boldsymbol{\nabla} u\| > \varepsilon\}$$

Glowinski [33] indique que sous cette hypothèse, on peut démontrer que la convergence de la solution de l'écoulement de Poiseuille, avec adhérence à la paroi, pour des sections plus générales que le disque, est en $\mathcal{O}(h\sqrt{|\ln(h)|})$ pour une approximation P_1 de la vitesse. Il en laisse la démonstration au lecteur. Nous allons adapter cette démonstration en l'étendant dans un premier temps, sous une forme abstraite qui ne fixe pas un choix d'éléments finis particuliers. Dans un deuxième temps (dans les sections suivantes), nous envisagerons une application aux éléments P_k, $k \geq 1$ sur différents types de maillages.

Commençons par poser quelques notations, définitions et hypothèses qui seront d'un usage constant dans la suite.

L'hypothèse 3.2.1 induit l'utilisation des deux ensembles :

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; \|\boldsymbol{\nabla} u\| = 0\}$$

$$\Omega_{0,\varepsilon} = \Omega \backslash \{\Omega_0 \cup \Omega_\varepsilon\} = \{x \in \Omega; \varepsilon \geq \|\boldsymbol{\nabla} u\| > 0\}$$

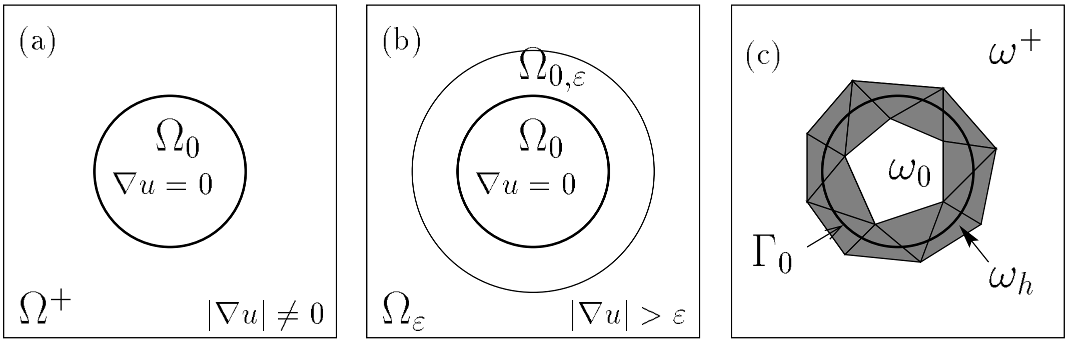


FIG. 3.1 – *Les différentes partitions de Ω utilisées pour établir une estimation d'erreur dans le problème de Poiseuille sans glissement.*

Par commodité on appellera Ω^+ le complémentaire de Ω_0.

Nous considérons dans ce chapitre des maillages réguliers, que nous définissons en accord avec la littérature sur les éléments finis (par exemple [21]).

DÉFINITION **3.2.1**

1. *Une triangulation $\mathcal{T}_h$ est dite régulière, si le rapport $\frac{h_K}{\rho_K}$ est majoré indépendamment de $K \in \mathcal{T}_h$ par une constante strictement positive.*
2. *Une triangulation régulière est dite uniformément régulière (ou quasi-uniforme) si le rapport h_K/h est minoré indépendamment de $K \in \mathcal{T}_h$ par une constante strictement positive.*

On pourra parler de maillage régulier pour désigner une triangulation régulière, de même, il nous arrivera de parler de maillages quasi-uniformes.

Nous définissons maintenant l'interface Γ_0 entre les zones rigides et les zones déformées. Il ne s'agit pas de $\partial\Omega_0$ car les zones rigides peuvent toucher Γ (zones mortes). Nous posons donc : $\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \backslash \Gamma$.

A l'aide de Γ_0, nous pouvons définir $\omega_h \subset \Omega$ comme étant la réunion des éléments qui rencontrent Γ_0 :

$$\omega_h = \bigcup \{K \; ; \; K \in \mathcal{T}_{h_0}(\omega_h)\}$$

où :

$$\mathcal{T}_{h_0}(\omega_h) = \{K \in \mathcal{T}_h \; ; \; K \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset\}$$

On définit ensuite $\omega_0 = \Omega_0 \backslash \omega_h$ et $\omega^+ = \Omega^+ \backslash \omega_h$.

Nous pouvons maintenant énoncer une estimation abstraite de l'erreur :

PROPOSITION **3.2.1** *Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ la solution du problème variationnel (3.1), et $u_h \in X_h(\Omega)$ la vitesse approchée solution de (3.2). Alors :*

$$|u-u_h|^2_{1,2;\Omega} \leq c\{ \begin{array}{ll} & |v_h-u|^2_{1,2;\Omega} \\ + & Bi|v_h|_{1,1;\omega_0} \\ + & Bi\,\mathrm{mes}(\omega_h)\,|v_h-u|_{1,\infty;\omega_h} \\ + & Bi\,\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\,|v_h-u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} \\ + & \dfrac{Bi}{\varepsilon}|v_h-u|^2_{1,2;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \quad \} \end{array} \tag{3.4}$$

Si, de plus, l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite, on a l'estimation :

$$|u-u_h|^2_{1,2;\Omega} \leq c\{ \begin{array}{ll} & |v_h-u|^2_{1,2;\Omega} \\ + & Bi|v_h|_{1,1;\omega_0} \\ + & Bi\,\mathrm{mes}(\omega_h)\,|v_h-u|_{1,\infty;\omega_h} \\ + & Bi\,\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\,|v_h-u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} \\ + & Bi\,|\ln(\varepsilon)||v_h-u|^2_{1,\infty;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \quad \} \end{array} \tag{3.5}$$

où c est une constante indépendante de Bi et h.

PREUVE :

On obtient comme dans [33] (page 104, (6.59)) la majoration suivante :

$$\begin{array}{l} (u_h-u,u_h-u)_{1,2;\Omega} \leq (u_h-u,v_h-u)_{1,2;\Omega} + Bi(\lambda_h-\lambda,\boldsymbol{\nabla}(v_h-u))\,, \\ \forall v_h \in X_h(\Omega) \ \text{ et } \ \forall \lambda_h \in \Lambda \text{ tel que } \lambda_h.\boldsymbol{\nabla} v_h = \|\boldsymbol{\nabla} v_h\| \end{array} \tag{3.6}$$

où on rappelle que $\Lambda = \{\tau \in L^2(\Omega)^2 \,;\, \|\tau\| \leq 1 \quad \text{p.p. } \Omega\}$ et que $\lambda \in \Lambda$ vérifie : $\lambda.\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\|$ ainsi que :

$$(u,v)_{1,2;\Omega} + Bi(\lambda,\boldsymbol{\nabla} v) = (1,v) \ \ , \ \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Les inégalités de Cauchy-Schwartz puis de Young donnent :

$$(u_h-u,v_h-u)_{1,2;\Omega} \leq \frac{1}{2}|u_h-u|^2_{1,2;\Omega} + \frac{1}{2}|v_h-u|^2_{1,2;\Omega} \tag{3.7}$$

De sorte que l'inégalité (3.6) devient :

$$\begin{array}{l} |u_h-u|^2_{1,2;\Omega} \leq |v_h-u|^2_{1,2;\Omega} + 2Bi(\lambda_h-\lambda,\boldsymbol{\nabla}(v_h-u))\,, \\ \forall v_h \in X_h(\Omega) \ \text{ et } \ \forall \lambda_h \in \Lambda \text{ tel que } \lambda_h.\boldsymbol{\nabla} v_h = \|\boldsymbol{\nabla} v_h\| \end{array} \tag{3.8}$$

Décomposons le second terme du membre de droite dans (3.8) en écrivant $\overline{\Omega} = \overline{\omega_0 \cup \omega_h \cup \omega^+}$. Cela donne trois termes à estimer :

- On sait (par définition) que sur ω_0, on a $\boldsymbol{\nabla} u = 0$ et de plus, $\|\lambda\| \leq 1$ et $\|\lambda_h\| \leq 1$. On en déduit alors :

$$\int_{\omega_0} (\lambda_h-\lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h-u)\,\mathrm{d}x \leq 2\,|v_h|_{1,1;\omega_0}$$

- Considérons ensuite la fine couche ω_h. Nous utilisons encore le fait que $\|\lambda\| \leq 1$ et $\|\lambda_h\| \leq 1$. Cela donne :

$$\int_{\omega_h} (\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\,\mathrm{d}x \leq 2\,\mathrm{mes}(\omega_h)|v_h - u|_{1,\infty;\omega_h}$$

- Enfin, sur la zone ω^+, nous utilisons à nouveau une partition de Ω en écrivant $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_0 \cup \Omega_{0,\varepsilon} \cup \Omega_\varepsilon}$. Puisque $\omega^+ \cap \Omega_0 = \emptyset$, la somme sur ω^+ se décompose en deux termes, l'un sur $\Omega_{0,\varepsilon} \cap \omega^+$, l'autre sur $\Omega_\varepsilon \cap \omega^+$.
  - •• Dans $\Omega_{0,\varepsilon} \cap \omega^+$, nous reprenons la même idée que dans ω_h :

$$\begin{aligned}\int_{\omega^+ \cap \Omega_{0,\varepsilon}} (\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\,\mathrm{d}x &\leq 2\,\mathrm{mes}(\omega^+ \cap \Omega_{0,\varepsilon})\,|v_h - u|_{1,\infty;\omega^+ \cap \Omega_{0,\varepsilon}} \\ &\leq 2\,\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\,|v_h - u|_{1,\infty;\omega^+ \cap \Omega_{0,\varepsilon}}\end{aligned}$$

  - •• Dans $\Omega_\varepsilon \cap \omega^+$, nous pouvons expliciter le multiplicateur λ pour presque tout $x \in \omega^+$:

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\nabla} u}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}$$

    et on utilise également le fait que le multiplicateur λ_h peut être choisi comme suit :

$$\lambda_h = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\nabla} v_h}{\|\boldsymbol{\nabla} v_h\|} & \text{si} \qquad \boldsymbol{\nabla} v_h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $\boldsymbol{\nabla} v_h = 0$, nous écrivons :

$$(\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u) = \lambda.\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\| = \frac{\|\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\|^2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}$$

tandis que si $\boldsymbol{\nabla} v_h \neq 0$, nous utilisons un lemme donné dans [33] :

LEMME **3.2.1** *Pour tout* $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$, *on a :*

$$\left|\frac{\tau}{\|\tau\|} - \frac{\xi}{\|\xi\|}\right| \leq 2\frac{\|\tau - \xi\|}{\|\tau\| + \|\xi\|}$$

cela permet d'obtenir un résultat semblable :

$$\begin{aligned}(\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u) &\leq \left|\frac{\boldsymbol{\nabla} v_h}{\|\boldsymbol{\nabla} v_h\|} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\right| \|\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\|\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\frac{\|\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\|^2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\| + \|\boldsymbol{\nabla} v_h\|} \\ &\leq 2\frac{\|\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\|^2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\end{aligned}$$

On est donc amené à la relation :

$$\int_{\omega^+\cap\Omega_\varepsilon} (\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\,\mathrm{d}x \quad \leq 2\int_{\omega^+\cap\Omega_\varepsilon} \frac{\|\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\|^2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\mathrm{d}x$$

si l'hypothèse 3.2.1 est vraie, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\omega^+\cap\Omega_\varepsilon} (\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\,\mathrm{d}x \quad &\leq 2\,|u - v_h|^2_{1,\infty;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\int_{\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\\ &\leq 2\,|u - v_h|^2_{1,\infty;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\\ &\leq 2\,|\ln(\varepsilon)|\,|u - v_h|^2_{1,\infty;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\end{aligned}$$

sinon, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\omega^+\cap\Omega_\varepsilon} (\lambda_h - \lambda).\boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\,\mathrm{d}x \quad &\leq \left|\frac{2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\right|_{0,\infty;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon} |v_h - u|^2_{1,2;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\\ &\leq \left|\frac{2}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|}\right|_{0,\infty;\Omega_\varepsilon} |v_h - u|^2_{1,2;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\\ &\leq \frac{2}{\varepsilon}|v_h - u|^2_{1,2;\omega^+\cap\Omega_\varepsilon}\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant ces différents termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\lambda_h - \lambda, \boldsymbol{\nabla}(v_h - u)) \quad &\leq \quad 2\,|v_h|_{1,1;\omega_0} + 2\,\mathrm{mes}(\omega_h)\,|v_h - u|_{1,\infty;\omega_h} + 2\,\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\,|v_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+}\\ &\quad + \left\{\begin{array}{ll} 2\,|\ln(\varepsilon)|\,|v_h - u|^2_{1,\infty;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} & \text{sous l'hypothèse 3.2.1}\\ \frac{2}{\varepsilon}|v_h - u|^2_{1,2;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} & \text{sinon}\end{array}\right.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pour conclure, il suffit de combiner (3.7) avec l'estimation (3.9) et de reporter dans (3.8).

CQFD. □

On constate que cet énoncé nécessite pour être exploitable, de faire des hypothèses supplémentaires au sujet de u. En effet, nous devons en particulier pouvoir évaluer ou, à défaut, estimer la quantité $\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})$. C'est en partie le rôle de la section suivante.

3.2.2 Un exemple concret

Nous allons observer dans cette section ce que valent les diverses quantités impliquant ε dans le cas particulier d'un domaine circulaire. Ceci nous permettra par la suite de faire des hypothèses qui rendront concrètes les estimations de la proposition 3.2.1. Indiquons que nous revenons un peu plus en détails, dans l'annexe A, sur les résultats qui sont présentés ici.

Tout d'abord, nous avons déjà signalé que Glowinski [33] a montré, pour l'écoulement de Poiseuille avec section circulaire ($\Omega = D(0,R)$, $R > 0$), que l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite, ce qui est formulé par le :

LEMME **3.2.2** *(Glowinski, [33], page 105)*

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille avec section circulaire, on a l'identité :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} = 2\pi(1 - 2Bi - 2\varepsilon) + 4\pi Bi\,(\ln(1-2Bi) - \ln(2\varepsilon))$$

De plus, dans la section précédente, nous avons également fait intervenir la mesure de l'ensemble $\Omega_{0,\varepsilon}$. Cette quantité peut être elle aussi rendue explicite dans le cas d'un domaine circulaire :

LEMME **3.2.3**
Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille avec section circulaire, on a l'identité :

$$\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = 4\pi\varepsilon(2\,Bi + \varepsilon)$$

Enfin, dans la suite, nous ferons référence au fait que :

$$u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{k+1,\infty}(\Omega^+)\ ,\ \forall\, k \geq 0$$

Nous verrons dans la partie III, chapitre 3, que ces résultats sont encore vrais pour les écoulements dits de Couette.

3.2.3 Application à des maillages réguliers

Nous allons à présent détailler les estimations générales (3.4)-(3.5) dans le contexte concret suivant :

- nous nous plaçons dans les cas où les propriétés décrites dans la section précédente sont vraies,
- nous considérons le choix fixé en section 2.1, soit $X_h(\Omega) = X_h^{k,0}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour $k \geq 1$.

Nous allons utiliser un outil classique dont nous rappelons quelques propriétés utiles.

THÉORÈME **3.2.1** *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$. Pour un réel $p > 1$, l'opérateur d'interpolation $\Pi_h \in \mathcal{L}(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega); X_h^{k,0}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))$ défini, sur chaque élément K par :*

$$\Pi_h(v)_{|K} \in P_k(K) \ \ et\ \ \Pi_h(v)(x) = v(x)\,, \forall x \in \Sigma_k(K)$$

satisfait les estimations suivantes, pour tout entier m *et tout réel* s *avec* $0 \leq m \leq s+1$ *et* $1 \leq s \leq k$ *:*

$$|v - \Pi_h(v)|_{m,p;\Omega} \leq c_1\, h^{s+1-m} |v|_{s+1,p;\Omega} \quad , \quad \forall v \in W^{s+1,p}(\Omega)$$

où la constante $c > 0$ *ne dépend pas de* $\operatorname{mes}(\Omega)$.

On peut trouver ces résultats et leur démonstration dans le livre de Brenner et Scott [13].

Pour rendre concrètes les estimations (3.4) et (3.5), nous allons utiliser plus particulièrement :

$$|v - \Pi_h(v)|_{1,2;\Omega} \leq c\, h^s |v|_{s+1,2;\Omega} \quad , \quad \forall v \in H^{s+1}(\Omega)$$

$$|v - \Pi_h(v)|_{1,\infty;\Omega} \leq c_2\, h^s |v|_{s+1,\infty;\Omega} \quad , \quad \forall v \in W^{s+1,\infty}(\Omega)$$

Dans toute la suite, nous utiliserons une hypothèse supplémentaire sur le maillage :

HYPOTHÈSE **3.2.2** *Les deux conditions suivantes ont lieu :*

(i) Le sous-maillage $\mathcal{T}_{h_0}(\omega_h)$ *est quasi-uniforme,*
(ii) Γ_0 *est régulière,*

de sorte qu'il existe une constante $c(\Gamma_0)$ *telle que :*

$$\operatorname{mes}(\omega_h) \leq c(\Gamma_0) h_0 \tag{3.10}$$

Par «régulière» nous entendons suffisamment régulière pour que l'existence de la relation (3.10) soit possible. Par exemple, dans le cas de Poiseuille circulaire, la frontière est un cercle, on peut donc considérer que ω_h est contenu dans une couronne de rayons $(Bi - h_0)$ et $(Bi + h_0)$, soit $\operatorname{mes}(\omega_h) \leq 4\pi Bi\, h_0$ (c'est un exemple qui fixe les idées bien que Ω n'y soit pas polygonal).

THÉORÈME **3.2.2** *Soit* $k \geq 1$ *dans la définition de* $X_h(\Omega)$*. On suppose le maillage régulier et que l'hypothèse 3.2.2 a lieu. On suppose que* $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$ *et que* $\operatorname{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$*. Alors :*

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,2;\Omega} &\leq c\, h^s |u|_{s+1,2;\Omega^+} + c\, h^{3s/4} \left(Bi|u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + Bi|u|^2_{s+1,2;\Omega^+} \right)^{1/2} \\ &+ c\, h_0 \left(h_0 |u|^2_{2,\infty;\Omega} + Bi|u|_{2,\infty;\Omega} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et, de plus, sous l'hypothèse 3.2.1, on a :

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,2;\Omega} &\leq c h^s \left(|u|_{s+1,2;\Omega^+} + Bi\, |u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + Bi\, s\, |\ln(h)|\, |u|^2_{s+1,\infty;\Omega^+} \right)^{1/2} \\ &+ c\, h_0 \left(h_0\, |u|^2_{2,\infty;\Omega} + Bi\, |u|_{2,\infty;\Omega} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

autrement dit :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}\left(\max\{\varphi(h), h_0\}\right)$$

avec :

$$\varphi(h) = \begin{cases} h^s\sqrt{|\ln(h)|} & \textit{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ h^{3s/4} & \textit{sinon} \end{cases}$$

PREUVE :

Avant toute chose, constatons qu'en choisissant $v_h = \Pi_h(u)$ nous avons $\boldsymbol{\nabla} v_h = 0$ dans ω_0. Ceci a deux conséquences qui simplifient les relations (3.4) et (3.5). D'une part $|v_h|_{1,1;\omega_0} = 0$ et, d'autre part :

$$|u - v_h|^2_{1,2;\Omega} = |u - v_h|^2_{1,2;\omega^+} + |u - v_h|^2_{1,2;\omega_h}$$

en effet, on a $|u - v_h|_{1,2;\omega_0} = |\boldsymbol{\nabla} u - \boldsymbol{\nabla} v_h|_{0,2;\omega_0} = 0$.

Dans la suite, nous faisons donc ce choix $v_h = \Pi_h(u)$.

Les constantes positives seront systématiquement désignées par la lettre c.

A présent, nous allons estimer plusieurs groupes de termes.

- Commençons par un terme qui ne pose pas de difficulté particulière :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\omega^+} \leq c\, h^s |u|_{s+1,2;\omega^+} \leq c\, h^s |u|_{s+1,2;\Omega^+}$$

- Poursuivons avec les termes qui dépendent de ε. Posons à cet effet :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon, h, u)^2 &= \operatorname{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} \\ &+ \begin{cases} |\ln(\varepsilon)||u - \Pi_h(u)|^2_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} & \text{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ (1/\varepsilon)|u - \Pi_h(u)|^2_{1,2;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés de Π_h, nous savons que :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\omega^+} \leq c\; h^s |u|_{s+1,\infty;\omega^+} \leq c\; h^s |u|_{s+1,\infty;\Omega^+}$$

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\omega^+} \leq c\; h^s |u|_{s+1,2;\omega^+} \leq c\; h^s |u|_{s+1,2;\Omega^+}$$

Choisissons ensuite $\varepsilon = h^\delta$, où δ est un réel que nous allons déterminer de manière à rendre $E(\varepsilon, h, u)$ le plus précis possible. Considérons d'abord le cas où l'hypothèse 3.2.1 n'a pas lieu. Nous avons, compte tenu de l'hypothèse $\operatorname{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$E(\varepsilon, h, u)^2 \leq c\, h^{\delta+s} |u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + c\, h^{2s-\delta} |u|^2_{s+1,2;\Omega^+}$$

il convient donc de choisir δ tel que $\delta + k = 2s - \delta$, c'est-à-dire : $\delta = s/2$, d'où :

$$E(\varepsilon, h, u) \leq c\, h^{3s/4} \left(|u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + |u|^2_{s+1,2;\Omega^+}\right)^{1/2} = \mathcal{O}(h^{3s/4})$$

dans le cas où 3.2.1 a lieu, on a :

$$E(\varepsilon, h, u)^2 \leq c\, h^{\delta+s}|u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + c\,\delta\, h^{2s}|\ln(h)|\,|u|^2_{s+1,\infty;\Omega^+}$$

on choisit donc $\delta = k$, ce qui donne :

$$E(\varepsilon, h, u) \leq c\, h^s \left(|u|_{s+1,\infty;\Omega^+} + s\,|\ln(h)|\,|u|^2_{s+1,\infty;\Omega^+}\right) = \mathcal{O}\left(h^s\sqrt{|\ln(h)|}\right)$$

- Considérons à présent les termes liés à ω_h et posons :

$$B(h_0, u)^2 = |u - \Pi_h(u)|^2_{1,2;\omega_h} + Bi\,\mathrm{mes}(\omega_h)\,|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\omega_h}$$

Sachant que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$, on a :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\omega_h} \leq c\, h_0\, |u|_{2,2;\omega_h} \leq c\, h_0\, \mathrm{mes}(\omega_h)^{1/2}|u|_{2,\infty;\omega_h} \leq c\, h_0\, \mathrm{mes}(\omega_h)^{1/2}|u|_{2,\infty;\Omega}$$

ici, il est important de remarquer que la constante c ne dépend pas de $\mathrm{mes}(\omega_h)$. Enfin, nous pouvons préciser la dépendance de $\mathrm{mes}(\omega_h)$ en h_0 en utilisant l'hypothèse 3.2.2, donc, l'erreur d'interpolation sur ω_h peut être estimée par :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\omega_h} \leq c\, h_0^{3/2}|u|_{2,\infty;\Omega}$$

et d'autre part :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\omega_h} \leq c\, h_0 |u|_{2,\infty;\omega_h} \leq c\, h_0 |u|_{2,\infty;\Omega}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$B(h_0, u) \leq c\, h_0 \left(h_0 |u|^2_{2,\infty;\Omega} + |u|_{2,\infty;\Omega}\right)^{1/2} = \mathcal{O}(h_0)$$

En sommant les différents termes ainsi estimés, on obtient le résultat annoncé.

CQFD. □

REMARQUE **3.2.1** *Rappelons, pour comparaison, ce que donne, dans les mêmes conditions de régularité, l'estimation abstraite (3.3).*

THÉORÈME ***3.2.3*** *(Application de (3.3) aux maillages réguliers)*

Soit $k \geq 1$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose le maillage régulier avec l'hypothèse 3.2.2. On suppose que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{s+1}(\Omega^+)$. Alors :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}\left(\max\left\{h_0^{3/4}, h^{s/2}\right\}\right)$$

Preuve :

Dans l'estimation (3.3), on peut prendre à nouveau $r_h(u) = \Pi_h(u)$. On désignera encore toutes les constantes par la lettre c. Vu les propriétés de Π_h, on peut écrire :

$$|u - \Pi_h(u)|^2_{1,2;\Omega} = |u - \Pi_h(u)|^2_{1,2;\omega_h} + |u - \Pi_h(u)|^2_{1,2;\omega^+}$$

Nous avons déjà estimé chacun des termes du membre de droite et cela permet d'écrire :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega} \leq c\left(h_0^3 |u|^2_{2,\infty;\Omega} + h^{2s}|u|^2_{s+1,2;\Omega^+}\right)^{1/2}$$

Par ailleurs, on a toujours :

$$|u - \Pi_h(u)|_{0,2;\Omega} \leq c(\Omega)|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega}$$

d'où le résultat annoncé en injectant l'estimation de $|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega}$ dans (3.3).

CQFD. $\square$

On peut immédiatement appliquer le théorème 3.2.2 au cas d'un maillage quasi-uniforme où $h_0 = h$. Cela donne :

Corollaire **3.2.1** *Soit $k \geq 1$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$, $\forall\ s \in [1;k]$ et que $\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. On suppose de plus que le maillage est quasi-uniforme avec l'hypothèse 3.2.2. Alors :*

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} \leq c(\Omega, u) \times \begin{cases} h^{3/4} & si \quad k = 1 \\ \max\{h, h^{3s/4}\} & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

En particulier, si $s \geq 4/3$, on a, pour $k \geq 2$:

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} \leq c(\Omega, u)\, h$$

Si, de plus, l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite, alors :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} \leq c(\Omega, u) \times \begin{cases} h\sqrt{|\ln(h)|} & si \quad k = 1 \\ \max\left\{h, h^s\sqrt{|\ln(h)|}\right\} & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

En particulier, si $s > 1$ et que h est assez petit, on a sous l'hypothèse 3.2.1 et pour $k \geq 2$:

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} \leq c(\Omega, u)\, h$$

Remarque **3.2.2** *Comparons à nouveau dans le corollaire suivant avec ce que donne l'estimation (3.3) pour un maillage quasi-uniforme, en prenant $h = h_0$ dans le théorème 3.2.3.*

COROLLAIRE ***3.2.2*** *(Application de (3.3) aux maillages quasi-uniformes)*

Soit $k \geq 1$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{s+1}(\Omega^+)$, $\forall$ $s \in [1;k]$. On suppose de plus que le maillage est quasi-uniforme avec l'hypothèse 3.2.2. Alors :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{1/2}) & si \quad k = 1 \\ \mathcal{O}(\max\{h^{3/4}, h^{s/2}\}) & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

En particulier, si $s \geq 3/2$ alors on a, pour $k \geq 2$:

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{3/4})$$

Pour des maillages quasi-uniformes, nous pouvons faire quelques comparaisons entre notre estimation et la relation (3.3).

- Notre estimation abstraite donne de meilleurs résultats que (3.3), même lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse 3.2.1.
- L'hypothèse 3.2.1 n'améliore nos résultats que pour $k = 1$, on retrouve alors le résultat «quasi-optimal» de Glowinski [33], ce à quoi on pouvait s'attendre puisque nous avons généralisé sa méthode.
- Dans tous les cas, nous ne pouvons pas obtenir d'estimation d'erreur plus précise que $\mathcal{O}(h)$ en prenant $k \geq 2$ et le gain obtenu en prenant des éléments P_2 au lieu de P_1 apparaît comme étant faible.
- Si on fait l'hypothèse 3.2.1, on ne gagne presque rien à utiliser l'approximation P_2, ceci rejoint donc les remarques faites dans la littérature.

Dans toute cette partie, nous avons fait l'hypothèse de régularité $u \in W^{k+1,\infty}(\Omega^+)$ (qui, nous l'avons vu, est vraisemblable) qui nous a permis d'obtenir des estimations meilleurs en P_2 qu'en P_1.
Voyons ce que nous apporte cette hypothèse de régularité locale, lorsque $k = 2$. Pour cela, nous allons la remplacer par une hypothèse de régularité globale (ce qui est plus fréquent dans les estimations d'erreur). Supposons donc que $u \in H^{5/2-\alpha}(\Omega)$, $\forall \alpha > 0$. Cette hypothèse est loisible car elle a lieu, par exemple, pour Poiseuille circulaire (voir annexe A).
Remarquons d'abord que les estimations P_2 du corollaire 3.2.2 peuvent encore «presque» s'obtenir. En effet, cela revient à prendre $s = 5/2 - \alpha$ dans le théorème 3.2.3, ce qui donne :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(\max\{h_0^{3/4}, h^{3/4-\alpha}\}) \quad , \quad \forall \alpha > 0$$

et donc, dans le cas quasi-uniforme :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{3/4-\alpha}) \quad , \quad \forall \alpha > 0$$

En fait, il en va de même lorsqu'on fait la même hypothèse globale ainsi que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et qu'on utilise notre estimation abstraite (de la proposition 3.2.1). En effet, reprenons la démonstration du théorème 3.2.2 en utilisant :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,2;\omega^+} \leq c(\alpha)\, h^{3/2-\alpha} |u|_{5/2-\alpha,2;\Omega}$$

ainsi que :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\omega^+} \leq c\, h\, |u|_{2,\infty;\Omega}$$

et :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\omega_h} \leq c\, h_0\, |u|_{2,\infty;\Omega}$$

Donc, si l'hypothèse 3.2.1 n'a pas lieu :

$$E(h,\varepsilon,u) \leq c\, h^{1-\alpha/2} \left(|u|_{2,\infty;\Omega} + |u|^2_{5/2-\alpha,2;\Omega}\right)^{1/2} \quad \text{avec} \;\; \varepsilon = h^{1-\alpha}$$

sinon, l'hypothèse 3.2.1 a lieu et :

$$E(h,\varepsilon,u) \leq c\, h \left(|u|_{2,\infty;\Omega} + |\ln(h)|\, |u|^2_{2,\infty;\Omega}\right)^{1/2} \quad \text{avec} \;\; \varepsilon = h$$

enfin l'estimation de $B_0(h,u)$ est inchangée. On trouve donc :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(\max\{h_0, \widetilde{\varphi}(h)\}) \;\; avec \;\; \widetilde{\varphi}(h) = \begin{cases} h\sqrt{|\ln(h)|} & \text{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ h^{1-\alpha} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.11}$$

et pour un maillage quasi-uniforme :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(\widetilde{\varphi}(h))$$

Cela permet donc de conclure que, pour $k = 2$, sur un maillage quasi-uniforme, l'hypothèse de régularité locale $u \in W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$ apporte peu d'amélioration comparée à l'hypothèse de régularité globale $u \in H^{5/2-\alpha}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$.
Cependant, comme on va le constater dans la suite, cette hypothèse locale est d'un grand intérêt lorsqu'on s'intéresse aux maillages adaptés.

3.2.4 Application aux maillages réguliers non-uniformes

Dans les estimations d'erreurs sur des maillages quasi-uniformes, nous sommes freinés par le terme $\text{mes}(\omega_h)$, qui est toujours en $\mathcal{O}(h_0)$. Sur un maillage adapté, nous pouvons faire en sorte de contrôler ce terme en réduisant la taille des mailles dans ω_h.

Commençons par traduire le théorème 3.2.2 en choisissant h_0 de manière à minimiser l'estimation d'erreur. Cela donne immédiatement l'énoncé :

Corollaire **3.2.3** *Soit $k \geq 2$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose le maillage régulier avec l'hypothèse 3.2.2. On suppose en outre que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$ avec $s \in]1;k]$, et que $\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

On pose :

$$\varphi(h) = \begin{cases} h^s\sqrt{|\ln(h)|} & \text{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ h^{3s/4} & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $h_0 = \mathcal{O}(\varphi(h))$, alors :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}\left(\varphi(h)\right)$$

Si on remplace l'hypothèse locale $u \in W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$ par l'hypothèse globale $u \in H^{5/2-\alpha}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, compte tenu de (3.11), on obtient $|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(\widetilde{\varphi}(h))$ dès que $h_0 < \widetilde{\varphi}(h)$. Autrement dit il ne semble plus utile d'adapter.

Ainsi, que l'hypothèse 3.2.1 a lieu ou non, l'amélioration apportée par la régularité locale est clairement visible.

Remarque **3.2.3** *Indiquons, pour comparaison, ce que donne le théorème 3.2.3 dans le cas où l'on décide d'adapter, si nécessaire, le maillage :*

Corollaire ***3.2.4*** *(application de (3.3) aux maillages adaptés réguliers)*

Soit $k \geq 2$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose le maillage régulier avec l'hypothèse 3.2.2. On suppose que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{s+1}(\Omega^+)$, avec $s \in]1;k]$. Si $h_0 = \mathcal{O}(h^{2s/3})$, alors :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{s/2})$$

Les résultats du corollaire 3.2.3 donnent donc de meilleurs estimations.

Ajoutons de plus que, lorsqu'on remplace la régularité locale par la régularité globale $u \in H^{5/2-\alpha}(\Omega)$, on ne peut rien améliorer en choisissant h_0 différent de h.

Dans le cadre des domaines non-polygonaux, nous exprimerons l'analogue de ce résultat en terme de nombre de degrés de liberté $N = \dim(V_h)$, pour le cas particulier de Poiseuille circulaire.

3.2.5 Convergence dans $W^{1,\infty}$ pour $k \geq 2$

Il est possible d'obtenir une première estimation de $|u-u_h|_{1;\infty;\Omega}$ en utilisant l'inégalité inverse. Cette remarque est faite et démontrée par Ciarlet dans [21], dans le cas linéaire (problème du Laplacien). Dans notre cas, une légère modification s'impose. De ce fait, nous présentons une démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION **3.2.2** *Soit $k \geq 2$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On suppose le maillage régulier avec l'hypothèse 3.2.2. On suppose en outre que $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$ avec $s > 1$, et que $\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

On pose :

$$\varphi(h) = \begin{cases} h^s\sqrt{|\ln(h)|} & \textit{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ h^{3s/4} & \textit{sinon} \end{cases}$$

Si $h_0 = \mathcal{O}(\varphi(h))$, alors :

$$|u-u_h|_{1,\infty;\Omega} = \mathcal{O}\left(h^{-1}\varphi(h)\right)$$

PREUVE :

Tout d'abord, exprimons l'erreur $|u-u_h|_{1,\infty;\Omega}$ en fonction de $|u-u_h|_{1,2;\Omega}$.

L'inégalité inverse de $W^{1,\infty}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ donne :

$$|u_h - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega} \leq c.h^{-1}|u_h - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega}$$

or, par l'inégalité triangulaire et les propriétés de Π_h, on a :

$$\begin{aligned} |u_h - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega} &\leq |u_h - u|_{1,2;\Omega} + |u - \Pi_h(u)|_{1,2;\Omega} \\ &\leq |u_h - u|_{1,2;\Omega} + c\,(h^s|u|_{s+1,2;\Omega^+} + h_0^{3/2}|u|_{2,\infty;\Omega}) \end{aligned}$$

donc :

$$|u_h - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega} \leq c.h^{-1}|u_h - u|_{1,2;\Omega} + c(u,\Omega)(h^{s-1} + h_0^{3/2}h^{-1})$$

par ailleurs, les propriétés de Π_h font que :

$$|u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega} \leq c\,(h^s|u|_{s+1;\infty;\Omega^+} + h_0|u|_{2,\infty;\Omega})$$

ces deux dernières estimations fournissent une première conclusion via l'inégalité triangulaire :

$$|u-u_h|_{1,\infty;\Omega} \leq |u_h - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega} + |u - \Pi_h(u)|_{1,\infty;\Omega}$$

les erreurs en normes $W^{1,\infty}$ et en norme H^1 sont ainsi reliées par :

$$|u-u_h|_{1,\infty;\Omega} \leq c(\Omega,u)(h^{s-1}+h_0+h_0^{3/2}h^{-1}+h^{-1}||u-u_h||)$$

Nous pouvons ensuite utiliser l'estimation en h et h_0 du théorème 3.2.2. Ceci fournit l'estimation :

$$|u-u_h|_{1,\infty;\Omega} \leq c(\Omega,u)\left(h^{s-1}+h_0+h_0^{3/2}h^{-1}+h^{-1}\max\{\varphi(h),h_0\}\right) \tag{3.12}$$

Donc, finalement, pour un maillage adapté :

$$|u-u_h|_{1,\infty;\Omega} \leq c(\Omega,u)\left(h^{s-1}+\varphi(h)+\varphi(h)^{3/2}h^{-1}+h^{-1}\varphi(h)\right) \leq c(\Omega,u)h^{-1}\varphi(h)$$

CQFD. □

REMARQUE **3.2.4** *La relation (3.12) montre que la présente technique est trop grossière pour prouver la convergence dans $W^{1,\infty}$ sur des maillages quasi-uniformes. En outre, si l'hypothèse 3.2.1, n'est pas satisfaite, la convergence n'est assurée que pour $s > 4/3$.*

3.3 Cas des domaines non polygonaux

3.3.1 Motivations

Nous avons utilisé comme exemple de référence le problème de Poiseuille circulaire.

Ceci nous a permis de valider quelques hypothèses sur les propriétés de la vitesse u. Cependant, pour une totale adéquation entre ces exemples de référence et une estimation d'erreur, il faut tenir compte de la forme du domaine Ω, celui-ci n'étant pas polygonal pour nos exemples.

Soit, donc, Ω un ouvert borné et régulier et non polygonal.

Lorsqu'on s'intéresse à des éléments d'ordre $k \geq 2$, un contre-exemple classique montre qu'on ne peut se contenter d'approcher Ω par un domaine Ω_h constitué de triangles «droits».

Considérons en effet que Ω soit convexe mais non polygonal. Soit alors un domaine polygonal Ω_h auquel on associe une triangulation régulière $\mathcal{T}_h$. On suppose que Ω_h approche Ω au sens où les sommets de Ω_h sont sur $\partial\Omega$ et où chaque arrête de Ω_h est une arrête d'un élément K de $\mathcal{T}_h$. On définit alors :

$$X_h(\Omega) = \left\{ v_h \in X_h^{k,0}(\Omega_h) \; ; \; v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h \right\}$$

Comme $\Omega_h \subset \Omega$, en étendant $v_h \in X_h(\Omega)$ à 0 hors de Ω_h, on a bien $X_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et l'approximation est $H_0^1(\Omega)$-conforme. Cependant, on peut montrer (voir [55]) que pour tout $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$:

$$\inf_{v_h \in X_h(\Omega)} |v - v_h|_{1,2;\Omega_h} = \mathcal{O}(h) \;\; si \;\; k = 1$$

$$\inf_{v_h \in X_h(\Omega)} |v - v_h|_{1,2;\Omega_h} = \mathcal{O}(h^{3/2}) \;\; si \;\; k \geq 2$$

La première relation est agréable, mais la seconde l'est nettement moins car elle ne peut être améliorée (voir [55]) et induit une perte dans l'estimation d'erreur. En effet, à une modification près dans les hypothèses de régularité de u, cela implique, lorsque $k \geq 2$, que :

$$|u - u_h|_{1,2;\Omega} = \left(|u - u_h|^2_{1,2;\Omega_h} + |u|^2_{1,2;\Omega\setminus\Omega_h}\right)^{1/2} \leq \max\{c.h^{3/2}, |u|_{1,2;\Omega\setminus\Omega_h}\} = \mathcal{O}(h^{3/2})$$

la dernière égalité venant du fait que, pour Ω assez régulier, $d(x, \partial\Omega) = \mathcal{O}(h^2)$, pour tout $x \in \partial\Omega_h$.

Afin d'obtenir la même précision que dans le cas polygonal, nous allons utiliser la technique isoparamétrique.

3.3.2 Contexte isoparamétrique

Pour définir le contexte, on suit [21] et [13] dans le cadre des éléments triangulaires.

Nous disposons d'un domaine régulier Ω. Nous allons définir deux domaines approchés. Le premier, noté $\widetilde{\Omega}_h$, est polygonal. Le second, nommé Ω_h, est constitué de triangles curvilignes.

Soit, pour $k \geq 1$, $(\widehat{T}, \widehat{P_k}, \widehat{\Sigma})$ un élément fini triangulaire de référence. On note :

- F_T la transformation isoparamétrique de $\widehat{T}$ dans le triangle curviligne T,
- $\widetilde{F}_T$ la transformation affine associée définie sur $\widehat{T}$ et à valeur dans le triangle (droit) $\widetilde{T}$,
- h_T et ρ_T respectivement le diamètre et la rondeur de $\widetilde{T}$,
- $\widetilde{a}_T = \widetilde{F}_T(\widehat{a})$ et $a_T = F_T(\widehat{a})$ pour $\widehat{a} \in \widehat{\Sigma}$.

Les transformations F_T définissent Ω_h. Quant à $\widetilde{\Omega}_h$, il est défini par les $\widetilde{F}_T$.

DÉFINITION **3.3.1** *Nous dirons qu'une triangulation isoparamétrique $\mathcal{T}_h$ est régulière si* *(voir [20]) :*

1. *il existe* $\sigma > 0$ *tel que :*

$$h_T \leq \sigma \rho_T \; ; \; \forall T \in \mathcal{T}_h$$

2. $h_T \longrightarrow 0$,
3. *chaque* F_T *reste proche de* $\widetilde{F_T}$ *au sens où :*

$$|a_{i,T} - \widetilde{a}_{i,T}| = \mathcal{O}(h^k) \tag{3.13}$$

   pour tout a_i *sur une arrête de* T.

Nous conserverons cette définition. Rappelons-en tout de même une difficulté pratique. bien connue Il semble assez naturel de choisir $a_{i,T}$ sur $\partial\Omega$ lorsque $a_{i,T}$ est sur $\partial\Omega_h$. En fait, une telle opération ne permet pas d'obtenir une triangulation isoparamétrique régulière, car on a toujours :

$$d(x, \partial\Omega) = \mathcal{O}(h_T^2) \;\; , \;\; \forall\, T \in \mathcal{T}_h \;\; , \;\; \forall\, x \in \partial T \cap \partial\widetilde{\Omega}_h$$

On trouve des exemples de modification de la condition (3.13) dans [20]. Ces modifications permettent de choisir les $a_{i,T}$ de $\partial\Omega_h$ sur $\partial\Omega$ tout en conservant les résultats d'approximation que nous allons énoncer.

En suivant [13] nous allons considérer des difféomorphismes :

$$F_h \; : \; \widetilde{\Omega}_h \longrightarrow \Omega_h$$

$$F \; : \; \widetilde{\Omega}_h \longrightarrow \Omega$$

$$\Phi_h = F_h \, o \, F^{-1} \; : \; \Omega \longrightarrow \Omega_h$$

et nous ferons l'hypothèse qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que, pour h assez petit, on ait : $\|Jac(F_h)\|_{0,\infty} < C$, $\|Jac(F_h)^{-1}\|_{0,\infty} < C$, $\|Jac(F)\|_{0,\infty} < C$ et $\|Jac(F)^{-1}\|_{0,\infty} < C$ ($Jac(.)$ désignant la matrice jacobienne). De plus, à l'aide de l'opérateur d'interpolation Π_h, on définit la $i^{\text{ème}}$ composante de F_h par $F_h^i = \Pi_h F^i$. La construction de F n'est pas triviale, elle est détaillée dans [13] dans le cas bidimensionnel qui est le nôtre.

En outre, la régularité du maillage se traduit par la relation suivante, très utile dans la pratique :

$$Jac(\Phi_h) - I = \mathcal{O}(h^k) \tag{3.14}$$

Il nous sera également utile de rappeler que $X_h(\Omega) = X_h^{k,0}(\Omega_h) \cap H_0^1(\Omega_h)$ et de définir l'ensemble :

$$\widehat{X}_h(\Omega) = \{\widehat{v}_h \stackrel{\text{déf}}{=} v_h \, o \, \Phi_h \; ; \; v_h \in X_h(\Omega)\}$$

dont les éléments sont définis sur Ω (alors que les éléments de $X_h(\Omega)$ sont définis sur le domaine Ω_h constitué des triangles curvilignes).

Notons enfin, pour simplifier, $(.,.) = (.,.)_{0,2;\Omega}$, $(.,.)_h = (.,.)_{0,2;\Omega_h}$, $((.,.)) = (\boldsymbol{\nabla}(.), \boldsymbol{\nabla}(.))$, $((.,.))_h = (\boldsymbol{\nabla}(.), \boldsymbol{\nabla}(.))_h$, ainsi que $|v| = \sqrt{(v,v)}$, $|v|_h = \sqrt{(v,v)_h}$, $\|v\| = \sqrt{((v,v))}$, $\|v\|_h = \sqrt{((v,v))_h}$, et $j_h(.) = |\boldsymbol{\nabla}(.)|_{0,1,\Omega_h}$. Nous noterons en outre J_{Φ_h} le déterminant de $Jac(\Phi_h)$.

Le problème discret consiste alors à trouver $u_h \in X_h(\Omega)$ tel que :

$$((u_h, v_h - u_h))_h + Bi(j_h(v_h) - j_h(u_h)) \geq (1, v_h - u_h)_h \quad , \quad \forall \, v_h \in X_h(\Omega)$$

Rappelons qu'un tel problème possède une unique solution qui vérifie :

$$\|u_h\|_h^2 + Bi \, j_h(u_h) \leq \text{mes}(\Omega_h) \, |u_h|_h \tag{3.15}$$

cette dernière relation s'obtenant en choisissant $v_h = 0$.

Notons $\widehat{u}_h = u_h o \Phi_h \in \widehat{X}_h(\Omega)$. Dans la suite, nous allons chercher à estimer la quantité $|u - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$.

3.3.3 Première estimation non-conforme

Commençons par une première tentative qui reprend l'estimation présentée pour le cas linéaire dans [13] (pages 212-213). Ceci conduit ici à un premier résultat non-optimal correspondant au résultat de convergence de [35], lequel était donné dans le cas où Ω est polygonal.

PROPOSITION **3.3.1** *Pour tout $v_h \in X_h(\Omega)$, on a :*

$$|u - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}^2 \leq c \, |u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega}^2 + c \, h^{2k} + c \, Bi \left\{ h^k + |u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} \right\}$$

PREUVE :

Il suffit de faire la démonstration pour $\widehat{v}_h$ la projection sur $\widehat{X}_h(\Omega)$ de u, définie par :

$$((\widehat{v}_h, \widehat{w}_h)) = ((u, \widehat{w}_h)) \quad , \quad \forall \widehat{w}_h \in \widehat{X}_h(\Omega)$$

Avec l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$|u - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \leq |u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + |\widehat{v}_h - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$$

Soit ensuite $\widehat{w}_h \in \widehat{X}_h(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
((\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) &= ((\, \widehat{v}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) - ((\, u_h \,,\, w_h \,))_h + ((\, u_h \,,\, w_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) \\
&\leq \{(\, 1 \,,\, \widehat{w}_h \,) + Bi(j(u - \widehat{w}_h) - j(u))\} \\
&\quad - \quad \{(\, 1 \,,\, w_h \,)_h + Bi(j_h(u_h + w_h) - j_h(u_h))\} \\
&\quad + \quad ((\, u_h \,,\, w_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) \\
&= (\, 1 \,,\, \widehat{w}_h \,) - (\, 1 \,,\, w_h \,)_h \\
&\quad + \quad ((\, u_h \,,\, w_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) \\
&\quad + \quad Bi\,\{j(u - \widehat{w}_h) - j(u) + j_h(u_h + w_h) - j_h(u_h)\} \\
&= A \quad + \quad B \quad + \quad Bi\,C
\end{aligned}$$

L'estimation de A se fait comme dans le cas linéaire, par un changement de variable :

$$\begin{aligned}
A &= (\, 1 \,,\, \widehat{w}_h \,) - (\, 1 \,,\, w_h \,)_h \\
&= (\, 1 \,,\, (1 - J_{\Phi_h})\, \widehat{w}_h \,) \\
&\leq c\; |\widehat{w}_h|\; h^k
\end{aligned}$$

De même pour B :

$$\begin{aligned}
B &= ((\, u_h \,,\, w_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) = \big(\, Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h \,,\, Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{w}_h.J_{\Phi_h} \,\big) - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{w}_h \,)) \\
&= \big(\, (Jac(\Phi_h)^{-T} - I).\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h \,,\, Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{w}_h.J_{\Phi_h} \,\big) - \big(\, \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h \,,\, (J_{\Phi_h}.Jac(\Phi_h)^{-T} - I).\boldsymbol{\nabla}\widehat{w}_h \,\big) \\
&\leq c\, h^k\, |\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}\, |\widehat{w}_h|_{1,2;\Omega}
\end{aligned}$$

l'estimation de $|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$ s'effectue de la manière suivante ; on remarque que :

$$|\widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} = \int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|^2 \mathrm{d}x = \int_{\Omega_h} \|Jac(\Phi^{-1})^{-t}\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|^2 J_{\Phi_h^{-1}} \mathrm{d}x \leq c\,||u_h||^2_h$$

et en faisant le changement de variable inverse puis en utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$|u_h|_h \leq c\,|\widehat{u}_h|_{0,2;\Omega} \leq c\,|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$$

ces deux inégalités ainsi que (3.15) donnent donc :

$$|\widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \leq c\,\|u_h\|^2_h + c\,Bi\,j_h(u_h) \leq c\,|1|_h |u_h|_h \leq c\,|1|_h\,|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$$

autrement dit :

$$|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \leq c\,|1|_h = c\,|1|_{0,2;\Omega\cap\Omega_h} \leq c\,|1|_{0,2;\Omega}$$

donc finalement :

$$B \leq c\,h^k\,|\widehat{w}_h|_{1,2;\Omega}$$

Pour estimer le terme C, on choisit un w_h particulier en posant :

$$w_h = v_h - u_h$$

alors :

$$\begin{aligned} C &= j(u - \widehat{w}_h) - j(u) + j_h(u_h + w_h) - j_h(u_h) \\ &= j(u - \widehat{v}_h + \widehat{u}_h) - j_h(u_h) + j_h(v_h) - j(u) \\ &= \quad C_1 \quad + \quad C_2 \end{aligned}$$

on peut ensuite estimer le premier terme par des changements de variable :

$$\begin{aligned} C_1 &= j(u - \widehat{v}_h + \widehat{u}_h) - j_h(u_h) \\ &= j(u - \widehat{v}_h + \widehat{u}_h) - j(\widehat{u}_h) + j(\widehat{u}_h) - j_h(u_h) \\ &\leq j(u - \widehat{v}_h) + j(\widehat{u}_h) - j_h(u_h) \\ &= j(u - \widehat{v}_h) + \int_\Omega \left\{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\| - J(\Phi_h)\|Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|\right\}\,dx \\ &= j(u - \widehat{v}_h) + \int_\Omega \left\{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\| - \|Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|\right\}\,dx + \int_\Omega (1 - J(\Phi_h))\|Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|\,dx \\ &\leq j(u - \widehat{v}_h) + \int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|\,\|I - Jac(\Phi_h)^{-T}\|\,dx + \int_\Omega \|1 - J(\Phi_h)\|\,\|Jac(\Phi_h)^{-T}\|\,\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|\,dx \\ &\leq \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}|u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + c\,h^k\,|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \end{aligned}$$

et en utilisant la majoration de $|\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}$, précédemment établie, on trouve :

$$C_1 \leq \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}|u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + c\,h^k$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} C_2 &= j_h(v_h) - j(u) = \int_\Omega \left\{\|Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|J_{\Phi_h} + \|\boldsymbol{\nabla}u\|\right\}\,dx \\ &= \int_\Omega J_{\Phi_h}\left\{\|Jac(\Phi_h)^{-T}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\| - \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|\right\}\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \{J_{\Phi_h}\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\| - \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|\}\,dx + \int_\Omega \{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\| - \|\boldsymbol{\nabla}u\|\}\,dx \\ &\leq \int_\Omega \|J_{\Phi_h}\|\,\|Jac(\Phi_h)^{-T} - I\|\,\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|\,dx + \int_\Omega \|J_{\Phi_h} - 1\|\,\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|\,dx + \int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\|\,dx \\ &\leq c\,h^k\,|\widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}|u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} \end{aligned}$$

et par définition de la projection, on a $|\widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} \leq |u|_{1,2;\Omega}$ donc $|\widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} \leq c$:

$$C_2 \leq c\,h^k + \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}|u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega}$$

On conclut en appliquant l'inégalité d'Young dans A et B.

CQFD. $\square$

3.3.4 Seconde estimation non-conforme

Au regard de l'estimation que nous avons obtenue dans le cas polygonal, l'estimation précédente doit être améliorée en suivant la même méthode.

On désigne encore par ω_h la couche d'éléments qui contient la frontière des zones rigides et on définit de nouveau une partition de Ω à partir de ω_h ;

$$\Omega = \omega_0 \cup \Phi_h^{-1}(\omega_h) \cup \omega^+$$

$$\omega_0 = \Omega_0 \backslash \Phi_h^{-1}(\omega_h)$$

$$\omega^+ = \Omega^+ \backslash \Phi_h^{-1}(\omega_h)$$

PROPOSITION **3.3.2** *Soit $v_h \in X_h(\Omega)$. On pose :*

$$M_h = |u - \widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega} + (Bi + 1)\ h^k\, |u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + \left(Bi^2 + 1\right)\ h^{2k}$$

et :

$$N_h = \mathrm{mes}(\Phi_h^{-1}(\omega_h))\, |\widehat{v}_h - u|_{1,\infty;\Phi_h^{-1}(\omega_h)} + |\widehat{v}_h|_{1,1;\omega_0} + \mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\, |\widehat{v}_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+}$$

Alors, pour h assez petit, on a :

$$|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \le c \times \left\{ M_h + Bi\, N_h + \frac{Bi}{\varepsilon}\, |\widehat{v}_h - u|^2_{1,2;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \right\}$$

Et si de plus l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite, alors :

$$|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \le c \times \left\{ M_h + Bi\, N_h + Bi\, |\ln(\varepsilon)|\, |\widehat{v}_h - u|^2_{1,\infty;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \right\}$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de h et de Bi.

PREUVE :

On procède en trois étape,

1. construction d'une inégalité analogue à (3.8),
2. estimation des termes dûs à la différence entre les domaines Ω_h et Ω,
3. estimation des autres termes.

Chaque étape est effectuée dans un lemme.

LEMME **3.3.1** *(construction d'une inégalité analogue à (3.8))*

Soient $\lambda(u)$ et $\lambda(u_h)$ des[2] *multiplicateurs associés respectivement à u et u_h par les relations*[3] *:*

$$\begin{cases} ((\, u \,,\, v \,)) + Bi\,(\, \lambda(u) \,,\, \boldsymbol{\nabla} v \,) = (\, 1 \,,\, v \,) \\ \lambda(u).\boldsymbol{\nabla} u = \|\boldsymbol{\nabla} u\| \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((\, u_h \,,\, v_h \,))_h + Bi\,(\, \lambda(u_h) \,,\, \boldsymbol{\nabla} v_h \,)_h = (\, 1 \,,\, v_h \,)_h \\ \lambda(u_h).\boldsymbol{\nabla} u_h = \|\boldsymbol{\nabla} u_h\| \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

alors, pour tout $\lambda(\widehat{v}_h)$ et $\lambda(\widehat{u}_h)$ tels que :

$$\lambda(\widehat{v}_h).\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\|$$

$$\lambda(\widehat{u}_h).\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|$$

on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \;\; &\leq (\, 1 \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,) - (\, 1 \,,\, v_h - u_h \,)_h \\ &+ \quad \{((\, u_h \,,\, v_h - u_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,))\} + ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{v}_h \,)) \\ &+ \quad \{(\, \lambda(u_h) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h) \,)_h - (\, \lambda(\widehat{u}_h) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h) \,)\} \\ &+ (\, \lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u) \,) \end{aligned}$$

REMARQUE **3.3.1** *Nous introduisons ici les notations $\lambda(u_h)$ et $\lambda(\widehat{u}_h)$. Remarquons que $\lambda(\widehat{u}_h)$ est* **différent** *de $\widehat{\lambda}(u_h) = \lambda(u_h)\, o\, \Phi_h$*[4].

PREUVE :

$$\begin{aligned} |u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \;\; &= ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{u}_h \,)) = ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{v}_h \,)) + ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,)) \\ &= (\, 1 \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,) - (\, \lambda(u) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h) \,) - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,)) + ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{v}_h \,)) \\ \\ &= (\, 1 \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,) - (\, \lambda(u) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h) \,) \\ &\quad + \quad \{-(\, 1 \,,\, v_h - u_h \,)_h + (\, \lambda(u_h) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h) \,)_h\} \\ &\quad + \quad \{((\, u_h \,,\, v_h - u_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,))\} + ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{v}_h \,)) \\ \\ &= (\, 1 \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,) - (\, 1 \,,\, v_h - u_h \,)_h \\ &\quad + \quad \{((\, u_h \,,\, v_h - u_h \,))_h - ((\, \widehat{u}_h \,,\, \widehat{v}_h - \widehat{u}_h \,))\} + ((\, u - \widehat{u}_h \,,\, u - \widehat{v}_h \,)) \\ &\quad + \quad (\, \lambda(u_h) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h) \,)_h - (\, \lambda(u) \,,\, \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h) \,) \end{aligned}$$

2. rappelons en effet que les multiplicateurs ne sont pas uniques

3. la notation $\lambda(u)$ ne cherche pas à désigner l'ensemble des multiplicateurs associés à u, mais seulement l'un d'entre eux et à signifier qu'il dépend de u, afin de faciliter la lecture de la démonstration de ce lemme (de même pour $\lambda(u_h)$)

4. ceci exclut l'usage de la notation concise mais ambiguë $\widehat{\lambda}_h$ pour désigner $\lambda(\widehat{u}_h)$

on majore maintenant le terme non-linéaire,

$$\begin{aligned} C &= (\,\lambda(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h)\,)_h - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) \\ &= \{(\,\lambda(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(v_h - u_h)\,)_h - (\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,)\} \\ &\quad + \{(\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,)\} \\ &= \quad C_1 \quad + \quad C_2 \end{aligned}$$

le terme C_1 figure dans l'énoncé, il reste donc à majorer C_2,

$$\begin{aligned} C_2 &= (\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) \\ &= (\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(u - \widehat{u}_h)\,) \end{aligned}$$

remarquons ensuite que, par définition, les multiplicateurs $\lambda(u)$ et $\lambda(\widehat{u}_h)$ vérifient :

$$(\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\,) = (\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}\widehat{v}_h\,) - j(\widehat{u}_h) \le j(\widehat{v}_h) - j(\widehat{u}_h)$$

$$(\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{u}_h - u)\,) = (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\,) - j(u) \le j(\widehat{u}_h) - j(u)$$

donc on obtient :

$$C_2 \le j(\widehat{v}_h) - j(\widehat{u}_h) + j(\widehat{u}_h) - j(u) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,) = j(\widehat{v}_h) - j(u) - (\,\lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,)$$

et enfin, $\lambda(\widehat{v}_h)$ est tel que :

$$(\,\lambda(\widehat{v}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(u - \widehat{v}_h)\,) = (\,\lambda(\widehat{v}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}u\,) - j(\widehat{v}_h) \le j(u) - j(\widehat{v}_h)$$

donc,

$$C_2 \le (\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,)$$

CQFD. □

LEMME **3.3.2** *(estimation des termes dûs à la différence entre les domaines Ω_h et Ω)*

On pose :

$$M_h = |u - \widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega} + (Bi + 1)\ h^k\,|u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} + \left(Bi^2 + 1\right)\ h^{2k}$$

alors :

$$|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \le c\,M_h + 2\,Bi\ (\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,)$$

PREUVE :

Certains termes présents au second membre de l'estimation du lemme (3.3.1) ont déjà été estimés dans la démonstration de la proposition (3.3.1). Nous avions alors :

$$\begin{aligned}(1\,,\,\widehat{v}_h-\widehat{u}_h\,)-(\,1\,,\,v_h-u_h\,)_h &\leq c\,|\widehat{v}_h-\widehat{u}_h|\;h^k\\ &\leq c\,h^k\,|\widehat{v}_h-\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}\end{aligned}\tag{3.16}$$

et :

$$((\,u_h\,,\,v_h-u_h\,))_h-((\,\widehat{u}_h\,,\,\widehat{v}_h-\widehat{u}_h\,))\leq c\,h^k\,|\widehat{v}_h-\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}\tag{3.17}$$

et, bien sûr,

$$((\,u-\widehat{u}_h\,,\,u-\widehat{v}_h\,))\leq|u-\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}\,|u-\widehat{v}_h|_{1,2;\Omega}\leq c\,|u-\widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega}+\frac{1}{6}|u-\widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega}\tag{3.18}$$

la dernière relation s'obtenant avec l'inégalité d'Young :

$$a\,b\leq\frac{3}{2}\,a^2+\frac{1}{6}b^2$$

Il reste donc à majorer les termes non-linéaires qui apparaissent entre accolades dans le lemme (3.3.1). Il s'agit de :

$$\begin{aligned}D\;&=(\,\lambda(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(v_h-u_h)\,)_h-(\,\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h-\widehat{u}_h)\,)\\ &=\Big(\widehat{\lambda}(u_h)-\lambda(\widehat{u}_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h-\widehat{u}_h)\Big)+\Big\{(\,\lambda(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(v_h-u_h)\,)_h-\Big(\widehat{\lambda}(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h-\widehat{u}_h)\Big)\Big\}\\ &=\quad D_1\quad+\quad D_2\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}D_2\;&=(\,\lambda(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(v_h-u_h)\,)_h-\Big(\widehat{\lambda}(u_h)\,,\,\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h-\widehat{u}_h)\Big)\\ &=\Big(\widehat{\lambda}(u_h)\,,\,(J_{\Phi_h}.Jac(\Phi_h)^{-t}-I).\boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h-\widehat{u}_h)\Big)\\ &\leq c\,h^k\,|\widehat{v}_h-\widehat{u}_h|_{1,2;\Omega}\end{aligned}\tag{3.19}$$

Estimons maintenant D_1, cela s'effectue en deux étapes. Tout d'abord, considérons :

$$\lambda_\delta(u_{\delta\,h})=\frac{\boldsymbol{\nabla}u_{\delta\,h}}{(\delta^2+\|\boldsymbol{\nabla}u_{\delta\,h}\|^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\,h})=\frac{\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\,h}}{(\delta^2+\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\,h}\|^2)^{1/2}}$$

où $u_{\delta h}$ désigne la solution du problème variationnel discret régularisé :

$$((u_{\delta h},v_h))_h+Bi(\lambda_\delta(u_{\delta h}),\boldsymbol{\nabla}v_h)_h=(1,v_h)_h\quad\forall\,v_h\in X_h(\Omega)$$

On peut alors montrer qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de δ tel que :

$$D_\delta = \Big(\widehat{\lambda}_\delta(u_{\delta\,h}) - \lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\,h})\,,\ \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\Big) \leq c\,h^k\,|\widehat{v}_h - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \tag{3.20}$$

pour cela, on utilise un petit lemme démontré dans [63] et qui est analogue au lemme 3.2.1 :

LEMME **3.3.3** *Soient $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ deux éléments de $I\!R^2$, alors, pour tout $\delta > 0$, on a :*

$$\left|\frac{\boldsymbol{\xi}}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{1/2}} - \frac{\boldsymbol{\zeta}}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\zeta}\|^2)^{1/2}}\right| \leq 2\,\frac{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\|}{\|\boldsymbol{\xi}\| + \|\boldsymbol{\zeta}\|}$$

On pose alors :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\nabla} u_{\delta\,h}\, o\, \Phi_h$$

et :

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi}.Jac(\Phi_h)$$

puis on pose encore, pour alléger l'écriture, $w = \widehat{v}_h - \widehat{u}_h$, on a :

$$D_\delta = \int_\Omega \left\{\frac{\boldsymbol{\xi}}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{1/2}} - \frac{\boldsymbol{\zeta}}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\zeta}\|^2)^{1/2}}\right\}.\boldsymbol{\nabla} w.\mathrm{d}x$$

et, en appliquant le lemme (3.3.3), on obtient :

$$D_\delta \leq 2\int_\Omega \frac{\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\|\,\|\boldsymbol{\nabla} w\|}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x \leq 2\int_\Omega \|I - Jac(\Phi_h)\|\,\|\boldsymbol{\nabla} w\| \times \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|}{(\delta^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x \leq c\,h^k\,\mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}|w|_{1,2;\Omega}$$

ce qui prouve (3.20).

L'étape suivante, dans l'estimation de D_1, consiste à passer à la limite dans (3.20). Comme pour le cas continu (voir [33]), on peut construire $\lambda(u_h)$ comme limite faible dans $L^2(\Omega_h)^2$ de $\lambda_\delta(u_{\delta h})$. Ainsi, on sait que :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \lambda_\delta(u_{\delta\,h}) = \lambda(u_h) \quad \textit{dans } L^2(\Omega_h)^2\text{-faible}$$

on en déduit donc que :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \widehat{\lambda}_\delta(u_{\delta\,h}) = \widehat{\lambda}(u_h) \quad \textit{dans } L^2(\Omega)^2\text{-faible}$$

il reste à montrer que $\lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\,h})$ possède une limite faible $\overline{\lambda}$ dans $L^2(\Omega)^2$ et que l'on peut alors choisir $\lambda(\widehat{u}_h) = \overline{\lambda}$.

Reprenant les arguments de la construction de $\lambda(u_h)$, nous pouvons dire que $\lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\, h})$ est borné dans Λ qui est un convexe fermé et borné dans $L^2(\Omega)^2$, donc faiblement compact. On peut alors extraire de $\lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\, h})$ une sous-suite, notée de la même manière, telle que :

$$\begin{cases} \lim_{\delta\longrightarrow 0} \lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\, h}) = \overline{\lambda} \quad \textit{dans } L^2(\Omega)^2\text{-faible} \\ \overline{\lambda} \in \Lambda \end{cases}$$

on voit donc que pour pouvoir choisir $\lambda(\widehat{u}_h) = \overline{\lambda}$, il suffit que $\overline{\lambda}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|$.

Soit $x \in \Omega$, tel que $\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\| = 0$. On a bien $\overline{\lambda}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h = 0 = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|$.

Supposons maintenant qu'au contraire, $x \in \Omega$ est tel que $\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\| \neq 0$. On sait que :

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} |\boldsymbol{\nabla}(u_{\delta\, h} - u_h)|_h = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} |\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h} - \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h|_{0,2;\Omega} = 0$$

on peut alors extraire de $\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}$ une sous-suite, notée de la même manière, qui converge vers $\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h$ presque partout sur Ω.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a, par définition de $\lambda(\widehat{u}_{\delta\, h})$:

$$\int_{\{x\in\Omega\ ;\ \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\neq 0\}} \lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\, h}).\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}.\phi = \int_{\{x\in\Omega\ ;\ \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\neq 0\}} \frac{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|}{\left(\delta^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|^2\right)^{1/2}}.\phi$$

en faisant tendre δ vers 0, on obtient alors :

$$\int_{\{x\in\Omega\ ;\ \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\neq 0\}} \overline{\lambda}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h.\phi = \int_{\{x\in\Omega\ ;\ \boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\neq 0\}} \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|.\phi \tag{3.21}$$

La convergence du membre de gauche provient de la convergence dans L^2-faible de $\lambda_\delta(\widehat{u}_{\delta\, h})$ vers $\overline{\lambda}$ et de la convergence dans L^2-fort de $\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}.\phi$ vers $\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h.\phi$.

La convergence du membre de droite s'obtient par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue en remarquant qu'on a presque partout sur Ω :

$$\left|\frac{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|}{\left(\delta^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|^2\right)^{1/2}}.\phi\right| \leq |\phi| \in L^1(\Omega)$$

et :

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|}{\left(\delta^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_{\delta\, h}\|^2\right)^{1/2}}.\phi = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|.\phi$$

Enfin, de la relation (3.21), nous déduisons que, pour presque tout x tel que $\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h \neq 0$, on a :

$$\overline{\lambda}.\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h = \|\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}_h\|$$

En conclusion, on peut effectivement choisir $\lambda(\widehat{u}_h) = \overline{\lambda}$.

Il reste à faire tendre δ vers 0 dans l'estimation (3.20), en vertu des convergences faibles que nous avons obtenues, nous pouvons alors écrire :

$$D_1 = \Big(\widehat{\lambda}(u_h) - \lambda(\widehat{u}_h)\,,\; \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - \widehat{u}_h)\Big) \leq c\, h^k\, |\widehat{v}_h - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \tag{3.22}$$

Pour conclure la preuve de ce lemme, nous utilisons les inégalités (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19)(3.22) dans l'estimation du lemme 3.3.1 et l'inégalité d'Young pour écrire :

$$\begin{aligned}
|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \;&\leq c\,|u - \widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega} + \frac{1}{6}|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\,Bi\, h^k\, |\widehat{v}_h - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\, h^k\, |\widehat{v}_h - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad (\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\; \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,) \\
&\leq c\,|u - \widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega} + \frac{1}{6}|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\,Bi\, h^k\, |\widehat{v}_h - u|_{1,2;\Omega} + c\,Bi^2\, h^{2k} + \frac{1}{6}|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\, h^k\, |\widehat{v}_h - u|_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\, h^{2k} \\
&+ \quad \frac{1}{6}|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad (\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\; \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,)
\end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
|u - \widehat{u}_h|^2_{1,2;\Omega} \;&\leq c\,|u - \widehat{v}_h|^2_{1,2;\Omega} + c\,(Bi + 1)\; h^k\, |u - \widehat{v}_h|_{1,2;\Omega} \\
&+ \quad c\,(Bi^2 + 1)\; h^{2k} \\
&+ \quad 2\,(\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\; \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,)
\end{aligned}$$

CQFD. □

Lemme **3.3.4** *(dernière étape de la preuve de la proposition 3.3.2)*

On pose :

$$N_h = \mathrm{mes}(\Phi_h^{-1}(\omega_h))\, |\widehat{v}_h - u|_{1,\infty;\Phi_h^{-1}(\omega_h)} + \mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\, |\widehat{v}_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+}$$

on a alors :

$$(\,\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u)\,,\; \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)\,) \leq N_h + \frac{1}{\varepsilon}\,|\widehat{v}_h - u|^2_{1,2;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+}$$

et sous l'hypothèse 3.2.1 :

$$(\lambda(\widehat{v}_h) - \lambda(u) , \boldsymbol{\nabla}(\widehat{v}_h - u)) \leq N_h + |\ln(\varepsilon)| \, |\widehat{v}_h - u|^2_{1,\infty;\Omega_\varepsilon \cap \omega^+}$$

Preuve :

Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 3.2.1 de convergence pour le cas polygonal.

CQFD. □

Pour achever la preuve de la proposition 3.3.2, on combine les estimations obtenues dans les lemmes 3.3.2 et 3.3.4.

CQFD. □

3.3.5 Application

Nommons Π_T l'opérateur d'interpolation d'une fonction définie aux points a_T d'un élément (curviligne) T. Les propriétés de cet opérateur ont été étudiées en détails dans [20]. Rappelons seulement celles qui nous intéressent :

Proposition **3.3.3** *(propriétés de Π_T, [20]) Soit $p \in \{2; +\infty\}$. Alors, pour tout h assez petit et tout $T \in \mathcal{T}_h$,*

$$\|v - \Pi_T(v)\|_{1,p;T} \leq c \left(\sum_{l=1}^{k+1} |v|_{l,p;T} \right) h_T^k \quad \forall v \in W^{k+1,p}(T)$$

En particulier,

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{1,p;\Omega_h} \leq c \left(\sum_{l=1}^{k+1} |v|_{l,p;\Omega_h} \right) h^k \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega_h)$$

Ajoutons qu'il est tout à fait possible de remplacer k par un réel $s \in [1, k]$. On peut voir cela en appliquant la technique proposée dans le livre de Brenner et Scott [13], chapitre 12.

Remarquons maintenant, que, par un changement de variable,

$$\mathrm{mes}(\Phi_h^{-1}(\omega_h)) \leq c \, \mathrm{mes}(\omega_h)$$

car $J_{\Phi_h^{-1}}$ est uniformément borné sur Ω_h.

L'analogue du théorème 3.2.2 est alors obtenu en utilisant ces propriétés dans la proposition 3.3.2 :

THÉORÈME **3.3.1** *On suppose que* $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{s+1,\infty}(\Omega^+)$. *Si le maillage est régulier, si l'hypothèse 3.2.2 a lieu et si* $\text{mes}(\Omega_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, *alors, pour tout* h *assez petit, on a :*

$$|u - \widehat{u}_h|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}\left(\max\left\{h_0, h_0^{1/2} h^{k/2}, \varphi(h)\right\}\right)$$

où l'on a posé :

$$\varphi(h) = \begin{cases} h^s \sqrt{|\ln(h)|} & \textit{sous l'hypothèse 3.2.1} \\ h^{3s/4} & \textit{sinon} \end{cases}$$

En particulier, les corollaires 3.2.1 et 3.2.3 sont encore vrais.

REMARQUE **3.3.2** *Ce dernier résultat s'applique immédiatement à notre exemple de référence, c'est-à-dire à écoulement de Poiseuille circulaire.*
Nous venons donc d'établir que l'utilisation d'éléments d'ordre supérieur entraîne un gain de précision sur les maillages adaptés.

Si nous écrivons l'analogue du corollaire 3.2.3 , nous utilisons le fait que le maillage est plus dense le long de la frontière des zones rigides. Nous devons alors vérifier que cela n'engage pas un sur-coût en nombre de degrés de liberté par rapport à un maillage quasi-uniforme de même pas h.

Pour cette raison, nous devons écrire la conclusion de ce corollaire de manière à faire apparaître le nombre d'éléments N_e. Cela suppose de bien connaître la relation entre le pas du maillage et le nombre d'éléments.

Nous nous sommes restreint au cas modèle de Poiseuille circulaire pour lequel nous avons mis au point une construction de maillage adapté. Ceci donne lieu à l'affirmation suivante :

LEMME **3.3.5** *On considère le problème de Poiseuille circulaire, avec* $0 < Bi < 1$. *Il existe un maillage polygonal de* Ω *dont le nombre d'éléments* N_e *vérifie, pour* h_0 *et* h *assez petit :*

$$N_e = \mathcal{O}\left(h^{-2} + h_0^{-1}\right)$$

La construction de ce maillage paramètré par h_0, h et Bi est donnée en annexe D.

Dans le cas d'un maillage quasi-uniforme de pas h, le nombre d'éléments est donné par $N_U = \mathcal{O}(h^{-2})$. Considérons alors le cas des éléments P_2. Nous avons $N_e = \mathcal{O}(h^{-2})$. **On**

retrouve un coût du même ordre que celui d'un maillage quasi-uniforme, pour une erreur quasi-optimale.

Nous pouvons maintenant écrire le théorème 3.2.3 avec N au lieu de h, en tenant compte du lemme précédent. Pour rappeler le paramètre pertinent N , on écrira $\widehat{u}_N$ au lieu de $\widehat{u}_h$.

THÉORÈME **3.3.2** *Soit $k \geq 1$. On suppose que u est la solution du problème de Poiseuille circulaire, avec $0 < Bi < 1$.*

(i) Pour un maillage quasi-uniforme $\mathcal{T}_N$, possédant N éléments, on a :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} \leq c \times \begin{cases} N^{-1/2} & si \quad k \geq 2 \\ N^{-1/2}\sqrt{|\ln(N)|} & si \quad k = 1 \end{cases}$$

(ii) Il existe un maillage régulier $\mathcal{T}_N^a$, possédant N éléments, tel que :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} \leq c \times \begin{cases} N^{-1} & si \quad k \geq 3 \\ N^{-3k/8} & si \quad k \leq 2 \end{cases}$$

(iii) Il existe un maillage régulier $\mathcal{T}_N^b$, possédant N éléments, tel que :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} \leq c \times \begin{cases} N^{-1}\sqrt{|\ln(N)|} & si \quad k \geq 2 \\ N^{-k/2}\sqrt{|\ln(N)|} & si \quad k \leq 2 \end{cases}$$

PREUVE :

(i) On remplace h par $N^{-1/2}$ dans l'estimation sur les maillages quasi-uniformes.

(ii) Nous avons vu comment construire un maillage tel que $h_0 \leq c\, h^{3k/4}$.
Dans ce cas, $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^{3k/4}}\right)$.
Si $\frac{3k}{4} \geq 2$, alors : $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{3k/4}}\right)$ et : $h = \mathcal{O}\left(N^{-4/(3k)}\right)$, donc :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{3k/4}) = \mathcal{O}(N^{-1})$$

Si $\frac{3k}{4} \leq 2$, alors : $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2}\right)$ et $h = \mathcal{O}\left(N^{-1/2}\right)$, donc :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^{3s/4}) = \mathcal{O}(N^{-3s/8})$$

(iii) Nous savons construire un maillage tel que $\text{mes}(\omega_h) \leq c\,h^k$.
Dans ce cas, $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^k}\right)$.
Si $k \geq 2$, alors : $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^k}\right)$ et : $h = \mathcal{O}\left(N^{-1/k}\right)$, donc :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(h^k\sqrt{|\ln(h)|}) = \mathcal{O}(N^{-1}\sqrt{|\ln(N)|})$$

Si $k \leq 2$, alors : $N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2}\right)$ et $h = \left(N^{-1/2}\right)$, donc :

$$|\widehat{u}_N - u|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(N^{-k/2}\sqrt{|\ln(N)|})$$

CQFD. $\square$

3.4 Introduction du glissement à seuil dans l'estimation H^1

Considérons le problème de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique de section quelconque Ω avec la loi de glissement à seuil introduite à la section 1.1. Rappelons (voir section 1.3.1) que le champs de vitesse u, défini de manière unique, vérifie, $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &(\nabla u, \nabla(v-u))_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma(v-u))_{0,2;\Gamma} \\ &+ \quad S\left\{\int_\Gamma |\gamma v|\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma |\gamma u|\mathrm{d}\Gamma\right\} \\ &+ \quad Bi\left\{\int_\Omega \|\nabla v\|\mathrm{d}x - \int_\Omega \|\nabla u\|\mathrm{d}x\right\} \geq (1, v-u)_{0,2;\Omega} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nous souhaitons ici reprendre la technique utilisée pour l'estimation d'erreur en norme H^1 dans l'approximation élément fini du modèle de Bingham avec adhérence à la paroi (section 3.2). Rappelons que, dans le cas présent, u est approché par l'unique solution $u_h \in X_h(\Omega)$ de l'inéquation variationnelle suivante (voir la section 2.1.4) :

$$\begin{aligned} &(\nabla u_h, \nabla(v_h-u_h))_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u_h, \gamma(v_h-u_h))_{0,2;\Gamma} \\ &+ \quad S\left\{\int_\Gamma |\gamma v_h|\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma |\gamma u_h|\mathrm{d}\Gamma\right\} \\ &+ \quad Bi\left\{\int_\Omega \|\nabla v_h\|\mathrm{d}x - \int_\Omega \|\nabla u_h\|\mathrm{d}x\right\} \geq (1, v_h-u_h)_{0,2;\Omega} \quad , \quad \forall\, v_h \in X_h(\Omega) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dans un premier temps, nous établirons donc une estimation abstraite, puis, dans un second temps, nous l'appliquerons à l'approximation P_1-continue de u, pour le cas où $Bi = 0$.

3.4.1 Une estimation abstraite

Commençons par établir une estimation abstraite de l'erreur en norme H^1.

Nous avons besoin pour cela de retrouver un outil précieux, le multiplicateur de Lagrange λ_Γ, défini au bord Γ de Ω de la manière suivante.

LEMME **3.4.1** *Soient les ensembles :*

$$\Lambda(\Omega) = \left\{\lambda_\Omega \in L^2(\Omega)^2 \ ; \ \|\lambda_\Omega\| \leq 1 \text{ p.p. } sur\, \Omega\right\}$$

$$\Lambda(\Gamma) = \left\{\lambda \in L^2(\Gamma) \ ; \ |\lambda_\Gamma| \leq 1 \text{ p.p. } sur\, \Gamma\right\}$$

Il existe $\lambda_\Gamma \in \Lambda(\Gamma)$ *et* $\lambda_\Omega \in \Lambda(\Omega)$ *tel que :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)_{0,2;\Omega} + C_F(\gamma u, \gamma v)_{0,2;\Gamma} + S\int_\Gamma \lambda_\Gamma\, \gamma v \,\mathrm{d}\Gamma + Bi\int_\Omega \lambda_\Omega\, \boldsymbol{\nabla} v \,\mathrm{d}x = (1, v)_{0,2;\Omega} \ , \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\|\boldsymbol{\nabla} u\| = \lambda_\Omega.\boldsymbol{\nabla} u \ \text{ p.p. } sur\, \Omega \ \ et \ \ |\gamma u| = \lambda_\Gamma\, \gamma u \ \text{ p.p. } sur\, \Gamma$$

L'énoncé et la preuve de ce lemme ont déjà été donnés dans la section 1.3.

Il est également utile de pouvoir écrire une estimation du même type que (3.8). Plus précisément, nous avons le

LEMME **3.4.2** *La solution* u *du problème continu (3.23), les multiplicateurs* λ_Γ *et* λ_Ω *associés par le lemme 1.3.3 et la solution* u_h *du problème discret correspondant vérifient, pour tout* $v_h \in X_h(\Omega)$ *:*

$$\begin{aligned} |u_h - u|^2_{1,2;\Omega} + C_F|u_h - u|^2_{0,2;\Gamma} \ \leq \ & (\boldsymbol{\nabla}(u_h - u), \boldsymbol{\nabla}(v_h - u))_{0,2;\Omega} \\ + \ & C_F(\gamma(u_h - u), \gamma(v_h - u))_{0,2;\Gamma} \\ + \ & S\int_\Gamma \left(\lambda^h_\Gamma - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u)\mathrm{d}\Gamma \\ + \ & Bi\int_\Omega \left(\lambda^h_\Omega - \lambda_\Omega\right) \boldsymbol{\nabla}(v_h - u)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} & \forall \lambda^h_\Omega \in \Lambda(\Omega) \quad \textit{tel que} \quad \lambda^h_\Omega.\boldsymbol{\nabla} v_h = \|\boldsymbol{\nabla} v_h\| \\ et \quad & \forall \lambda^h_\Gamma \in \Lambda(\Gamma) \quad \textit{tel que} \quad \lambda^h_\Gamma.\,\gamma v_h = |\gamma v_h| \end{aligned}$$

Là encore, ce lemme se démontre exactement comme la relation (3.8).

Désignons à présent (voir figure 3.2) par :

- Γ_z l'ensemble $\{x \in \Gamma \ ; \ u(x) = 0\}$ et $\Gamma^+ = \Gamma \backslash \Gamma_z$,

- $\gamma_{0,\varepsilon}$ l'ensemble $\{x \in \Gamma\ ;\ 0 < |u(x)| < \varepsilon\}$ et $\gamma_\varepsilon = \Gamma \backslash (\Gamma_z \cup \gamma_{0,\varepsilon})$,
- γ_h la réunion des arrêtes de $\partial\Omega_h$ qui contiennent au moins un point de transition adhérence/glissement,
- $\gamma_0 = \Gamma_z \backslash \gamma_h$ et $\gamma^+ = \Gamma^+ \backslash \gamma_h$.

Nous pouvons maintenant énoncer une estimation abstraite :

Proposition **3.4.1** *Soit $u \in H^1(\Omega)$ la solution du problème variationnel (3.23), et $u_h \in X_h(\Omega)$ la vitesse approchée associée. Alors on a, pour tout v_h dans $X_h(\Omega)$:*

$$
\begin{aligned}
|u-u_h|^2_{1,2;\Omega} + C_F|u-u_h|^2_{0,2;\Gamma} \leq \quad & |v_h - u|^2_{1,2;\Omega} + C_F|v_h-u|^2_{0,2;\Gamma} \\
+ \quad & Bi\, |v_h|_{1,1;\omega_0} \\
+ \quad & Bi \,\mathrm{mes}(\omega_h)\, |v_h - u|_{1,\infty;\omega_h} \\
+ \quad & Bi \,\mathrm{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})\, |v_h - u|_{1,\infty;\Omega_{0,\varepsilon}\cap\omega^+} \\
+ \quad & Bi \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon}|v_h - u|^2_{1,2;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \\ |v_h - u|^2_{1,\infty;\Omega_\varepsilon\cap\omega^+} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{\nabla} u\|} \end{array} \right. \\
+ \quad & S\, |v_h|_{0,1;\gamma_0} \\
+ \quad & S \,\mathrm{mes}(\gamma_h)^{1/2}\, |v_h - u|_{0,2;\gamma_h} \\
+ \quad & S \,\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon})^{1/2}\, |v_h - u|_{0,2;\gamma_{0,\varepsilon}\cap\gamma^+} \\
+ \quad & S \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon}|v_h - u|^2_{0,2;\gamma_\varepsilon\cap\gamma^+} \\ |v_h - u|^2_{0,\infty;\gamma_\varepsilon\cap\gamma^+} \displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{|\gamma u|} \end{array} \right.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

où c est une constante indépendante de Bi, S et h.

Preuve :

On voit qu'il suffit de modifier la preuve de la proposition 3.2.1 en estimant de manière détaillée le terme :

$$\int_\Gamma \left(\lambda^h_\Gamma - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u)\mathrm{d}\Gamma$$

Ceci s'effectue d'une manière semblable à l'estimation de l'autre terme non-linéaire en facteur de Bi, autrement dit en découpant l'intégrale suivant les trois sous domaines de $\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_h \cup \gamma^+$ (figure 3.2).

Tout d'abord, sur γ_0, on a par définition $u = 0$, et par ailleurs, $|\lambda^h_\Gamma| \leq 1$ et $|\lambda_\Gamma| \leq 1$. Il s'ensuit que :

$$\int_{\gamma_0} \left(\lambda^h_\Gamma - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u)\mathrm{d}\Gamma \leq 2\, |v_h|_{0,1;\gamma_0}$$

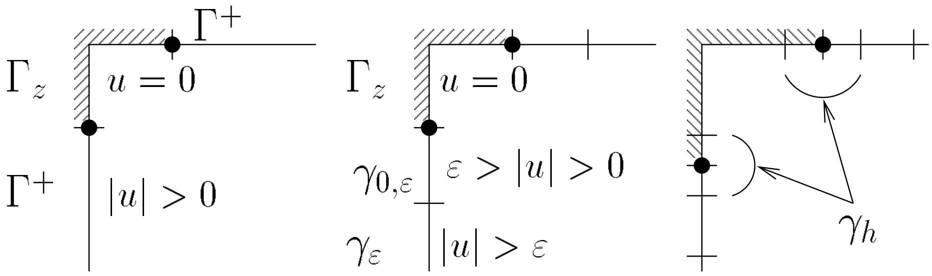


FIG. 3.2 – *Découpage de Γ pour établir une estimation d'erreur sur le problème de Poiseuille newtonien avec glissement à la paroi.*

Concernant la zone γ_h, nous nous contentons à nouveau d'une estimation un peu grossière en utilisant le fait que $|\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma| \leq |\lambda_\Gamma^h| + |\lambda_\Gamma| \leq 2$:

$$\int_{\gamma_h} \left(\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u) \mathrm{d}\Gamma \leq 2 \,\mathrm{mes}(\gamma_h)^{1/2} \, |v_h - u|_{0,2;\gamma_h}$$

Enfin, nous décomposons $\gamma^+ = (\gamma^+ \cap \gamma_{0\,\varepsilon}) \cup (\gamma^+ \cap \gamma_\varepsilon)$. On a d'une part :

$$\int_{\gamma^+ \cap \gamma_{0\,\varepsilon}} \left(\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u) \mathrm{d}\Gamma \leq 2 \mathrm{mes}(\gamma^+ \cap \gamma_{0\,\varepsilon})^{1/2} \, |v_h - u|_{0,2;\gamma_{0\,\varepsilon} \cap \gamma^+}$$

et, d'autre part, sur γ_ε, u et v_h sont non-nulles et les quantités λ_Γ^h et λ_Γ peuvent alors être rendues explicites de la manière suivante :

$$\lambda_\Gamma^h = \mathrm{signe}(\gamma v_h) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{\gamma v_h}{|\gamma v_h|} & \text{si} \qquad \gamma v_h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\lambda_\Gamma = \mathrm{signe}(\gamma u) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\gamma u}{|\gamma u|}$$

or, dans le cas où $\gamma v_h \neq 0$, on obtient, de manière analogue au lemme 3.2.1 :

$$\left|\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma\right| = \left| \frac{\gamma v_h}{|\gamma v_h|} - \frac{\gamma u}{|\gamma u|} \right| \leq 2 \frac{|\gamma(v_h - u)|}{|\gamma v_h| + |\gamma u|}$$

et dans le cas où $\gamma v_h = 0$, on a clairement :

$$\left(\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u) = \lambda_\Gamma \, \gamma u = |\gamma u| = \frac{|\gamma(v_h - u)|^2}{|\gamma v_h| + |\gamma u|}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+ \cap \gamma_\varepsilon} \left(\lambda_\Gamma^h - \lambda_\Gamma\right) \gamma(v_h - u) \mathrm{d}\Gamma & \leq 2 \int_{\gamma^+ \cap \gamma_\varepsilon} \frac{|\gamma(v_h - u)|^2}{|\gamma\, v_h| + |\gamma\, u|} \mathrm{d}\Gamma \\ & \leq 2 \times \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} |\gamma(v_h - u)|_{0,2;\gamma_\varepsilon \cap \gamma^+}^2 \\ \\ |\gamma(v_h - u)|_{0,\infty;\gamma_\varepsilon \cap \gamma^+}^2 \displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{|\gamma u|} \end{cases} \end{aligned}$$

CQFD. $\square$

3.4.2 Application au cas où $Bi = 0$

Dans la suite nous convenons que $\text{mes}(\gamma_h) = \mathcal{O}(h_1)$, où h_1 est destiné à être plus petit que h.

L'espace $X_h(\Omega)$ est à nouveau défini par $X_h(\Omega) = X_h^{k,0}(\Omega)$, pour $k \geq 1$. Les maillages que nous considérerons sont réguliers au sens déjà introduit dans la définition 3.2.1.

Pour le problème du glissement, nous ne disposons pas de théorème de régularité, ni d'exemples de solutions explicites où la transition adhérence-glissement est matérialisée par un ou plusieurs points sur la paroi. Nous devons donc être très prudents au sujet des hypothèses de régularité.

Contrairement au cas où l'adhérence est imposée, il est délicat d'émettre des hypothèses sur $\text{mes}(\Omega_{0,\varepsilon})$, car nous manquons d'écoulements de référence pour les justifier. Pour cette raison, nous nous limitons en fait au cas où $Bi = 0$. Dans un premier temps, nous ne ferons donc pas non plus d'hypothèses sur $\text{mes}(\gamma_{0,\varepsilon})$. Nous discuterons néanmoins, à la fin de cette section, de quelques hypothèses sur $\text{mes}(\gamma_{0,\varepsilon})$ dont les conséquences sont intéressantes.

Compte tenu de l'estimation (3.26), nous partirons donc de la relation :

$$\begin{array}{rl} |u-u_h|^2_{1,2;\Omega} + C_F\,|u-u_h|^2_{0,2;\Gamma} \leq & |v_h-u|^2_{1,2;\Omega} + C_F\,|v_h-u|^2_{0,2;\Gamma} \\ + & S\,|v_h|_{0,1;\gamma_0} \\ + & S\,\text{mes}(\gamma_h)^{1/2}\,|v_h-u|_{0,2;\gamma_h} \\ + & S\,\text{mes}(\gamma_{0,\varepsilon}\cap\gamma^+)\,|v_h-u|_{0,2;\gamma_{0,\varepsilon}\cap\gamma^+} \\ + & S\,\frac{1}{\varepsilon}|v_h-u|^2_{0,2;\gamma_\varepsilon\cap\gamma^+} \end{array} \qquad (3.27)$$

Comme pour le problème de Bingham, nous prendrons $v_h = \Pi_h(u)$, l'opérateur d'interpolation Π_h étant défini au théorème 3.2.1. Nous utiliserons le fait que $\gamma(\Pi_h(.))$ peut être identifié à l'opérateur d'interpolation sur Γ et nous ferons cette identification. Ceci conduit en particulier à la simplification suivante :

$$|v_h|_{0,1;\gamma_0} = |\Pi_h(u)|_{0,1;\gamma_0} = 0$$

Estimons maintenant chacune des erreurs d'interpolation apparaissant dans l'estimation (3.27), en utilisant une seule hypothèse de régularité :

HYPOTHÈSE **3.4.1** *Il existe $t \in [1, 2[$, tel que $u \in H^{t+1}(\Omega)$.*

Notons que puisque $u \in H^2(\Omega)$, on a $u \in C^0(\overline{\Omega})$, ce qui implique que $\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon} \cap \gamma^+)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Pour la suite, nous choisissons $\varepsilon = c_0\, h_1$ où $c_0 > 0$ est une constante que l'on se donne. Nous allons voir qu'un tel choix de ε n'est pas nécessairement un handicap.

- Commençons par observer le terme qui apparaîtra comme le plus pénalisant dans l'estimation d'erreur. Posons pour alléger l'écriture :

$$\psi(h_1) = \mathrm{mes}(\gamma_{0,c_0\, h_1} \cap \gamma^+)$$

Par ailleurs, une application directe des propriétés de Π_h nous permet d'écrire :

$$|\Pi_h(u) - u|_{0,2;\gamma^+} \leq |\Pi_h(u) - u|_{0,2;\Gamma} \leq c\, h^{t+1/2}|u|_{t+1/2,2;\Gamma}$$

En outre, par continuité de l'application de trace, de $H^{t+1}(\Omega)$ dans $H^{t+1/2}(\Gamma)$ et vu le choix de $\varepsilon = c_0\, h_1$, on obtient finalement :

$$\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon} \cap \gamma^+)^{1/2}|\Pi_h(u) - u|_{0,2;\gamma_{0,\varepsilon}\cap\gamma^+} \leq c\, \psi(h_1)\, h^{t+1/2}|u|_{t+1,2;\Omega}$$

- Il nous reste un terme lié à ε,

$$\frac{1}{\varepsilon}|\Pi_h(u) - u|^2_{0,2;\gamma^+} \leq c\, h_1^{-1} h^{2t+1}|u|^2_{t+1,2;\Omega}$$

- le terme lié à γ_h est estimé de manière analogue, en remarquant que $\mathrm{mes}(\gamma_h) = \mathcal{O}(h_1)$. Ceci procure l'estimation :

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}(\gamma_h)^{1/2}\, |\Pi_h(u) - u|_{0,2;\gamma_h} &\leq c\, h_1^{1/2} \times h_1^{t+1/2}|u|_{t+1/2,2;\gamma_h} \\ &\leq c\, h_1^{t+1}\, |u|_{t+1/2,2;\Gamma} \leq c\, h_1^{t+1}\, |u|_{t+1,2;\Omega}\end{aligned}$$

- il reste à faire une estimation du terme d'interpolation sur Ω tout entier,

$$|\Pi_h(u) - u|_{1,2;\Omega} \leq c\, h^t|u|_{t+1,2;\Omega}$$

$$|\Pi_h(u) - u|_{0,2;\Gamma} \leq c\, h^{t+1/2}|u|_{t+1,2;\Omega}$$

Ainsi, en tenant compte de ces diverses estimations, nous obtenons le :

Théorème **3.4.1** *On considère $Bi = 0$ dans le problème (3.23). On fait l'hypothèse de régularité 3.4.1. On suppose que le maillage est régulier. Alors :*

$$\begin{aligned}&\left(|u - u_h|^2_{1,2;\Omega} + |u - u_h|^2_{0,2;\Gamma}\right)^{1/2} \\ &\leq \quad c\, h^t\, |u|_{t+1,2;\Omega} + c\, S\, |u|^{1/2}_{t+1,2;\Omega} \left\{\psi(h_1)^{1/2} h^{(2t+1)/4} + h_1^{-1/2} h^{t+1/2} + h_1^{(t+1)/2}\right\}\end{aligned}$$

où $\psi(h_1)$ tends vers 0 quand h_1 tend vers 0. Autrement dit, on a, pour un maillage quasi-uniforme :

$$\left(|u - u_h|^2_{1,2;\Omega} + |u - u_h|^2_{0,2;\Gamma}\right)^{1/2} = \mathcal{O}\left(\psi(h)^{1/2} h^{(2t+1)/4}, h^{(t+1)/2}\right)$$

Puisque ψ est bornée, ce résultat nous conduit à une majoration grossière en $\mathcal{O}(h^{3/4})$, en supposant $u \in H^2(\Omega)$, $k = 1$ et le maillage régulier.

Remarque **3.4.1** *Considérons l'inégalité suivante, démontrée par Ionescu et Touzani [46] (la démonstration est disponible dans la thèse de Nguyen [53]) :*

$$|v|_{0,2;\Gamma}^2 \leq |v|_{0,2;\Omega} ||v||_{1,2;\Omega} \ , \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

Cela fournit un autre moyen pour estimer l'erreur d'interpolation :

$$\begin{aligned} |\Pi_h(u) - u|_{0,2;\Gamma}^2 &\leq |\Pi_h(u) - u|_{0,2;\Omega} ||\Pi_h(u) - u||_{1,2;\Omega} \\ &\leq c\, h^{t+1} |u|_{t+1,2;\Omega}\, h^t ||u||_{t+1,2;\Omega} \\ &\leq c\, h^{2t+1} ||u||_{t+1,2;\Omega}^2 \end{aligned}$$

On retrouve la même estimation de l'erreur d'interpolation que précédemment.

Nous pouvons discuter sur quelques hypothèses intéressantes à tenter de valider, concernant $\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon})$.

1. Si on fait l'hypothèse :

$$\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon}) \leq c_1\, \varepsilon \tag{3.28}$$

on simplifie le problème car cela permet d'annuler un terme dans l'inégalité (3.27). En effet, en prenant $c_0 = \dfrac{1}{2\, c_1}$, on a alors :

$$\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon} \cap \gamma^+) = 0$$

Une application aux maillages réguliers et adaptés est immédiate :

Corollaire **3.4.1** *On considère $Bi = 0$ dans le problème (3.23). Soit $k \geq 1$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On fait l'hypothèse de régularité 3.4.1, avec $t \leq k$ et on considère que (3.28) a lieu. On suppose que le maillage est régulier.*

(a) Si le maillage est quasi-uniforme, alors :

$$\left(|u - u_h|_{1,2;\Omega}^2 + |u - u_h|_{0,2;\Gamma}^2\right)^{1/2} = \mathcal{O}\left(h^{(t+1)/2}\right)$$

(b) Si le maillage est tel que $h_1 = h^\delta$, avec $\delta = \dfrac{2t+1}{t+2}$ alors :

$$\left(|u - u_h|_{1,2;\Omega}^2 + |u - u_h|_{0,2;\Gamma}^2\right)^{1/2} = \mathcal{O}(h^\alpha), \text{ où } \alpha = \frac{(2t+1)(t+1)}{2(t+2)}$$

On constate alors que le cas $k = 1$ est optimal avec un maillage quasi-uniforme, au sens où il donne :

$$\left(|u - u_h|_{1,2;\Omega}^2 + |u - u_h|_{0,2;\Gamma}^2\right)^{1/2} = \mathcal{O}(h)$$

mais également au sens où on a alors $\delta = \alpha = 1$.

2. On peut affaiblir l'hypothèse précédente (c'est-à-dire $\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$) en considérant que :

$$\mathrm{mes}(\gamma_{0,\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \tag{3.29}$$

Dans ce cas, on ne peut plus annuler $\phi(h_1)$, mais on peut préciser :

$$\phi(h_1) = \mathcal{O}(h_1^{1/2})$$

On peut alors constater que le cas $k = 1$ reste optimal :

COROLLAIRE **3.4.2** *On considère $Bi = 0$ dans le problème (3.23). Soit $k \geq 1$ dans la définition de $X_h(\Omega)$. On fait l'hypothèse de régularité 3.4.1, avec $t \leq k$ et on considère que (3.29) a lieu. On suppose que le maillage est régulier. Alors :*

$$\left(|u - u_h|^2_{1,2;\Omega} + |u - u_h|^2_{0,2;\Gamma}\right)^{1/2} = \mathcal{O}\left(h^{(t+1)/2}\right)$$

3.5 Tests numériques

Nous avons voulu mettre à l'épreuve nos estimations d'erreur théoriques. Pour cela, nous avons effectué une série de calculs numériques sur un cas test répondant parfaitement aux hypothèses de régularité. Ce cas test est tout simplement l'exemple qui nous a inspiré les hypothèses en question, à savoir le problème de Poiseuille circulaire.

Nous avons programmé en C++ la méthode décrite au chapitre 2 (excepté le mailleur), dans le cas de domaines polygonaux. Dans la mesure où nous n'avons pas programmé la technique isoparamétrique, nous avons en fait suivi la même démarche que M. Fortin dans sa thèse [26]. La figure 3.3 représente le principe de ce test. Si on appelle u la solution associée à $\Omega = D(0;1)$, cette démarche consiste à restreindre u à un carré de côté $\sqrt{2}$ inscrit dans $\Omega = D(0;1)$. Il est clair que u est solution du problème de Poiseuille sur ce carré avec des conditions aux limites non-homogènes. C'est un problème que nous pouvons traiter avec notre outil de calcul.

Il est à noter que nous n'avons pas étudié la dépendance en Bi de l'erreur et que, dans toute la suite, nous utilisons la valeur $Bi = 0.3$, fixée une fois pour toutes. De plus, nous imposons l'adhérence à la paroi du domaine circulaire[5]. Ceci nous place dans une situation où la zone rigide est importante, sans pour autant nous placer au voisinage du blocage.

Nos tests numériques consistent à mesurer l'erreur $e_h = \Pi_h(u) - u_h$ dans la semi-norme $H^1(\Omega)$ et dans la norme $L^\infty(\Omega)$ pour les approximations P_1 et P_2, ainsi que pour des maillages quasi-uniformes et adaptés. Nous avons employé l'algorithme d'Uzawa décrit

5. notons que cela ne change rien car il n'y a pas de transition adhérence/glissement dans le cas d'une section circulaire

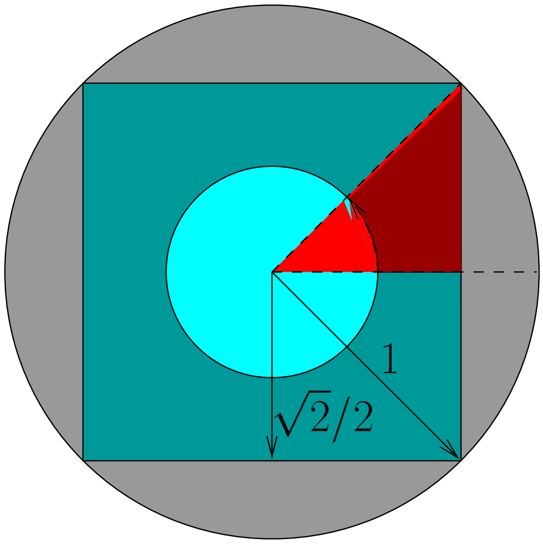


FIG. 3.3 – *Principe du test numérique (emprunté à M. Fortin [26]) pour la mesure d'erreur dans l'approximation par éléments finis.*

dans la section 2.2. La procédure d'adaptation de maillage est celle que nous avons décrite dans la section 2.3.

Pour effectuer nos comparaisons, nous avons utilisé trois familles de maillages :

1. maillages quasi-uniformes de pas $h \in \left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{40}; \frac{1}{80}; \frac{1}{160}\right\}$,
2. maillages adaptés isotropes[6], de coefficients $c_0 \in \left\{\sqrt{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right\}$,
3. maillages adaptés anisotropes, de coefficients $c_0 \in \left\{\sqrt{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

La dernière famille de maillage ne correspond à aucune de nos estimations d'erreur. Cependant, nous avons voulu connaître la différence entre un maillage adapté isotrope (soit régulier) et un maillage adapté anisotrope sur les points suivants :

- Mesure de l'erreur à nombre de degrés de liberté identique,
- Précision au voisinage de la frontière des zones rigides.

3.5.1 Un premier aperçu

Quelques-uns des maillages utilisés sont représentés avec la solution correspondante, sur les figures Fig. 3.4, Fig. 3.5 et Fig. 3.6. La frontière du bouchon rigide (représenté en gris

6. tout comme les maillages anisotropes, ces maillages sont générés par BAMG à l'aide du critère $\varphi = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\nabla} u}$

clair) ont été déterminées par l'isovaleur :

$$\|R_h(\boldsymbol{\sigma}_h)\| = Bi$$

où R_h est l'opérateur de projection au sens $L^2(\Omega)^2$ sur $X_h^{1,0}(\Omega)^2$. Comme on peut s'y attendre, lorsque c_0 et h_0 diminuent, les maillages se densifient et la frontière du bouchon rigide se précise. Remarquons tout de suite Fig. 3.4 que, pour des maillages quasi-uniformes, la différence de précision entre P_1 et P_2 n'est pas visible. Par contre, on constate la supériorité des résultats avec maillages adaptés sur les résultats avec maillages quasi-uniformes.

Nous pouvons constater sur la figure Fig. 3.7 l'évolution du maillage et de la frontière des zones rigides au cours du procédé d'adaptation, dans le cas anisotrope. Nous voyons nettement le maillage se densifier au voisinage de la frontière de la zone rigide ce qui est l'idée développée dans l'estimation d'erreur. Simultanément, la frontière du bouchon rigide se précise en prenant progressivement la forme d'un cercle.

Observons pour finir la figure Fig. 3.8. Elle représente, pour un même nombre voisin de degrés de liberté (entre 966 et 934), un maillage quasi-uniforme, un maillage adapté isotrope et un maillage adapté anisotrope, ainsi que la carte des zones rigides correspondant à chacun de ces maillages. Nous pouvons constater la nette amélioration de la forme et de la localisation de la frontière du bouchon rigide dans le cas du maillage adapté anisotrope. Notons également que le résultat le moins satisfaisant apparaît dans le cas P_2-uniforme. En fait, on peut classer l'impression de précision sur ces figures de la manière suivante :

$$P_2\text{-uniforme} \; < \; P_1\text{-uniforme} \; < \; P_2\text{-isotrope} \; < \; P_2\text{-anisotrope}$$

3.5.2 Contrôle de la mesure de l'erreur

Commençons par observer la figure 3.9. Nous nous sommes assuré, pour chacun des maillages uniformes testés, que le résidu de l'algorithme était suffisamment faible pour que deux décimales dans l'erreur e_h semblent stabilisées.
La dépendance au résidu de l'erreur $|e_h|_{1,2;\Omega}$ est présentée pour les cas P_1 et P_2 sur la partie supérieure de la figure Fig. 3.9. Dans les deux cas, nous avons tracé les courbes pour le plus grossier et le plus fin des maillages.
Bien entendu, nous avons contrôlé cette convergence de e_h lorsque le résidu tend vers 0 pour tous les maillages utilisés, dans la semi-norme $|.|_{1,2;\Omega}$ mais aussi dans la norme $|.|_{0,\infty;\Omega}$.

Un tel contrôle nous a paru indispensable dans une résolution où une méthode itérative est utilisée. Nous avons en effet constaté que certains auteurs de simulations numériques n'ont pas pris ce genre de précautions et ont ainsi obtenu des résultats erronés. C'est le cas par exemple de Huilgol et Panizza [43] qui, en utilisant le même algorithme, avec une approximation P_1, sur un problème de Poiseuille avec une section en «L» et adhérence à la paroi, se contentent d'un résidus de l'ordre de 10^{-4}. On constate ici, que, pour notre problème qui est plus régulier, un tel résidu est trop faible si on prend un maillage de pas $h < 1/10$.

Lorsqu'on observe la partie inférieure de la figure Fig. 3.9, on constate que, pour P_2 comme pour P_1, la convergence sur des maillages uniformes semble être du même ordre, puisque les deux courbes paraissent être approximativement des droites de pente 1. Ceci vient donc confirmer les affirmations de la littérature et coïncide avec les estimations d'erreurs que nous avons établies dans le cas d'une intégration exacte.

Observons à présent la figure Fig. 3.10. Nous avons contrôlé la convergence du processus d'adaptation de maillage au sens suivant :

1. Le nombre d'élément de stabilise autour d'une valeur constante,
2. Les erreurs $|e_h|_{1,2;\Omega}$ et $|e_h|_{0,\infty;\Omega}$ se stabilisent autour d'une valeur constante.

Nous nous sommes assuré de ce phénomène dans les cas isotropes et anisotropes, pour chacun des maillages adaptés générés. La partie supérieure de la figure Fig. 3.10 montre en exemple le cas anisotrope, pour deux valeurs de c_0 éloignées.

En outre, nous avons encore vérifié systématiquement la convergence de l'erreur avec le résidu, comme l'illustre la partie inférieure gauche de la figure Fig. 3.10.

La conséquence de l'adaptation de maillage sur la convergence de l'erreur $|e_h|_{1,2;\Omega}$ est montrée, dans le cas anisotrope, sur la partie inférieure droite de la figure Fig. 3.10. Nous obtenons approximativement une droite de pente 2 ce qui correspond au résultat attendu.

Précisons que nous avons effectué les mêmes vérifications et observations dans le cas isotrope et que les résultats obtenus sont très semblables. Ceci va apparaître plus en détail dans la section suivante où l'on compare des courbes de convergence pour les différents types de maillages considérés.

3.5.3 Comparaison des résultats sur les trois types de maillages

Observons sur la figure Fig. 3.11, les courbes de convergence en semi-norme $H^1(\Omega)$ et en norme $L^\infty(\Omega)$. Nous pouvons nettement constater les points suivants :

- sur des maillages uniformes, on obtient, à une constante multiplicative près, la même précision pour P_1 et P_2 soit, pour N degrés de liberté : $|u - u_N|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(N^{-1/2})$
- l'adaptation de maillage en P_2 permet de rendre optimale la convergence P_2, au sens où l'on observe, pour N degrés de liberté : $|u - u_N|_{1,2;\Omega} = \mathcal{O}(N^{-1})$. De plus, l'amélioration par rapport aux maillages uniformes est nettement visible.

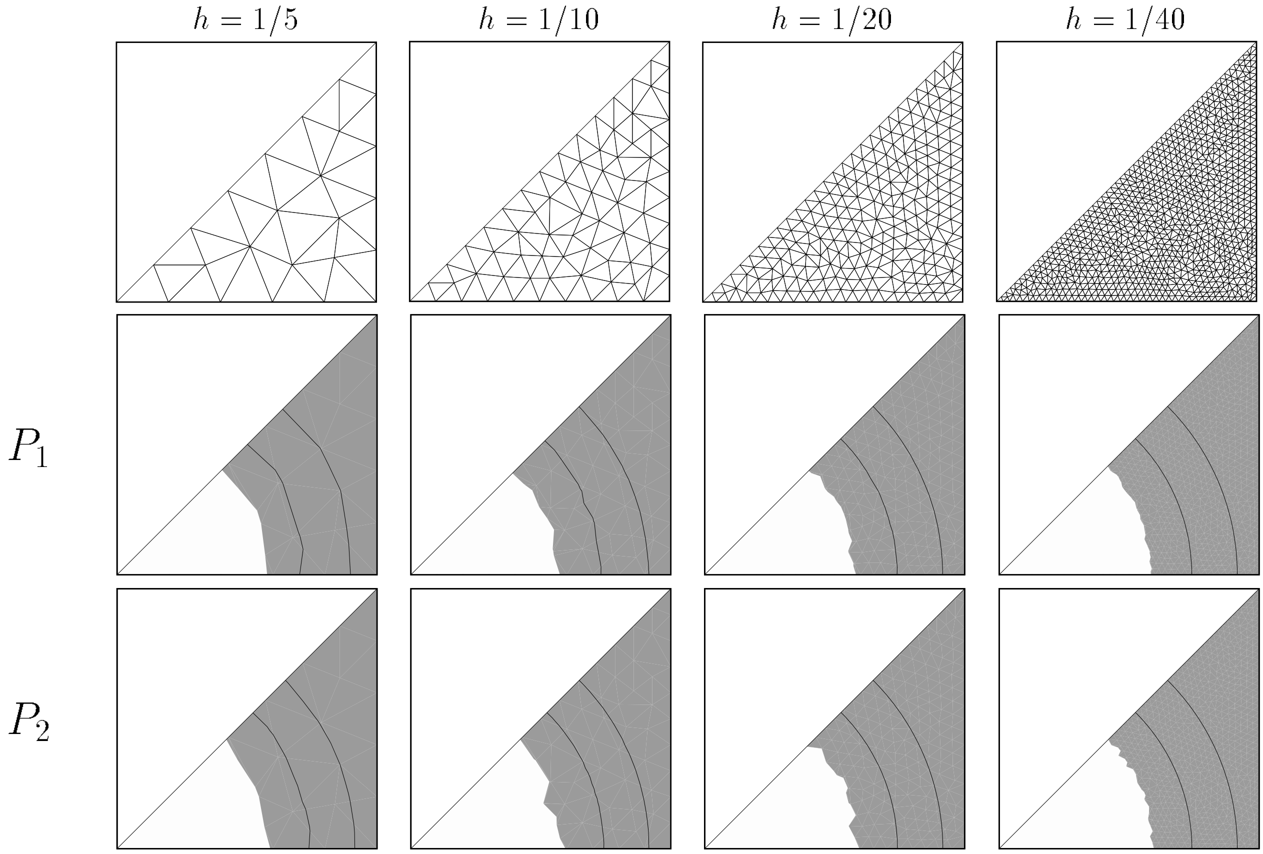


FIG. 3.4 – *Les quatre maillages quasi-uniformes les moins fins utilisés pour les tests de convergence sur le problème de Poiseuille.*

- sur des maillages adaptés avec P_2, on obtient, à une constante multiplicative près, la même précision dans les cas isotropes et anisotropes.

Les deux premiers points correspondent donc aux estimations d'erreurs précédemment établies dans le cas d'une formulation en *inéquation variationnelle* de la loi de comportement approchée (problème 2.1.1) et pour des maillages réguliers. Puisque nous avons programmé une *formule explicite* dans nos algorithmes (voir section 2.2), le u_h que nous calculons ici est différent de celui des estimations d'erreurs. Ainsi ces mesures comparées aux estimations d'erreurs semblent bien montrer que l'introduction des formules explicites dans les algorithmes permet une simplification de programmation tout en maintenant la précision de l'approximation.

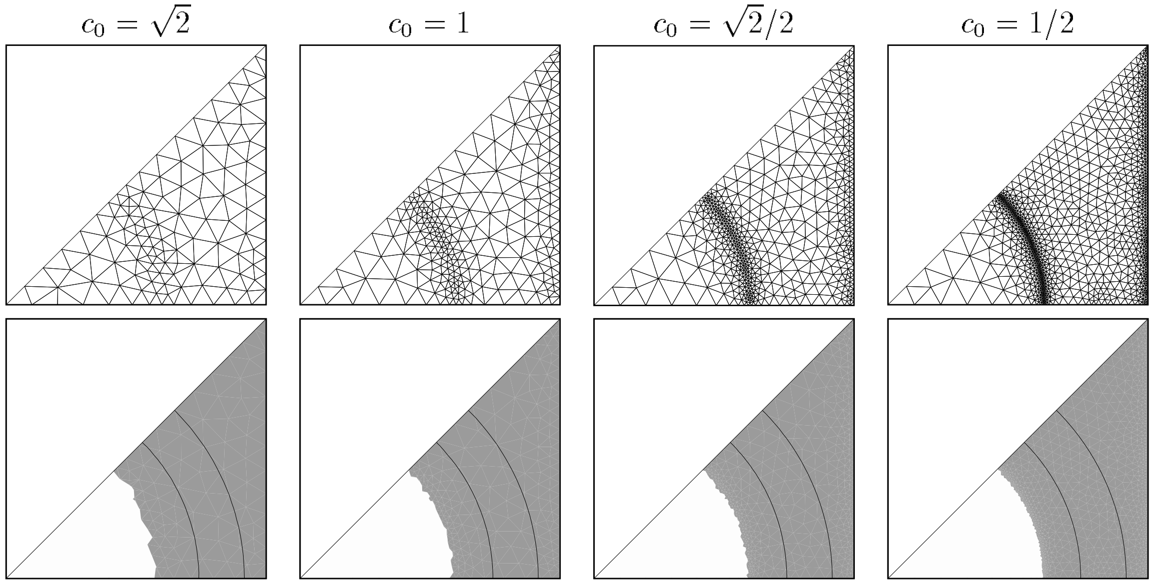


FIG. 3.5 – *Les quatre maillages isotropes utilisés pour les tests de convergence sur le problème de Poiseuille.*

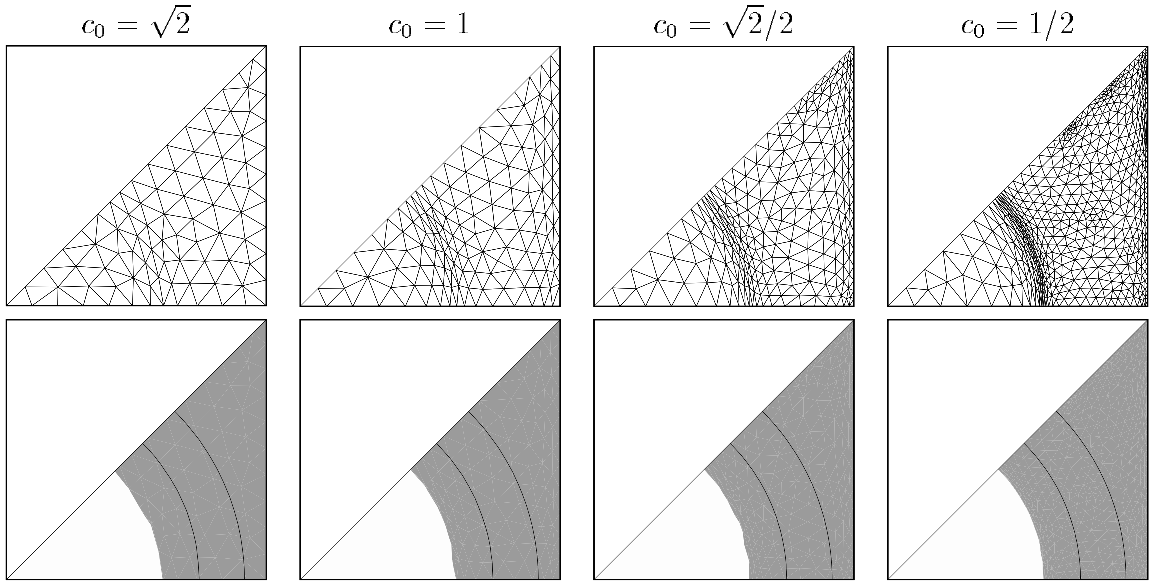


FIG. 3.6 – *Les quatre premiers maillages anisotropes utilisés pour les tests de convergence sur le problème de Poiseuille.*

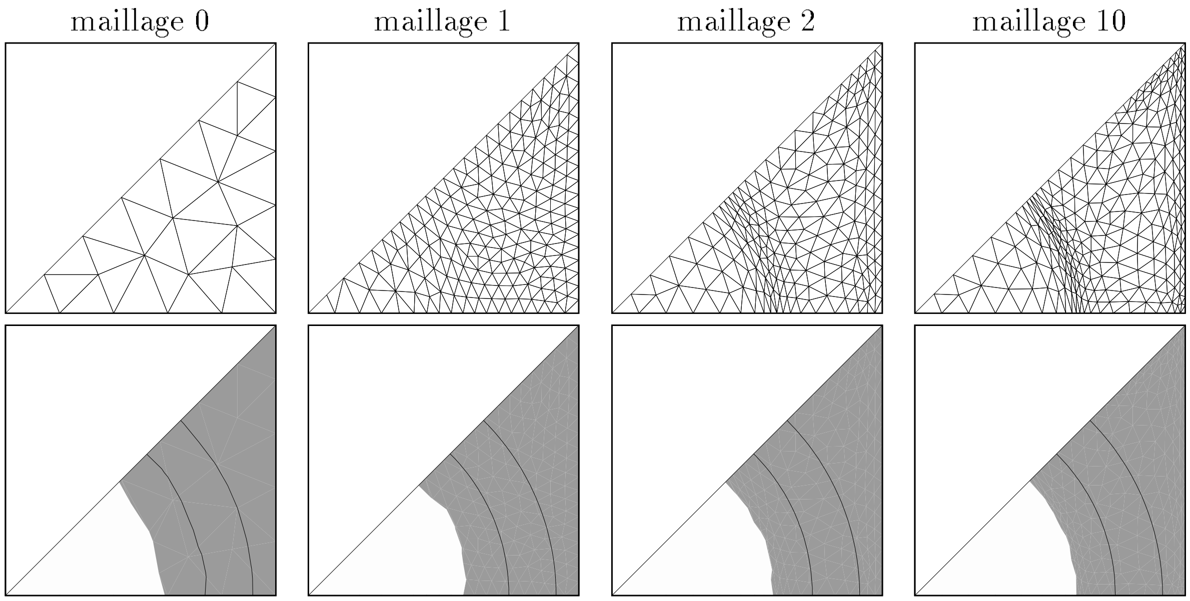


FIG. 3.7 – *Évolution du maillage et de la zone rigide au cours des itérations du procédé d'adaptation, pour* $c_0 = \frac{1}{2}$.

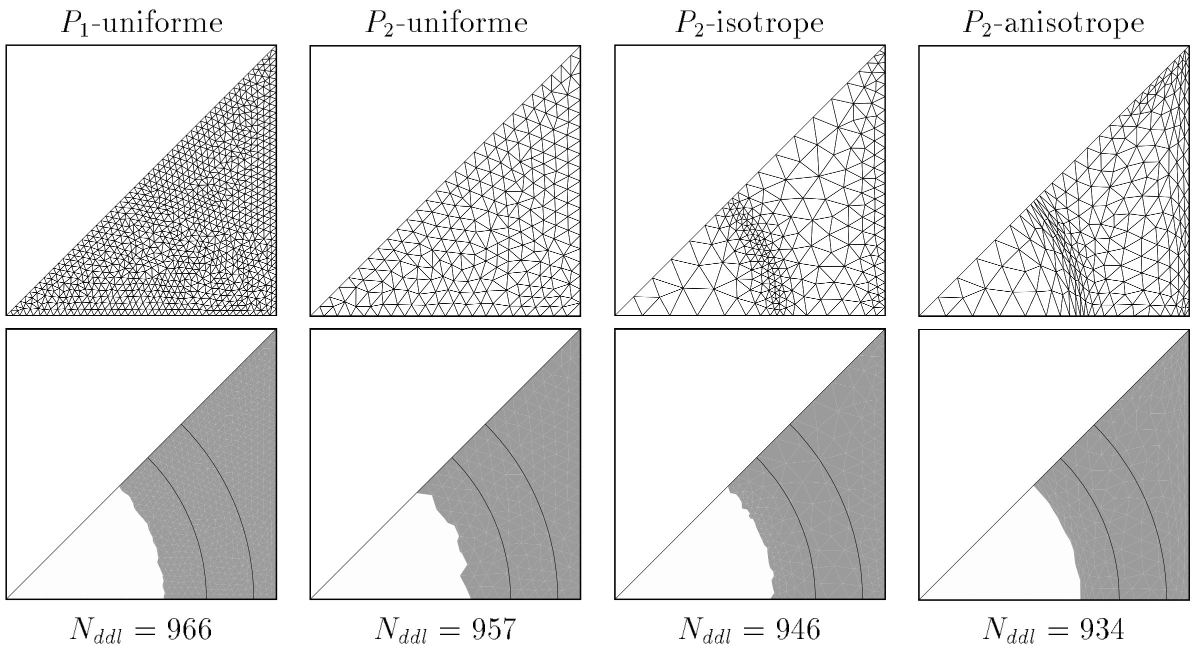


FIG. 3.8 – *Maillages et zones rigides, pour un nombre voisin de degrés de liberté.*

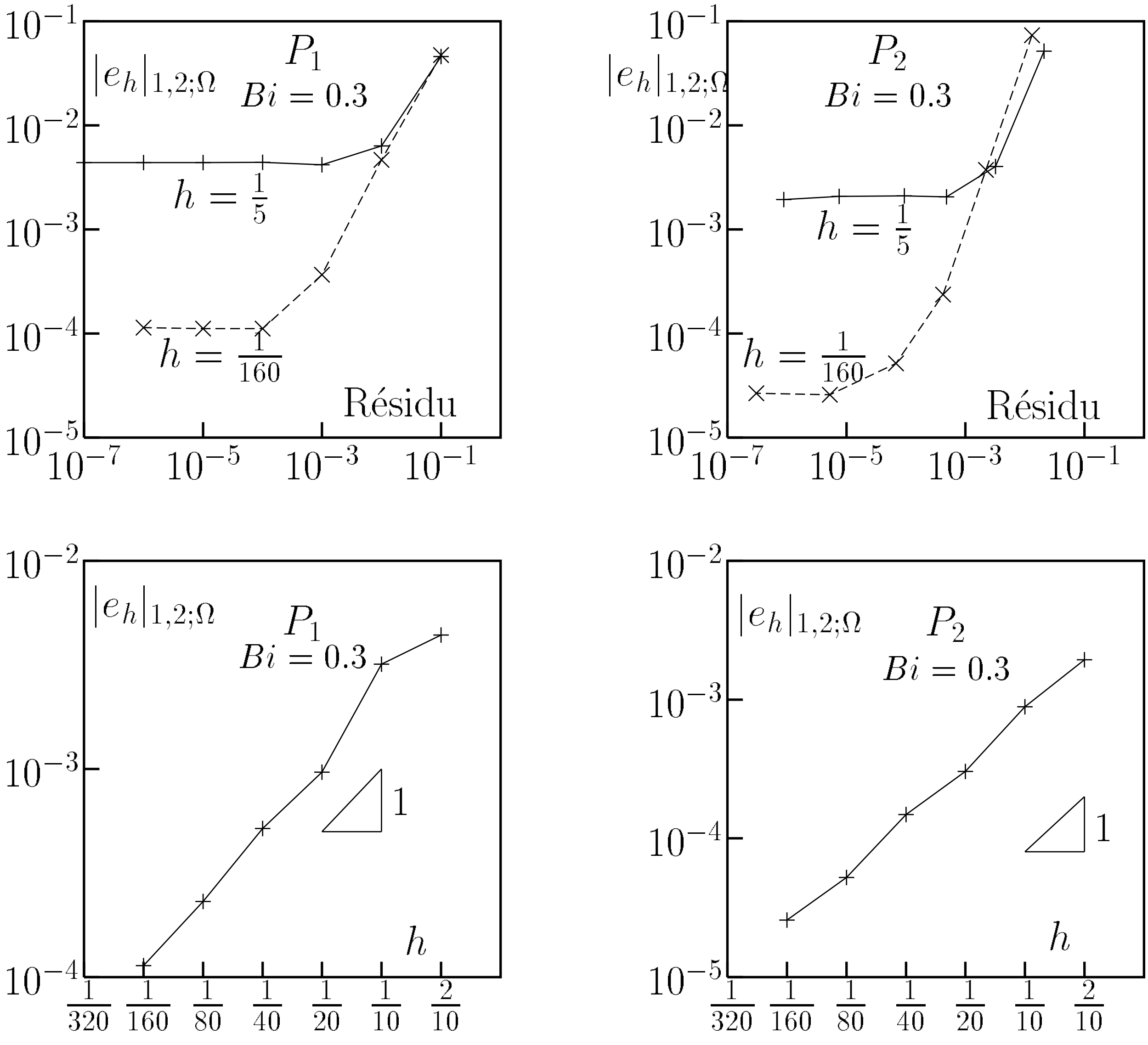


FIG. 3.9 – *Mesure de l'erreur $e_h = \Pi_h(u) - u_h$ en semi-norme $H^1(\Omega)$ sur un maillage quasi-uniforme pour les approximations P_1 et P_2, en fonction du résidu et du pas h.*

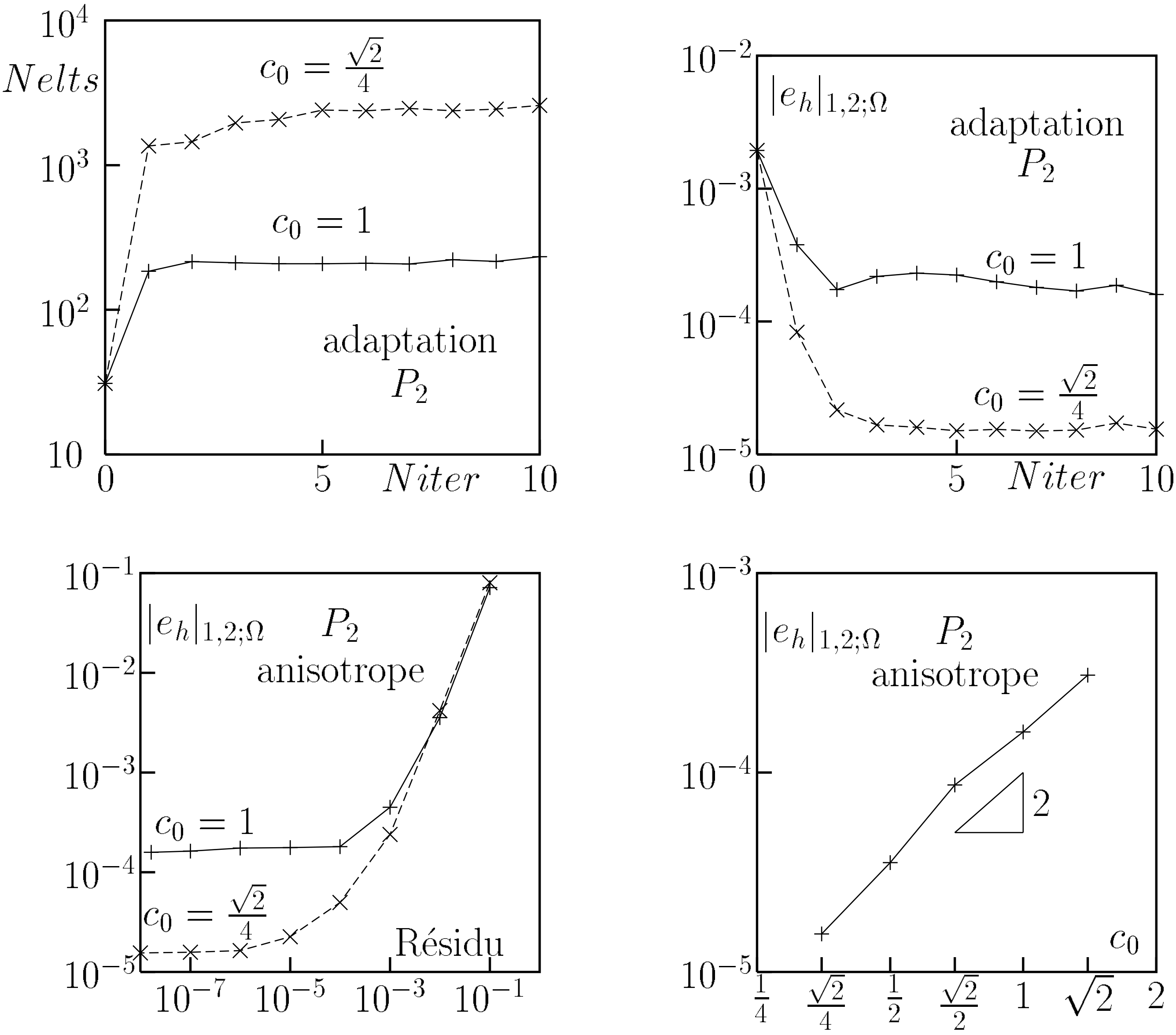


FIG. 3.10 – *Convergence du procédé d'adaptation de maillage anisotrope et détermination de l'erreur* $e_h = \Pi_h(u) - u_h$ *en semi-norme* $H^1(\Omega)$ *pour plusieurs valeurs du coefficient* c_0*, dans le cas anisotrope.*

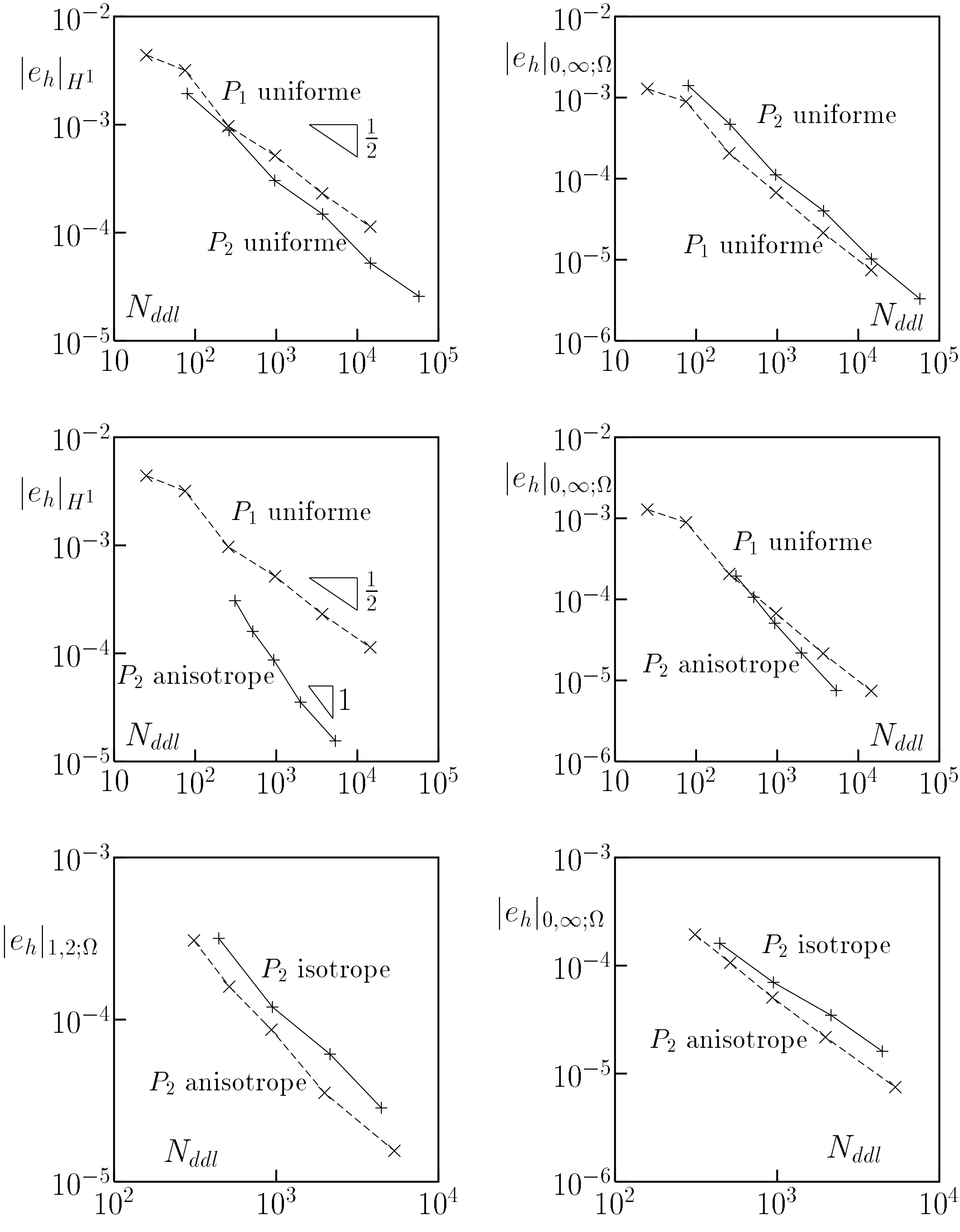


FIG. 3.11 – *Comparaisons de l'erreur* $e_h = \Pi_h(u) - u_h$ *en semi-norme* $H^1(\Omega)$ *et en norme* $L^\infty(\Omega)$ *: (a) Comparaison* P_1*-uniforme et* P_2*-uniforme ; (b) Comparaison* P_1*-uniforme et* P_2*-anisotrope ; (c) Comparaison* P_2 *adapté isotrope et anisotrope.*

Chapitre 4

Simulation numérique pour une section carrée

4.1 Introduction

Le problème de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique **avec adhérence à la paroi** a été abordé sous de nombreux aspects.

Une étude mathématique approfondie en a été faite par Mossolov et Miasnikov [50]-[51]-[52] [1]. Ces auteurs ont dégagé certains résultats remarquables sur l'existence et la forme des zones rigides. En particulier, ils ont été les premiers à caractériser la valeur critique du seuil en écoulement à partir de laquelle le blocage a lieu.

Plus tard, Duvaut et Lions [23] clarifient la question de l'existence et de l'unicité et renouvellent l'étude mathématique en utilisant le contexte des inéquations variationnelles. Ils retrouvent certaines propriétés déjà établies par Mossolov et Miasnikov. Ils en établissent également de nouvelles.

L'étude numérique démarre avec la thèse de Fortin [26]. Les moyens informatiques de l'époque ne permettaient cependant pas d'obtenir des résultats suffisamment précis pour compléter les travaux de Mossolov et Miasnikov et de Duvaut et Lions. En outre, l'objectif de Fortin était d'avantage de nature numérique que rhéologique.

Récemment, le modèle régularisé de Bercovier-Engelman [6] (voir annexe régularisation) a été utilisé par Taylor et Wilson [65] pour étudier le cas d'une section rectangulaire. Les méthodes de lagrangien augmentée de Fortin-Glowinski [34] ont été utilisées par Huilgol et Panizza [43] pour résoudre le cas d'une section en «L». Dans un travail récent, Saramito

1. D'ailleurs, M. Fortin parle dans sa thèse du «problème de Mossolov»

et al. [60] traitent de manière complète le cas de la section carré *avec adhérence à toute la paroi*, par la méthode numérique décrite au chapitre 2. Les résultats obtenus sont alors plus complets et plus précis que ceux de Taylor et Wilson, ils retrouvent et complètent les résultats de Mossolov et Miasnikov.

Le travail que nous proposons a pour but de prolonger ces différents résultats en remplaçant la condition d'adhérence à la paroi par la condition de glissement. Le problème aux limites qui en résulte a été donné dans le chapitre 1, section 1.1. Rappelons que la formulation variationnelle est donnée au chapitre 1 section 1.2 par les relations (1.9)-(1.13) et la proposition 1.2.1, et que le problème continu est bien posé (d'après la proposition 1.2.3).

Nous proposons une étude numérique détaillée puis synthétique de la section carrée. Nous avons utilisé pour cela la méthode d'éléments finis décrite au chapitre 2, section 2.1, avec une approximation P_1 de la vitesse et P_0 des contraintes (voir l'exemple 2.1.1). Nous appliquons l'algorithme 2.2.1 (Uzawa). Nous avons vu que cette démarche donne un problème discret bien posé (problème 2.1.1, proposition 2.1.1 et exemple 2.1.1) et une méthode d'approximation convergente (théorème 2.2.1 et chapitre 3). Enfin, nous utilisons le procédé d'adaptation de maillage décrit au chapitre 2 dans la section 2.3, avec $c_0 = 1$. Remarquons tout de suite que notre solveur pour ce problème est validé par les mesures d'erreurs du chapitre 3, section 3.5.

4.2 Étude numérique de la section carrée

Le schéma Fig. 4.1 résume les éléments du problème, dans le cas de la section carrée. La section carrée possède un demi-côté de longueur a. Ce sera notre longueur de référence. La vitesse de référence est ici fixée à l'unité. Ceci donne l'expression des trois nombres sans dimensions du problème :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{\eta\, a}, \quad S = \frac{s_g}{f\, a}, \quad C_F = \frac{c_f\, a}{\eta}$$

On fixera le nombre C_F à l'unité dans toute la suite.

Par soucis d'économie, nous utilisons la symétrie du problème pour réduire au huitième le domaine de calcul. Les conditions aux limites sont alors précisées sur le schéma Fig. 4.1.b :

- Glissement sur la paroi,
- $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sur les axes de symétrie.

Nous allons dans la suite reprendre le vocabulaire employé par Saramito et al. [60], où rappelons-le, l'adhérence est imposée sur la paroi. Dans cet article, il est question de deux types de zones rigides :

- des *zones mortes* situées dans les coins,
- un *bouchon* situé au centre du domaine Ω

et bien sûr, une *zone cisaillée* qui les sépare. Ce sont les termes que nous emploierons. Un vocabulaire spécifique au glissement sera introduit au cours de la présentation des résultats. La figure Fig. 4.2 résume l'ensemble du vocabulaire employé dans ce travail.

4.2.1 Effet du glissement à seuil pour un modèle newtonien

Commençons par observer Fig. 4.3.a le profil de vitesse le long de la paroi, pour différentes valeurs du seuil de glissement S. Chacun des profils décrit une courbe décroissante, de tangente nulle à l'origine. De plus nous constatons qu'en chaque point, lorsque le nombre S augmente, la vitesse décroît tout en restant positive. Nous pouvons remarquer qu'il existe une partie de la paroi où la vitesse est nulle (adhérence) et une autre où la vitesse est strictement positive (glissement). L'étendue de ces deux régions dépend de la valeur de S. De manière générale, nous voyons qu'il est toujours possible de délimiter la *zone de glissement* par l'intervalle $[0; Y_T(S)]$ et la *zone d'adhérence* par $]Y_T(S); 1]$. Le point $Y_T(S) \in [0; 1]$ sera appelé *point de transition*. Nous constatons qu'il existe des valeurs de S où l'adhérence n'a jamais lieu (par exemple $S = 0$). Inversement, pour certaines autres valeurs de S, c'est le glissement qui n'a jamais lieu. Comme la vitesse décroît uniformément avec S, ceci fait apparaître trois régimes d'écoulement.

1. Le premier correspond au cas où le glissement à lieu tout le long de la paroi. Nous constatons qu'il est déterminé par toutes les valeurs de S inférieures à une valeur limite, notée S_G [2]. Nous parlerons du *régime de glissement total*.
2. Le deuxième correspond au cas où, au contraire, l'adhérence est obtenue sur toute la longueur de la paroi. Ce régime est obtenu pour les valeurs de S supérieures à une valeur limite que l'on note S_A [3]. Nous parlerons du *régime d'adhérence totale*.
3. Le dernier régime correspond à l'ensemble des valeurs de S comprises entre S_G et S_A. Nous dirons qu'il s'agit du *régime transitoire* où l'adhérence et le glissement ont lieu chacun sur une partie de la paroi.

Dans le régime du glissement total, nous observons que chaque profil s'obtient à partir du cas $S = 0$ par une simple translation. Plus précisément :

$$u_{S;\Gamma}(y) = u_{0;\Gamma}(y) - S$$

2. l'indice «G» vient de «glissement»
3. l'indice «A» vient de «adhérence»

Cette relation s'obtient facilement en remarquant que $\dfrac{\partial u}{\partial n} > 0$. En effet la loi de glissement s'écrit alors sur Γ :

$$(u_S + S) = -\frac{\partial(u_S + S)}{\partial n}$$

et par ailleurs, on a sur Ω : $-\triangle(u_S + S) = 1$ Donc, en fait, pour $S \leq S_G$, la solution s'écrit $u_S = u_0 - S$, où u_0 est la solution du problème de Robin obtenu pour $S = 0$.

Il ressort de ces observations que les points importants à étudier sont :

- les valeurs de S_G et de S_A,
- le régime intermédiaire entre ces deux valeurs,

les régimes d'adhérence totale et de glissement total se ramenant respectivement à des problèmes de Dirichlet et de Robin. Observons maintenant, Fig. 4.3.b, l'évolution en fonction de S, des valeurs extrèmales u_{min} (minimum) et u_{max} (maximum) de la vitesse à la paroi. Comme nous l'avons vu, les profils de vitesse à la paroi s'obtiennent par translation dans le régime de glissement total. Ceci explique que u_{min} et u_{max} soient des droites parallèles jusqu'à la valeur S_G où u_{min} annule par définition de S_G. Dans le régime transitoire, u_{max} semble s'annuler avec une tangente horizontale.

Considérons à présent sur la Fig. 4.4 l'évolution avec S du point de transition $Y_T(S)$. Nous avons procédé par dichotomie pour obtenir :

$$S_G \approx 0.382$$

$$S_A \approx 0.674$$

Nous remarquons que la courbe semble présenter une tangente horizontale en $S = S_G$ et une tangente verticale en $S = S_A$.

Nous pouvons observer Fig. 4.5 les profils de vitesse selon la valeur de S, sur les axes de symétrie. Nous constatons à nouveau que $u_S = u_0 - S$ pour $S \leq S_G$, puis les courbes viennent s'aplatir sur le profil correspondant à $S = S_A$ où l'adhérence est totale. Les figures Fig. 4.6.a et Fig. 4.6.b représentent, en fonction de S et sur tout le domaine, respectivement la vitesse maximale et la vitesse moyenne (soit le débit). Comme pour u_{max}, les courbes sont affines pour $S \leq S_G$ puis, dans le régime transitoire elles semblent atteindre une valeur constante (correspondant à $S = S_A$) avec une tangente horizontale, autrement dit la transition vers l'adhérence totale ne semble pas être un phénomène brutal.

Terminons cette section en observant un aspect typique des maillages obtenus par notre procédé d'adaptation. La figure 4.7 présente le maillage final pour $S = 0.385$. La grossissement du coin montre un resserrement du maillage autour du point de transition.

4.2.2 Écoulement à conditions de glissement fixées

Lorsque l'on fixe le paramètre S, on peut observer l'évolution des profils de vitesse ainsi que des zones rigides, selon les variations de Bi.

Dans le cas particulier où l'adhérence à la paroi est imposée, nous savons qu'il existe une valeur $Bi_B > 0$ à partir de laquelle l'écoulement est bloqué. Ceci a été démontré pour une géométrie quelconque dans [23], la valeur de $Bi_B = \frac{2}{2+\sqrt{\pi}}$ a été rendue explicite dans [50] pour un domaine carré, et nous l'avons retrouvée numériquement dans [60].

La présence du glissement modifie ce comportement. Les résultats obtenus dépendent alors de la valeur de S. En particulier, nous avons mis en évidence l'existence d'un nombre Bi_T [4] à partir duquel l'écoulement consiste en une translation en bloc de tout le matériau. La vitesse de translation U_T de l'écoulement peut être éventuellement nulle. Nous retrouvons alors la situation de blocage.

Nous allons maintenant détailler deux cas de figure dans lesquels le comportement en fonction de Bi diffère. Dans le premier cas, $U_T = 0$, dans le second, $U_T \neq 0$.

Signalons tout de suite que la frontière des zones rigides (représentées en gris clair par la suite) a été déterminée par l'isovaleur :

$$\|R_h(\boldsymbol{\sigma}_h)\| = Bi$$

où R_h est l'opérateur de projection au sens $L^2(\Omega)^2$ sur $X_h^{1,0}(\Omega)^2$.

4.2.2.1 Convergence vers le blocage de l'écoulement

Nous fixons ici la valeur de $S = 0.6$.

Observons tout d'abord sur la figure Fig. 4.8.a les profils de vitesse à la paroi, tracés en fonction de la coordonné y, pour plusieurs valeurs de Bi. Chaque courbe est décroissante, atteignant son maximum avec une tangente horizontale au centre de la paroi. Pour chaque $Bi \geq 0$, nous voyons qu'il existe un point Y_T au delà duquel la vitesse à la paroi est nulle. Il semble également que la tangente en Y_T ne soit pas horizontale.

Nous pouvons constater qu'en chaque point y, la vitesse à la paroi est une fonction décroissante de Bi. Nous avons représenté cette décroissance sur la figure Fig. 4.8.b où l'on peut observer la vitesse maximale à la paroi $u_{max,\Gamma}$ (c'est-à-dire la vitesse au centre, en $y = 0$) en fonction de Bi. Nous voyons que, lorsque Bi est supérieur à une valeur limite notée Bi_A (ici $Bi_A \approx 0.36$), la vitesse à la paroi est identiquement nulle, autrement dit, il

4. l'indice T rappelle le mot «Translation», en outre, ce nombre dépend *a priori de S, ce que nous avons effectivement établi.*

y a alors adhérence sur toute la paroi. La tangente en ce point où $u_{max,\Gamma}$ annule ne semble pas être horizontale. En fait, la courbe de $u_{max,\Gamma}$ est presque une droite. Cela signifie que la vitesse $u_{max,\Gamma}$ au centre de la paroi décroît régulièrement avec Bi et ne ralentit pas au voisinage de l'adhérence totale.

La position du point de transition adhérence/glissement Y_T est représentée en fonction de Bi sur la figure Fig. 4.9. Le symbole A désigne les zones où l'adhérence a lieu et G les zones où le glissement a lieu. Ceci permet de voir de manière plus précise ce qui apparaissait déjà sur la figure Fig. 4.8.a ; Y_T décroît vers 0 avec Bi. Nous constatons de plus que cette décroissance augmente, la courbe présentant une tangente horizontale en $Bi = 0$ et une tangente verticale au point $Y_T = 0$, où nous retrouvons la valeur Bi_A (≈ 0.36).

Ainsi, nous avons établi les points suivants :

- Il existe une valeur Bi_A au dessous de laquelle le matériau glisse au centre des parois et adhère dans les coins. Si $Bi > Bi_A$, l'adhérence à la paroi est totale.
- La vitesse à la paroi décroît avec Bi en chaque point de la paroi, la décroissance étant régulière au centre.
- La zone où l'adhérence à lieu croit en accélérant avec Bi jusqu'à l'adhérence totale en $Bi = Bi_A$.

Observons à présent le comportement de la solution à l'intérieur du domaine d'écoulement. En particulier, intéressons-nous au développement des zones rigides.

La figure Fig. 4.10.a montre les profils de vitesses suivant l'axe horizontal de symétrie, pour plusieurs valeurs de Bi. On y observe des courbes décroissantes et concaves, atteignant leur maximum au centre de l'écoulement. Nous pouvons constater que la vitesse en chaque point décroît avec Bi. En outre, près du centre de la paroi ($x = 0$), les courbes présentent un plateau dont la longueur croit avec Bi. L'accroissement de ce plateau correspond au développement d'un bouchon central en translation. Afin d'observer la vitesse de translation du bouchon, nous avons représenté la vitesse maximum $u_{max;\Omega}$ (c'est-à-dire la vitesse au centre de Ω) en fonction de Bi sur la figure 4.11.a. Nous observons alors que $u_{max;\Omega}$ décroît en ralentissant jusqu'à une valeur $Bi = Bi_T \approx 0.53$ où la vitesse devient nulle, la tangente à la courbe de $u_{max;\Omega}$ semble alors être horizontale. La valeur particulière $Bi_T \approx 0.53$ est la valeur critique de blocage de l'écoulement. La valeur de $Bi_T \approx 0.53$ que nous avons obtenue par le calcul numérique semble coïncider avec la valeur de blocage connue dans le cas d'un écoulement où l'adhérence est imposée, c'est-à-dire :

$$Bi_T = \frac{2}{2 + \sqrt{\pi}}$$

Ceci est cohérent avec le fait que, pour $Bi \in]Bi_A; Bi_T[$, l'adhérence a lieu sur toute la paroi.

Sur la figure Fig. 4.10.b, nous voyons les profils de vitesses suivant l'axe diagonal de

symétrie, pour plusieurs valeurs de Bi.
On y observe encore des courbes décroissantes, atteignant leur maximum au centre de l'écoulement. Nous pouvons encore constater que la vitesse décroît avec Bi en chaque point de l'axe. Nous pouvons observer dans les coins (au voisinage de $\xi = \sqrt{2}$) que la vitesse est nulle. Ceci est cohérent avec les courbes de vitesse à la paroi de la figure Fig. 4.8.a, où l'on voit que l'adhérence à lieu dans les coins. La figure Fig. 4.10.b apporte cependant une information supplémentaire ; nous constatons en effet que la vitesse est nulle sur l'axe diagonale et au voisinage des coins sur une longueur qui dépend de la valeur de Bi. Ceci suggère donc la présence de zones mortes.

Reportons-nous à présent sur la figure Fig. 4.12 où nous observons le développement des zones rigides en fonction de Bi, ainsi que les maillages adaptés associés. Le développement des zones rigides est semblable à celui que nous connaissons déjà dans le cas où l'adhérence est totale (voir [60]). Un bouchon central convexe, presque circulaire, se développe. Sa superficie augmente lorsque Bi croit. Son bord s'aplatit alors en s'approchant de la paroi. Le bouchon n'atteint la paroi que lorsque l'écoulement se bloque, en $Bi = Bi_T$. Simultanément, dans les coins, une zone morte concave croit en superficie lorsqu'on augmente la valeur de Bi. Dans ces conditions, l'épaisseur de la zone déformée se réduit progressivement jusqu'au blocage où les zones mortes dans les coins et le bouchon central fusionnent.

Nous avons représenté sur la figure Fig. 4.13 la distance ξ_b entre le centre et le bord du bouchon, ainsi que la distance ξ_m entre le centre du carré et le bord de la zone morte. Ces distances sont mesurées sur l'axe diagonal. Nous voyons que la croissance en taille des deux zones rigides est analogue à celle que nous connaissons dans le cas où l'adhérence est totale. En particulier, la croissance des zones accélère au voisinage du blocage.

Nous avons comparé la position du bord y_m de la zone morte avec Y_T. Ces deux quantités sont portées sur la figure Fig. 4.14 en fonction de Bi. Les deux courbes décroissent et restent à une distance constante, puis au voisinage de Bi_A, Y_T s'éloigne de y_m en descendant brutalement vers 0 (il y a alors adhérence), tandis que y_m continue de décroître en accélérant jusqu'à une valeur particulière. Il semble en fait que $y_m(Bi_T) \approx Y_T(0)$. L'adhérence a donc lieu sur une partie de la paroi qui est toujours bien plus grande que celle recouverte par la zone morte.

Enfin, observons la courbe représentant le débit en fonction de Bi, Fig. 4.11.b. La courbe semble présenter deux régimes. Le premier régime se caractérise par une décroissance constante du débit en fonction de Bi. Puis la décroissance diminue et la courbe semble atteindre la valeur 0 (correspondant au blocage en $Bi = Bi_T$) avec une tangente horizontale.

Finalement, nous avons identifié, pour la valeur $So = 0.6$, trois régimes distincts d'écoulement :

1. adhérence dans les coins et glissement à la paroi pour $Bi \in [0; Bi_A]$,

2. adhérence totale pour $Bi \in]Bi_A; Bi_T]$,
3. blocage pour $Bi > Bi_T$,

avec, dans chacun des deux premiers régime, le développement simultané d'un bouchon central quasi-circulaire et d'une zone morte concave dans chaque coin, toutes les zones rigides étant séparées par une couche cisaillée d'autant plus fine que Bi est grand.

4.2.2.2 Convergence vers une translation en bloc

Nous fixons ici la valeur de $S = 0.45$. Nous allons comparer les résultats obtenus pour cette valeur à ceux obtenus pour $S = 0.6$.

Commençons par observer le comportement de la solution à l'intérieur du domaine d'écoulement, pour cela, considérons d'abord la figure Fig. 4.16. Nous y voyons les profils de vitesse sur l'axe de symétrie horizontal, pour plusieurs valeurs de Bi. Comme dans le cas précédent (section 4.2.2.1), les courbes sont concaves et, pour chaque point x de l'axe, la vitesse décroît quand Bi croit. De plus, un plateau se développe pour $Bi > 0$ et occupe toute la largeur du domaine pour $Bi > Bi_C$, où $Bi_C \approx 0.5$. Ceci correspond à l'existence d'un bouchon central qui atteint la paroi pour $Bi = Bi_C$. De même, on voit sur la figure Fig. 4.16.b les profils de vitesse sur l'axe diagonal pour plusieurs valeurs de Bi. Un plateau se développe et sa longueur croit avec Bi. Observons en particulier la vitesse près des coins ($\xi = \sqrt{2}$). Pour $Bi = 0.2$, la vitesse est nulle au voisinage des coins, mais quand Bi croit, la vitesse devient strictement positive aux coins.

Ceci indique que, contrairement au cas précédent (section 4.2.2.1), si des zones mortes peuvent se développer quand Bi est petit, elles disparaissent quand Bi augmente.

Voyons alors en détail le développement des zones rigides.

Sur la figure Fig. 4.17, on constate qu'un bouchon circulaire se développe effectivement lorsque Bi croit. Ce bouchon entre en contact avec la paroi puis continue de se développer en glissant sur la paroi lorsqu'on augmente la valeur de Bi. Finalement, pour $Bi > Bi_T \approx 0.71$, nous avons constaté que le bouchon occupe toute la section. Le contact du bouchon avec la paroi marque une première différence importante avec la situation que nous connaissions jusqu'à présent.

La vitesse du bouchon est donnée en fonction de Bi sur la figure Fig. 4.15.a. La vitesse du bouchon décroît et tend vers une valeur constante $U_T = 0.05$, avec une tangente horizontale en $Bi = Bi_T$. Ceci montre que, pour $Bi > Bi_T$, l'écoulement consiste en un unique bloc rigide en translation à la vitesse $U_T = 0.05$. Cette convergence vers un glissement en bloc marque une deuxième différence avec la situation de blocage que nous connaissions jusqu'alors.

Les zones mortes dans les coins sont représentées sur la figure Fig. 4.18, pour plusieurs valeurs de Bi. Pour $Bi > 0$, les zones mortes se développent et augmentent leur superficie quand Bi croit, ce qui est un phénomène que nous connaissons. Cependant, lorsque Bi atteint puis dépasse une valeur particulière, les zones mortes disparaissent progressivement. Nous remarquons sur cette figure que le maillage se concentre essentiellement sur la transition adhérence/glissement. Cette disparition des zones mortes constitue une troisième différence importante avec le cas précédent (section 4.2.2.1). De plus, une autre différence importante est la taille des zones mortes, puisque dans le cas présent, elles sont toujours très petites.

Afin de comparer l'évolution des tailles des différentes zones rigides, nous avons représenté (Fig. 4.19) en fonction de Bi, d'une part la distance ξ_b entre le centre et le bord du bouchon, et d'autre part, la distance ξ_m entre le centre du carré et le bord de la zone morte, ces distances étant mesurées sur l'axe diagonal.

La courbe représentative de $Bi \mapsto \xi_b(Bi)$ semble être une droite, autrement dit, le bouchon croit constamment jusqu'au blocage. D'autre part, la courbe de $Bi \mapsto \xi_b(Bi)$, reportée en Fig. 4.19.b, présente un minimum bien visible en $Bi \approx 0.22$, ce qui se rapporte au fait que des petites zones mortes apparaissent, croissent, puis décroissent pour disparaître complètement en $Bi \approx 0.37$.

Observons à présent les profils de vitesse sur la paroi, Fig. 4.20.a. Nous voyons que ces courbes sont décroissantes, mais, contrairement au cas précédent (section 4.2.2.2), on ne peut les comparer de manière globale. En effet, lorsque Bi croit, la vitesse à la paroi décroît près du centre de la paroi, alors qu'elle croit près des coins. Détaillons ce phénomène. Nous constatons le développement d'un plateau au centre de la paroi, lorsque Bi atteint puis dépasse une valeur Bi_C. Ceci correspond aux situations où le bouchon central entre en contact avec la paroi (en $Bi = Bi_C$), puis continue à se développer. La longueur de la paroi où la vitesse est constante (qui correspond à longueur en contact avec le bouchon central) augmente alors jusqu'à atteindre toute la longueur de la paroi pour la valeur $Bi = Bi_T$. Nous voyons alors que pour $Bi \geq Bi_T$, la vitesse à la paroi est constante et non-nulle, plus précisément, $u = U_T \approx 0.05$. Cela vient de ce que, pour $Bi \geq Bi_T$, tout le matériaux présent dans la conduite se translate en bloc à la vitesse U_T.

Par ailleurs, nous constatons l'existence d'un nombre $Bi_G \approx 0.37$ au delà duquel le glissement est total. Pour $Bi < Bi_G$, le glissement est partiel et est délimité par le point de transition Y_T. Nous avons représenté Y_T en fonction de Bi sur la figure Fig. 4.21.b. Nous pouvons alors effectivement constater que la courbe de Y_T est croissante avec Bi. Elle ne parait pas présenter de tangentes horizontales ni en $Bi = 0$ ni en $Bi = Bi_G$, sa croissance semble régulière.

Nous avons également comparé (Fig. 4.21.a) Y_T avec la position de la frontière y_m des zones mortes. Nous retrouvons sur la courbe $Bi \mapsto y_m(Bi)$ les variations déjà décrites des zones mortes : accroissement jusqu'en $Bi \approx 0.22$, puis décroissance jusqu'en $Bi = Bi_G$ où le glissement total a lieu. Les deux courbes se rejoignent en $Bi = Bi_G$, autrement dit, les zones mortes ne disparaissent que lorsque le glissement est total. Remarquons de plus que les deux courbes sont distinctes à l'approche de Bi_G, c'est-à-dire que que la frontière des zones mortes ne coïncide pas avec la limite des zones où l'adhérence a lieu.

On peut observer la variation de la vitesse $u_{max;\Gamma}$ au centre de la paroi sur la figure Fig. 4.20.b. C'est aussi la vitesse du bouchon central lorsque $Bi \geq Bi_C$. Nous observons une décroissance constante de $u_{max;\Gamma}$ jusqu'au voisinage de Bi_T. Puis, la décroissance diminue et la courbe de $u_{max;\Gamma}$ semble atteindre la valeur U_T (en $Bi = Bi_T$) avec une tangente horizontale.

Enfin, nous avons représenté la courbe de débit (Fig. 4.15.b). Le débit décroît régulièrement, puis, atteint la valeur $U_T \approx 0.05$ en $Bi = Bi_T$ avec une tangente horizontale.

Nous avons donc montré que :

- Il existe une valeur $Bi_G \approx 0.37$ au dessus de laquelle le matériau glisse sur toute la paroi, et en dessous de laquelle le glissement est partiel.
- La zone où l'adhérence a lieu décroît avec Bi jusqu'au glissement total en $Bi = Bi_G$.
- Un bouchon central se développe quand Bi croit.
- Le bouchon atteint la paroi pour $Bi = Bi_C \approx 0.5$.
- Le bouchon remplit toute la conduite quand $Bi > Bi_T \approx 0.71$, le matériau se translate alors à la vitesse constante $U_T \approx 0.05$.
- Des petites zones mortes se développent quand Bi croit, puis disparaissent pour $Bi < Bi_C$.

4.2.3 Détermination des différents régimes d'écoulement

Dans le cas d'un modèle newtonien (section 4.2.1), nous avons montré l'existence de deux nombres S_A et S_G caractérisant le type de profil de vitesse au bord du domaine Ω ;

- pour $0 \leq S \leq S_G$, le matériau glisse sur toute la surface de la paroi,
- pour $S_A \leq S$, le matériau adhère sur toute la surface de la paroi,
- pour $S_G < S < S_A$, l'adhérence à lieu dans les coins tandis que le matériau glisse sur le reste de la paroi.

En étudiant le rôle de Bi pour $S \neq 0$ (section 4.2.2.2 et 4.2.2.1) nous avons vu que ces nombres existent encore pour $Bi \neq 0$. En effet, pour deux valeurs distinctes de S, nous obtenons dans un cas une valeur $Bi = Bi_T$ de blocage[5] et dans l'autre cas une valeur $Bi = Bi_T$ de translation totale[6].

5. pour cette valeur de Bi, $S_A = S$
6. pour cette valeur de Bi, $S_G = S$

Nous avons donc cherché à préciser ceci en déterminant l'évolution de S_A et de S_G en fonction de Bi. Nous avons également établi la valeur de Bi_T en fonction de S.

Ces trois courbes sont représentées sur la figure de synthèse Fig. 4.22.a. Elles délimitent les cinq différents régimes d'écoulement, nous avons associé à ces régimes des symboles représentés sur cette figure :

1. A signifie que l'adhérence à la paroi est totale,
2. G signifie que le glissement à la paroi est totale,
3. $A + G$ signifie que l'adhérence a lieu dans les coins alors que le matériau glisse sur le reste de la paroi,
4. B signifie que l'écoulement est bloqué,
5. T signifie que le matériau se translate en bloc à une vitesse non-nulle.

Nous pouvons observer que la courbe $Bi \mapsto S_A(Bi)$ décroît alors qu'au contraire, la courbe $Bi \mapsto S_G(Bi)$ croît. Les deux courbes se rejoignent en un point $X = (Bi_T(S_T), S_T) \approx (0.71, 0.5)$. Puis, pour $Bi \geq Bi_T(S_T)$, elles sont confondues.

Constatons de plus, que $Bi_T(S)$ ne varie que dans le court intervalle $S \in [S_T; 0.53]$, passant alors de la valeur $Bi_T(S_T) = Bi_T(0) \approx 0.71$ à la valeur $Bi_T(0.53) = Bi_T(\infty) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{2}{2+\sqrt{\pi}}$.

Ainsi, pour S fixé, lorsque Bi croît, l'écoulement tend :

- soit vers une situation d'adhérence totale, puis de blocage (cas où $So > S_T$), la valeur $Bi_T(\infty)$ de blocage est alors indépendante de S si $So - S_T$ est assez grand,
- soit vers une situation de glissement total, puis de translation en bloc (cas où $S < S_T$), la valeur $Bi_T = Bi_T(0)$ est alors indépendante de S.

Sur la figure Fig. 4.22.b, nous avons représenté les trois courbes limites au voisinage de $So = S_T$, car leur comportement dans cette zone est particulier. Nous voyons alors nettement les changements de courbure de S_A et S_G qui dessinent une pointe allongée de sommet X.

De plus, il apparaît que la courbe de $S \mapsto Bi_T(S)$ ne connaît, en fait, de variations que lorsqu'elle se confond avec la courbe $Bi \mapsto S_A(Bi)$, ce qui a lieu pour les valeurs de S comprises dans l'intervalle $[S_A(Bi_T(\infty); S_T]$. Nous devons alors nous attarder sur les bornes de cet intervalle car nous trouvons que $S_A(Bi_T(\infty)) = Bi_T(\infty)$.

Cela signifie que, pour S fixé entre $Bi_T(\infty)$ et S_T, lorsque Bi croît, le glissement a toujours lieu sur une partie de la paroi jusqu'à la valeur de blocage $Bi = Bi_T(S)$ (comprise entre $Bi_T(\infty)$ et $Bi_T(0)$).

Nous pouvons expliquer pourquoi Bi_T reste égal à $Bi_T(\infty)$ quand $S > S_A$, en rappelant un résultat démontré dans [33] et [23]. Celui-ci indique dans le cas présent que, si S et Bi sont tels que $\gamma u = 0$, alors, il existe une valeur Bi_T définie par :

$$Bi_T = \sup \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega v\, dx}{\displaystyle\int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} v\|\, \mathrm{d}x} \ ; \ v \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} v\|\, \mathrm{d}x \neq 0 \right\}$$

et telle que $u = 0$ p.p. si $Bi \geq Bi_T$ et $u > 0$ sinon. Ainsi, on voit que cette valeur est indépendante de S et ceci reste vrai tant que $\gamma u = 0$ de part et d'autre de la courbe $S \mapsto Bi_T(S)$.

Ajoutons que nos résultats au sujet de la limite du régime de blocage est en bon accord avec les travaux mathématiques de Ionescu et Sofonea [45]. Les résultats de ces auteurs s'énoncent comme suit :

Théorème **4.2.1** *(Ionesu-Sofonea [45], théorème 4.1., page 294)*

1. *L'ensemble B est convexe et fermé,*
2. *Si $(Bi, S) \in B$, alors $[Bi, +\infty[\times[S; +\infty[\subset B$,*
3. *Il existe des nombres L_1 et L_2 tels que : $B \subset [L_1, +\infty[\times[L_2; +\infty[$.*

Suivant toujours les mêmes auteurs, nous pouvons préciser ce résultat en introduisant la fonction :

$$F_1(Bi, S) = \inf \left\{ Bi\|\boldsymbol{\nabla} v\|_{0,1;\Omega} + S|\gamma v|_{0,1;\Gamma} - (1, v)_{0,2;\Omega} \ ; \ v \in H^1(\Omega) \text{ et } \|\boldsymbol{\nabla} v\|^2_{0,2;\Omega} + |\gamma v|^2_{0,2;\Gamma} = 1 \right\}$$

La fonction F_1 est concave semi-continue supérieurement, pour Bi et S fixés, $F_1(., S)$ et $F_1(Bi, .)$ sont croissantes et les nombres L_1 et L_2 sont alors déterminés comme suit (voir [45], Lemme 2.1, page 294) :

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{S \longrightarrow +\infty} \inf \{ Bi \geq 0 \ ; \ F_1(Bi, S) \geq 0 \} \\ L_2 &= \lim_{Bi \longrightarrow +\infty} \inf \{ S \geq 0 \ ; \ F_1(Bi, S) \leq 0 \} \end{aligned}$$

En fait, d'après nos résultats, nous pouvons préciser que $L_2 = S_T$ et que, pour le carré, $L_1 = Bi_T(\infty) = \dfrac{2}{2 + \sqrt{\pi}}$.

Un second résultat caractérise les valeurs bloquantes de Bi en fonction de S :

Théorème **4.2.2** *(Ionesu-Sofonea [45], théorème 5., page 295)*

Définissons[7] $G_1 : I\!R_+ \longrightarrow I\!R_+$; *par :*

$$G_1(S) = \sup \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega v \,\mathrm{d}x - S \int_\Gamma |\gamma v| \,\mathrm{d}\Gamma}{\displaystyle\int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} v\| \mathrm{d}x} \; ; \; v \in H^1(\Omega) \; et \; \int_\Omega \|\boldsymbol{\nabla} v\| \mathrm{d}x \neq 0 \right\} \tag{4.1}$$

Pour tout $S \geq S_T$, nous avons les propriétés suivantes :

1. *G_1 est une fonction convexe et décroissante,*
2. *$Bi \geq G_1(S)$ si, et seulement si, $(Bi, S) \in B$.*

Pour $S \in]S_T; +\infty[$, le nombre $G_1(S)$ correspond à la valeur critique de Bi que nous avons notée $Bi_T(S)$.

Nous avons comparé les régimes d'écoulement obtenus pour la section carrée avec ceux connus pour la section circulaire. Sur la figure Fig. 4.22.c, les quatre différents régimes du cas circulaire sont limités par les droites verticales et horizontales (en traits pleins) et désignés par :

1. A^o : adhérence,
2. G^o : glissement,
3. T^o : translation,
4. B^o : blocage.

nous y avons également reporté en pointillé les courbes de la figure Fig. 4.22.a délimitant les régimes dans le cas de la section carrée.

Nous avons pu observer les variations de la vitesse de translation U_T le long de la courbe $S \mapsto Bi_T(S)$ et constaté qu'il est possible de rendre explicite cette vitesse :

$$U_T(S) = \begin{cases} \frac{1}{2} - S & si \qquad S > S_T = \frac{1}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Nous retrouvons exactement la situation de la section circulaire. Ceci conduit à se demander si la valeur de S_T est indépendante de la géométrie. De plus, dans la zone T, nous pouvons nous demander si la vitesse de translation reste constante (par rapport à Bi) lorsque Bi croît. On obtient une réponse plus complète par le petit raisonnement suivant.

7. la notation G_1 est celle de l'article [45]

Soient (S, Bi) un couple de valeur de paramètre pris dans la zone T. La vitesse u est donc constante (par rapport à x) et positive[8]. La loi de glissement que nous écrivions :

$$\int_\Gamma \gamma u\,(\zeta - \gamma u)\,d\Gamma + S\left\{\int_\Gamma |\zeta|\,d\Gamma - \int_\Gamma |\gamma u|\,d\Gamma\right\} \geq \int_\Gamma s\,(\zeta - \gamma u)\,d\Gamma \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma)$$

peut alors prendre la forme plus simple :

$$\int_\Gamma \gamma u\,\zeta\,d\Gamma + S\int_\Gamma \frac{u}{|u|}\,\zeta\,d\Gamma \geq \int_\Gamma s\,\zeta\,d\Gamma \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma)$$

Ceci s'obtient en remplaçant ζ par $\gamma u + \lambda\zeta$, avec λ un réel positif, puis en divisant par λ et faisant enfin tendre λ vers 0.

Autrement dit, comme u est une constante positive, nous obtenons :

$$u\int_\Gamma \zeta\,d\Gamma + S\int_\Gamma \zeta\,d\Gamma \geq \int_\Gamma s\,\zeta\,d\Gamma \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma) \tag{4.2}$$

Souvenons-nous maintenant que l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_\Omega \sigma.\nabla v.dx + \int_\Gamma s\,\gamma v\,d\Gamma = \int_\Omega v.dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

donc, compte tenu de la relation (4.2), dans laquelle nous choisissons $\zeta = \gamma v$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \sigma.\nabla v.dx + (u+S)\int_\Gamma \gamma v\,d\Gamma = \int_\Omega v.dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

en particulier, si nous choisissons $v = u$, nous avons :

$$\int_\Omega \sigma.\nabla u.dx + (u+S)u|\Gamma| = u|\Omega|$$

or, par hypothèse $\nabla u = 0$, donc, finalement, nous obtenons la relation :

$$u = U_T(\Omega, S) = \frac{|\Omega|}{|\Gamma|} - S$$

ce qui permet également de donner la valeur de S_T en fonction de la géométrie. Il suffit en effet pour cela de faire $u = 0$ dans la relation explicitant u, nous obtenons donc[9] :

$$S_T = \frac{|\Omega|}{|\Gamma|}$$

8. Le fait que u est positive semble évident. Ajoutons néanmoins que cela peut se démontrer en utilisant une méthode donnée dans [23]. Ces auteurs ont en fait démontré que $u \geq 0$ dans le cas qui correspond à l'adhérence à la paroi.

9. pour établir la valeur de S_T, nous réalisons en fait implicitement l'hypothèse intuitive et, surtout, validée par le calcul numérique, qui consiste à envisager que la vitesse est monotone le long de la courbe $S \mapsto Bi_T(S)$

Ceci montre le rôle de la géométrie dans la localisation des zones T et B de la figure Fig. 4.22. Pour une carré de demi-côté 1, on retrouve effectivement la même valeur de S_T que pour le cercle de rayon 1, par contre, pour un triangle équilatéral de côté L, on aurait $S_T = \frac{\sqrt{3}L}{6}$ et pour un rectangle de côtés 1 et ε, on aurait : $S_T = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, ce qui achève de convaincre, de manière concrète, que S_T dépend nettement de la géométrie.

Nous avons pu constater dans les sections 4.2.2.1 et 4.2.2.2 que la dépendance en Bi s'exprime de manière différente selon que S est inférieur ou au contraire supérieur à S_T. Qu'en est-il des cas intermédiaires ?

Nous avons voulu comparer le comportement des frontières rigides/fluides ainsi que celui du point de transition Y_T en fonction de Bi pour quelques valeurs de S représentatives des différents écoulements possibles.

Le schéma Fig. 4.22.d montre les valeurs particulières que nous avons choisies pour effectuer ces comparaisons.

Nous savons que, pour $S = 0.45$, lorsque Bi croît, l'écoulement tend vers une translation en bloc (section 4.2.2.2), Y_T croît alors vers 1. Inversement, pour $S = 0.6$, la situation finale est un blocage et Y_T décroît vers 0.

En observant la figure Fig. 4.23.b, nous voyons que, pour $S \geq S_T$, toutes les courbes tendent vers 0, et ce de plus en plus brutalement lorsque S tend vers S_T. (En particulier n'oublions pas que pour $S = S_T$, la situation de blocage a lieu bien que la courbe croissent vers 1 mais sans jamais atteindre cette valeur). De plus, pour les valeurs intermédiaires entre $So = 0.5$ et $So = 0.53$, les courbes croissent vers un maximum avant de décroître vers 0.

Nous avons comparé Fig. 4.23.a les frontières des zones rigides, exprimées en fonctions de Bi pour les valeurs de S indiquées par le schéma Fig. 4.22.d. Nous pouvons constater que, pour Bi fixé, les zones rigides (le bouchon comme les zones mortes) sont d'autant plus étendues que S est grand. De plus, la réduction puis disparition des zones mortes semble être phénomène limité au cas où $S \leq S_T$, dans ce cas, le bouchon croît jusqu'à remplir complètement le domaine d'écoulement en $Bi = Bi_T$. Lorsqu'au contraire, $S > S_T$, la taille des zones mortes augmente jusqu'au blocage en $Bi = Bi_T$ où elles rencontrent le bouchon.

Ces dernières considérations sur la transition adhérence-glissement et les frontières des zones rigides nous amènent à définir trois sous-régimes de $A + G$:

- $AG1$: C'est un régime que nous avons observé dans la section 4.2.2.1 (avec $S = 0.6$). Il est défini par les couples de paramètres (S, Bi) de $A + G$ tels que $S > S_A(Bi_T(+\infty)) \approx 0.53$. Lorsque Bi croît, l'adhérence devient totale (régime A).
- $AG2$: Il s'agit d'un régime que nous venons d'étudier de manière synthétique (avec

$S = 0.5$, $S = 0.515$ et $S = 0.53$). Il est défini par les couples de paramètres (S, Bi) de $A + G$ tels que $1/2 = S_T \leq S \leq S_A(Bi_T(+\infty)) \approx 0.53$. Lorsque Bi croît, le blocage intervient simultanément avec l'adhérence totale (régime B).

- $AG3$: Nous avons étudié ce régime dans la section 4.2.2.2 (avec $S = 0.45$). Il est défini par les couples de paramètres (S, Bi) de $A+G$ tels que $S \leq S_T = 1/2$. Lorsque Bi croît, le glissement devient total (régime G).

Pour conclure, nous avons résumé les configurations et comportements du point de transition et des frontières des zones rigides sur les figures Fig. 4.24 et Fig. 4.25.

4.3 Conclusion

Nous avons posé un problème original en introduisant le glissement à seuil dans un problème académique : l'écoulement d'un matériau viscoplastique dans une conduite droite de section constante.

Nous avons résolu numériquement, à l'aide d'une méthode originale, le cas particulier de la section carrée.
Nous avons pu déterminer pour ce cas l'existence de cinq régimes (A, $A + G$, G, B et T) et de trois sous-régimes (AG_1, AG_2 et AG_3) d'écoulement.
Nous avons entre autre établi :

- les valeurs frontières de Bi et S entre ces différents régimes (Fig. 4.22),
- l'évolution des zones rigides et des points de transition adhérence/glissement en fonction des deux nombres sans dimension, dans chacun de ces huit régimes (Fig. 4.24 et Fig. 4.25).

Finissons sur une remarque en rapport avec les résultats du chapitre 3, qui amènent des perspectives sur le travail du présent chapitre. D'après le chapitre 3, lorsque u satisfait certaines conditions, l'amélioration de la précision ne semble pas avoir lieu avec un maillage adapté et une approximation P_1-continue de u. Cependant, nous ne savons pas si u vérifie, pour une section carrée, les dites conditions. C'est pourquoi, nous avons malgré tout décidé d'utiliser le procédé d'adaptation de maillage. Nous avons pu constater une amélioration apparente de la précision des frontières des zones rigides. Cependant, reconnaissons que le fait d'avoir obtenu une maillage adapté à l'issue du procédé peut avoir plusieurs raisons :

1. Il est possible que les conditions sur u rendant optimal un maillage quasi-uniforme n'aient pas lieu ; dans ce cas, on peut admettre que l'adaptation est utile. En particulier, pour le problème du glissement, nous avons peu de certitudes sur le caractère optimal d'un maillage quasi-uniforme.
2. Il est également possible que le critère d'adaptation utilisé corresponde bien au cas

P_2 (comme les résultats numérique du chapitre 3 semblent l'indiquer), mais soit trop fort pour une approximation P_1 ; dans ce cas, nous aurions obtenu, pour un même coût, une meilleure précision globale avec une approximation P_2.

Il serait donc intéressant de reprendre cette étude en choisissant une approximation P_2-continue de la vitesse u et de comparer les résultats.

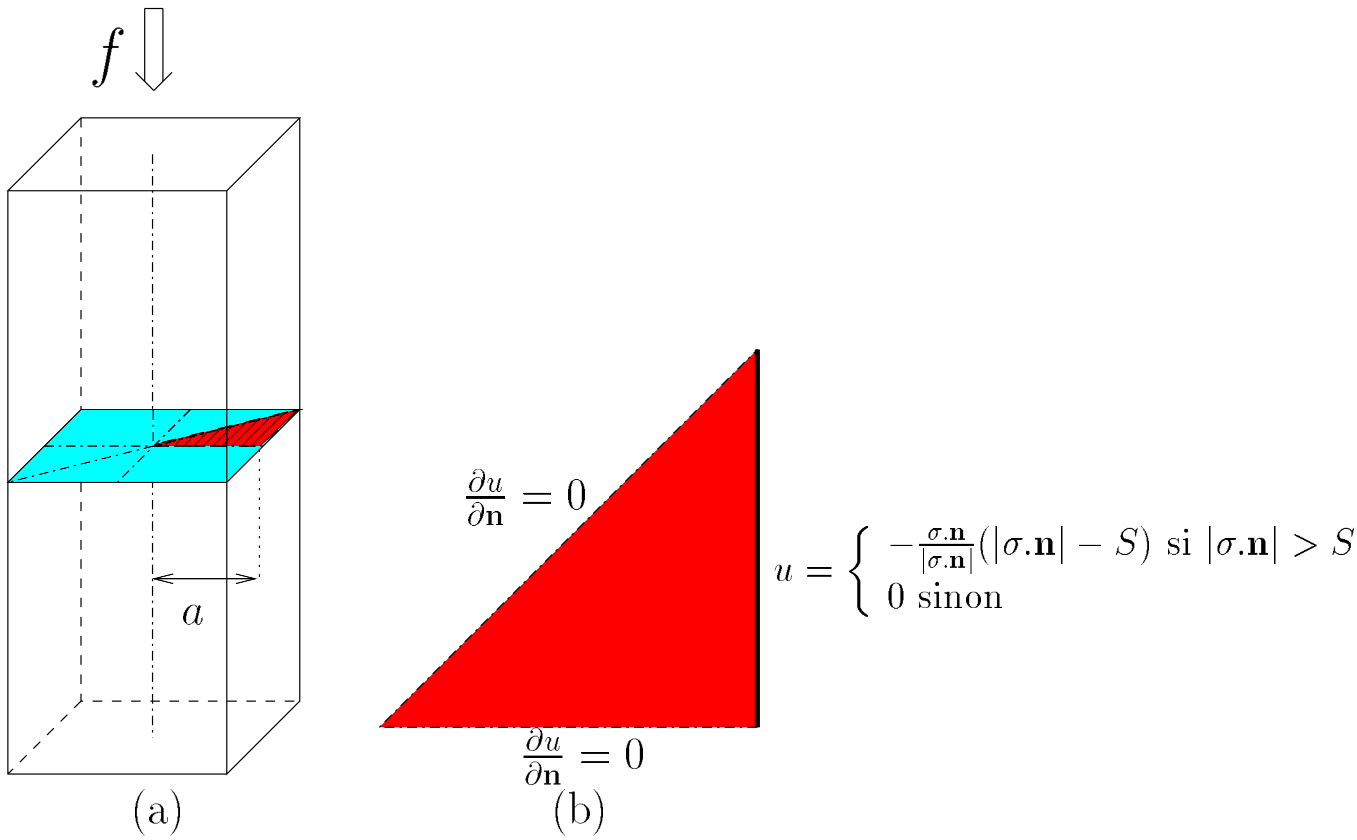


FIG. 4.1 – *Ecoulement dans une conduite droite de section carrée; (a) géométrie du problème; (b) domaine de calcul et ses conditions aux limites.*

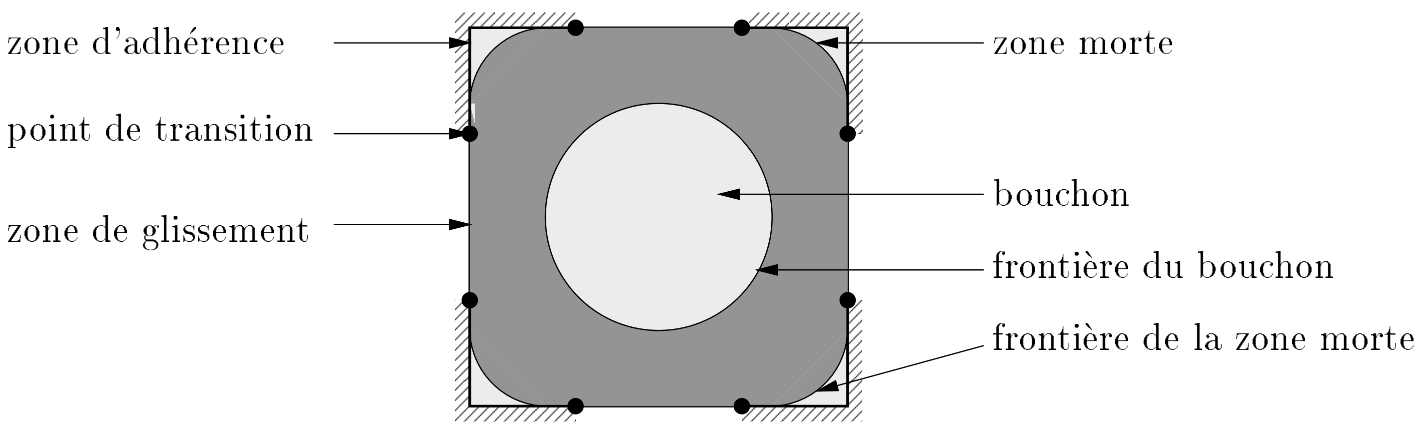


FIG. 4.2 – *Représentation des différentes aspects caractéristiques de l'écoulement.*

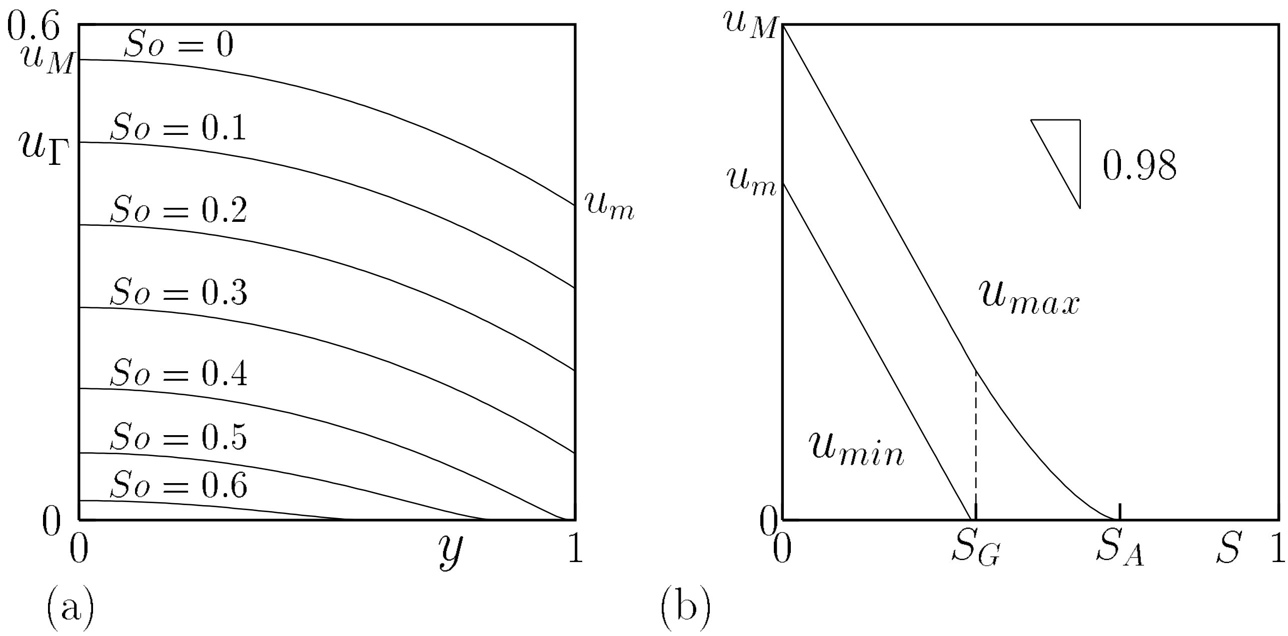


FIG. 4.3 – *Vitesse sur le bord pour $Bi = 0$: (a) pour plusieurs valeur de S ; (b) valeurs extrèmales en fonction de S.*

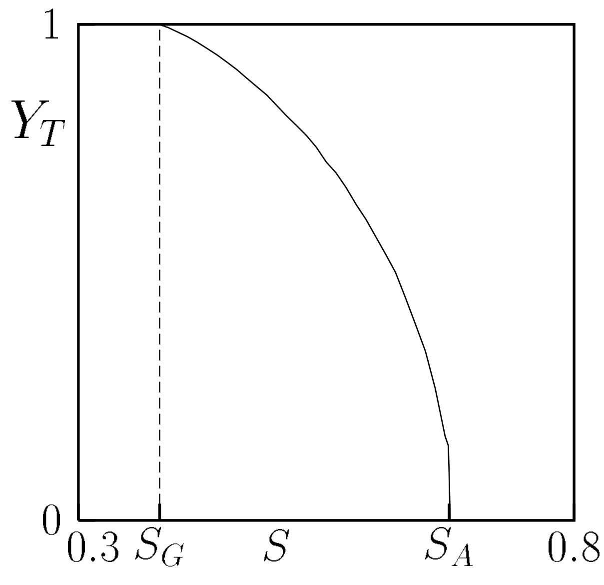


FIG. 4.4 – *Ordonnée Y_T du point de transition adhérence/glissement en fonction de S, pour un maillage adapté et pour $Bi = 0$.*

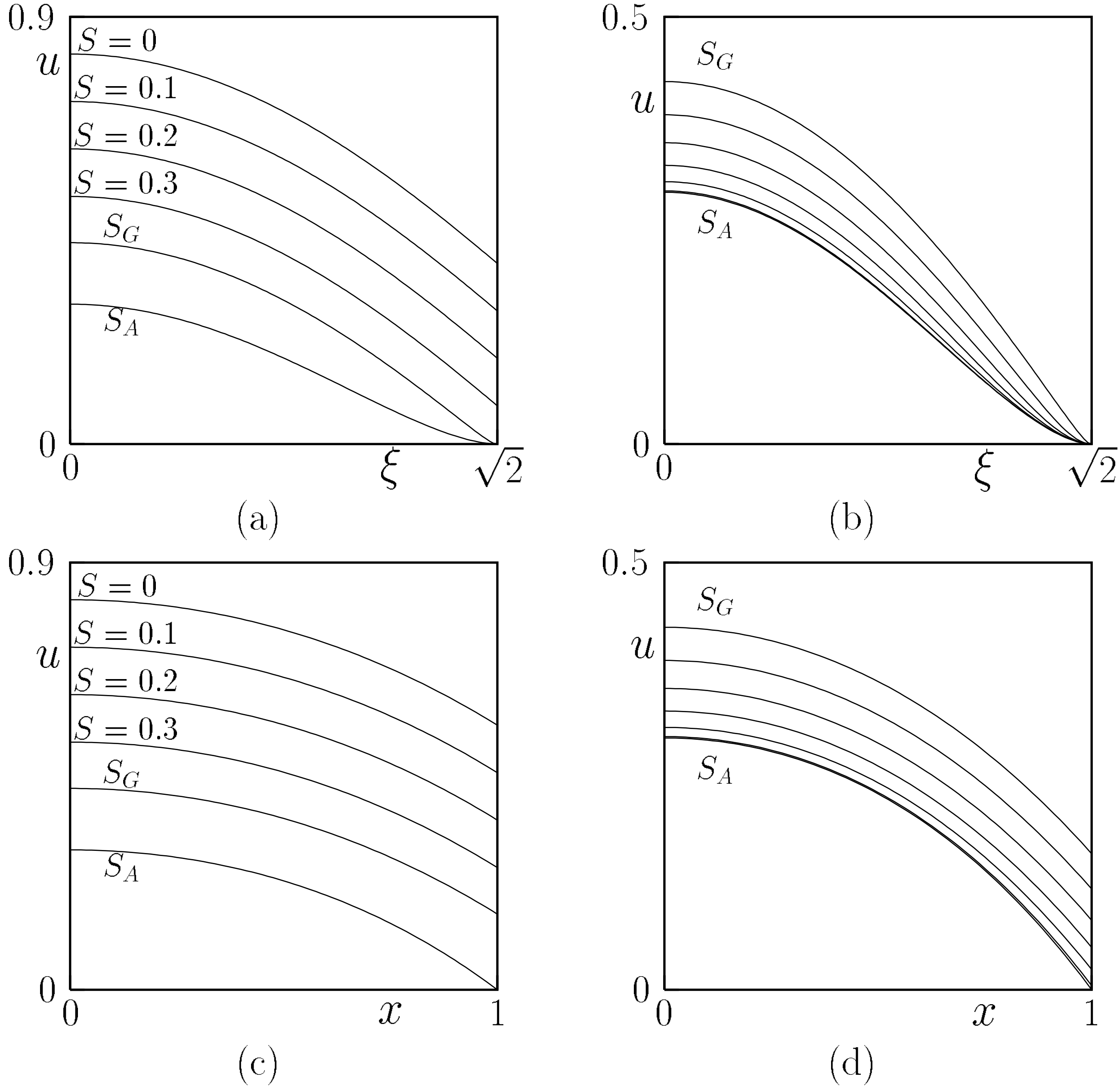


FIG. 4.5 – *Profils de vitesse sur les axes de symétrie pour plusieurs valeurs de S et pour $Bi = 0$: (a) sur l'axe diagonal pour $0 \leq S \leq S_A$; (b) sur l'axe diagonal pour $S_G \leq S \leq S_A$; (c) sur l'axe horizontal pour $0 \leq S \leq S_A$; (d) sur l'axe horizontal pour $S_G \leq S \leq S_A$.*

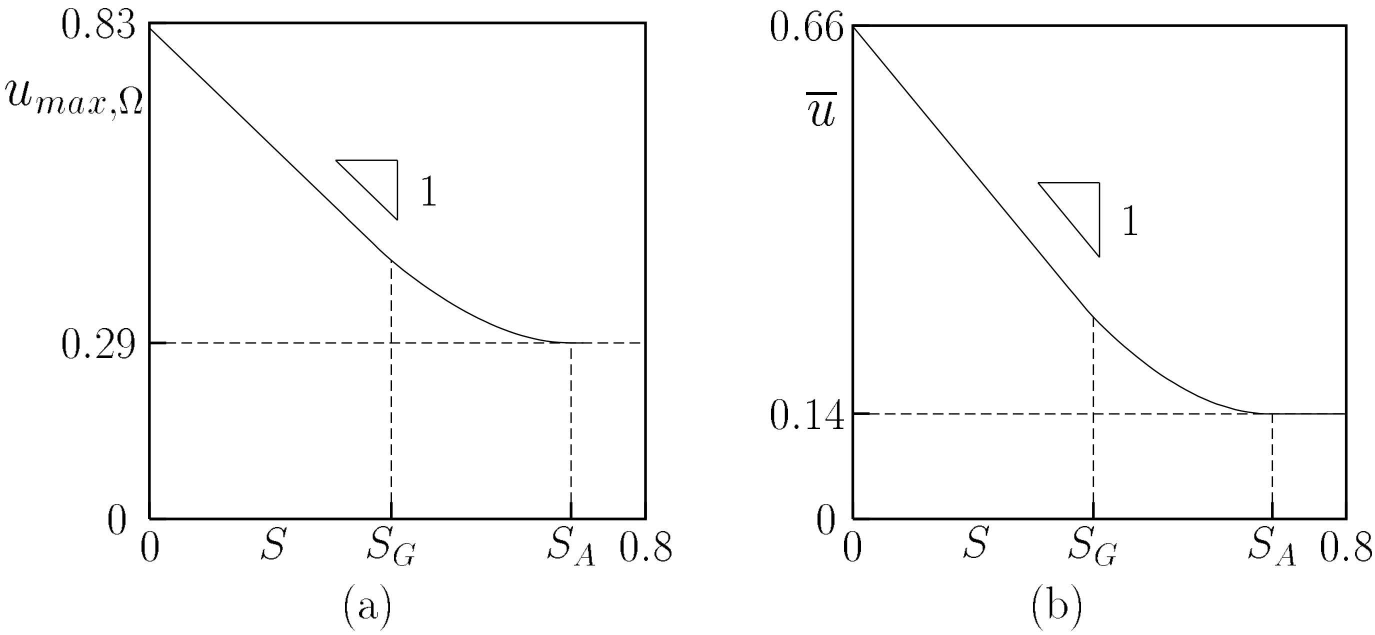


FIG. 4.6 – *(a) Vitesse maximale en fonction de S, pour $Bi = 0$. (b) Débit en fonction de S, pour $Bi = 0$.*

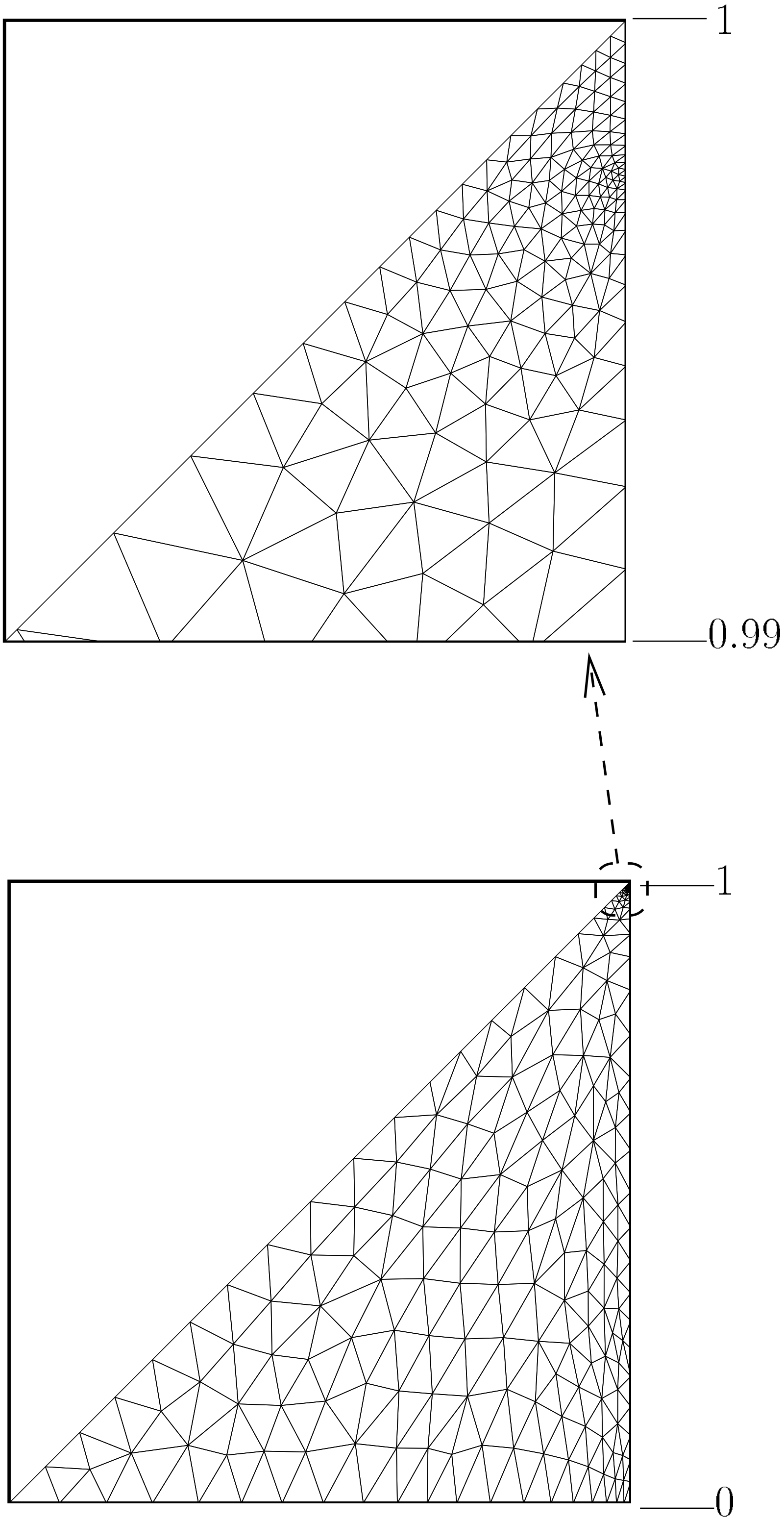


FIG. 4.7 – *Zoom au voisinage du point de transition adhérence/glissement, sur le quinzième maillage adapté, pour $S = 0.385$ et $Bi = 0$.*

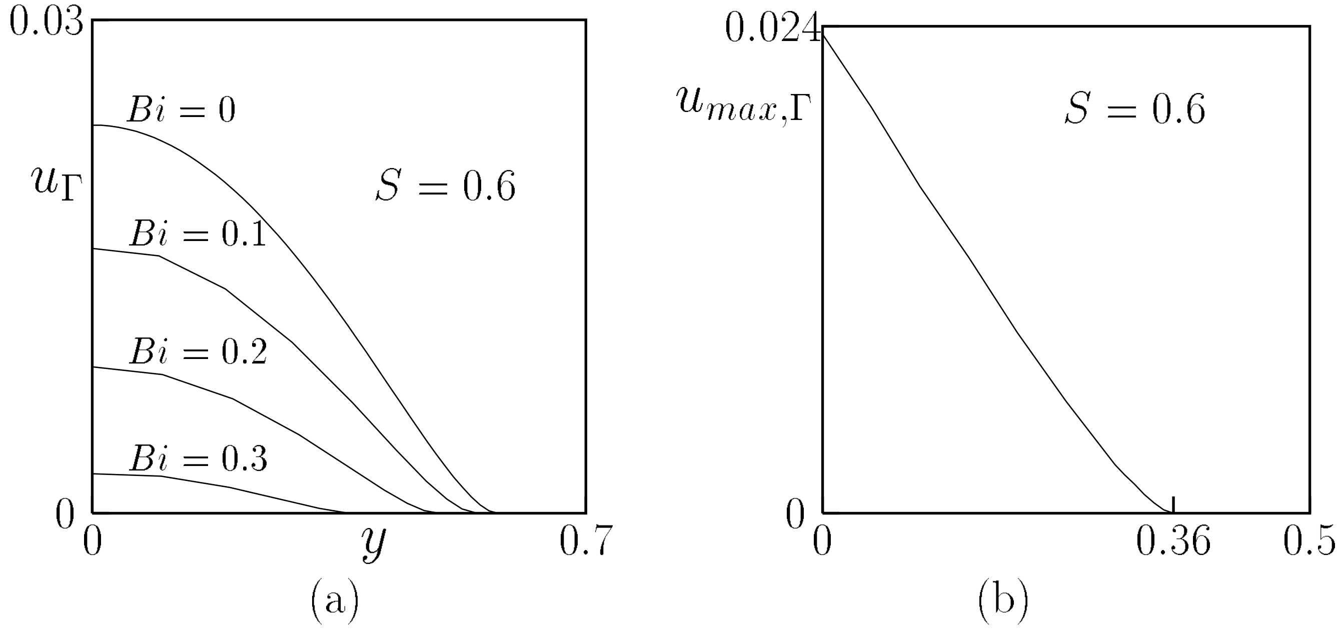


FIG. 4.8 – *Vitesse sur le bord à $S = 0.6$ (régime mixte où adhérence et glissement co-existent) : (a) pour plusieurs valeur de Bi ; (b) valeur maximale en fonction de Bi.*

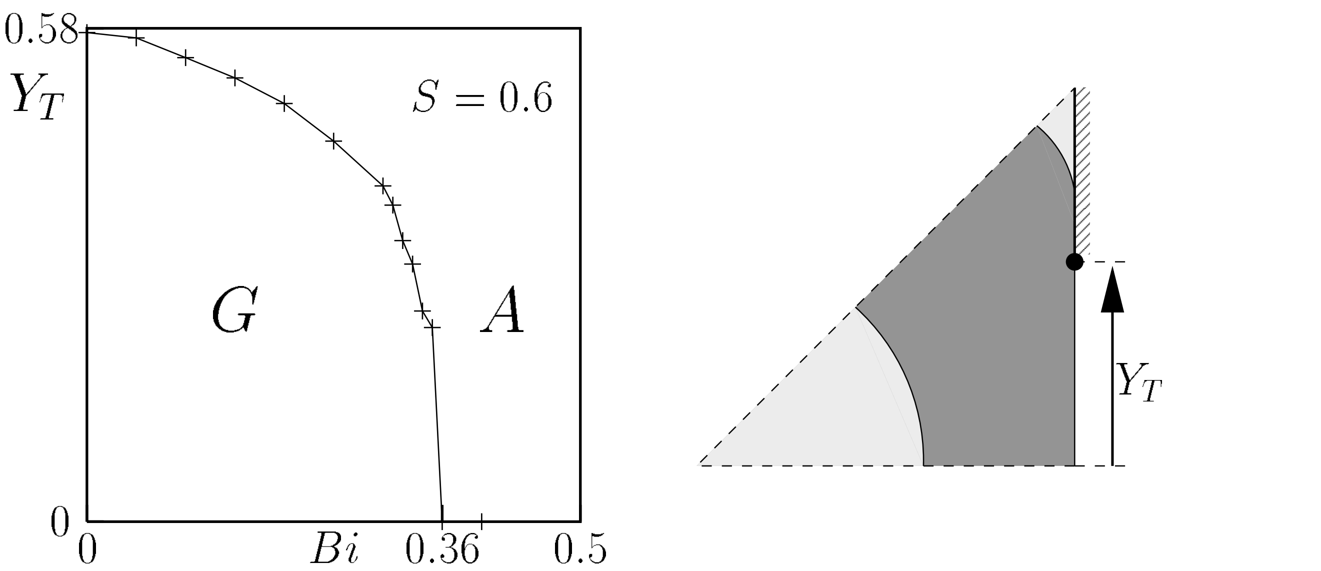


FIG. 4.9 – *Ordonnée Y_T de la transition adhérence/glissement en fonction de Bi pour un maillage adapté et $S = 0.6$.*

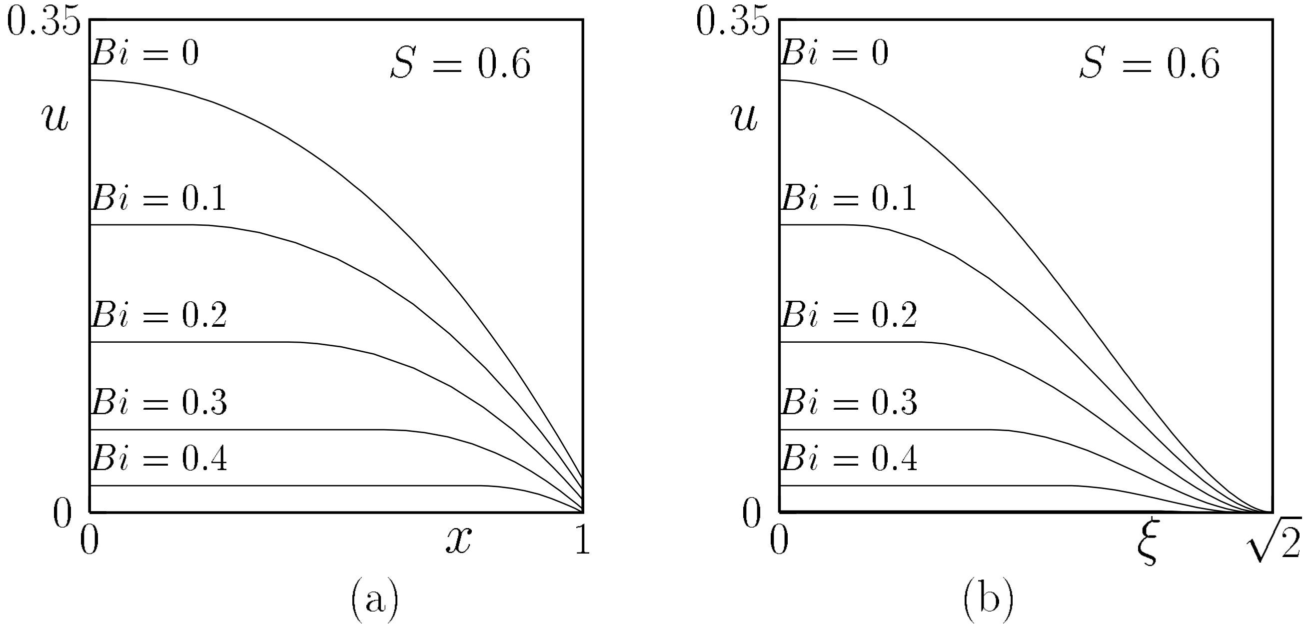


FIG. 4.10 – *Profils de vitesse pour plusieurs valeur de Bi et $S = 0.6$: (a) coupes suivant l'axe horizontal ; (b) coupes suivant l'axe diagonal.*

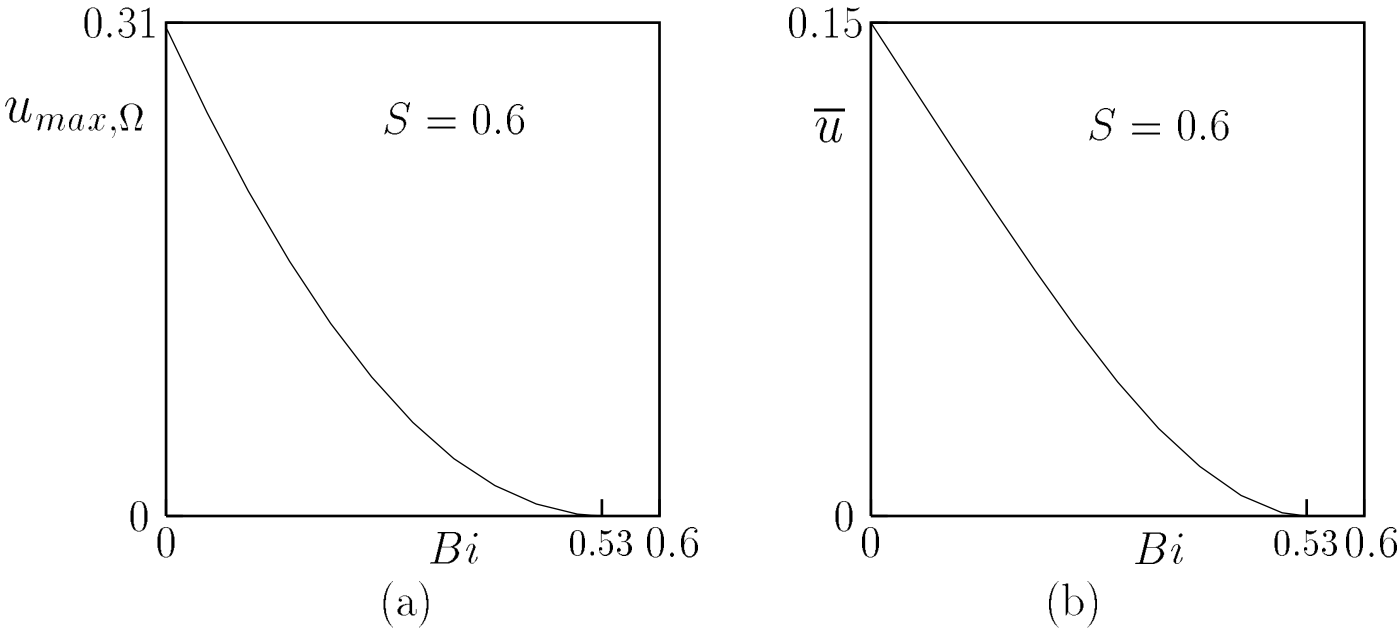


FIG. 4.11 – *(a) Vitesse maximale $u_{max,\Omega}$ en fonction de Bi, pour $S = 0.6$; (b) Débit $\overline{u}$ en fonction de Bi, pour $S = 0.6$.*

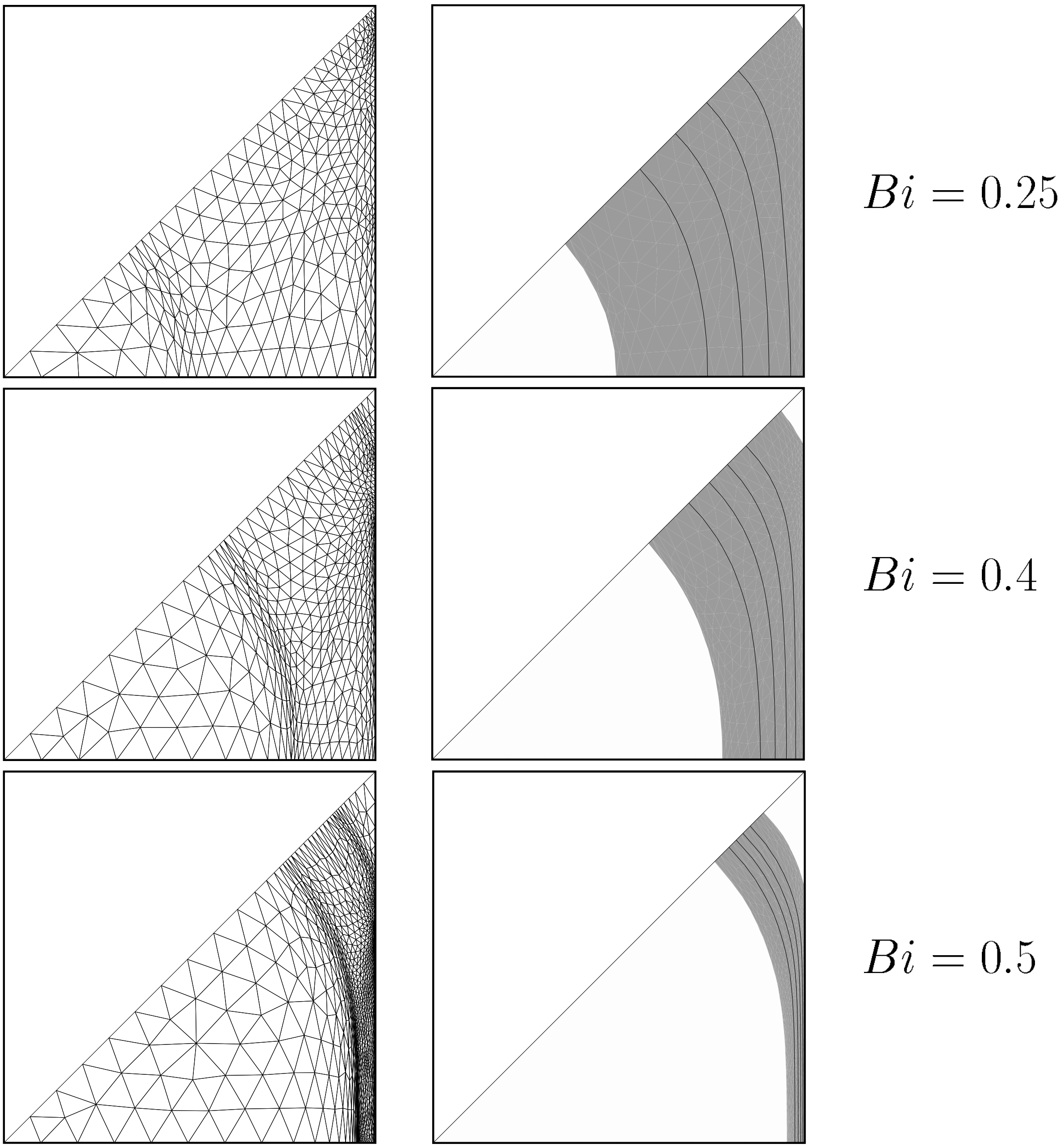


FIG. 4.12 – *Maillages adaptés et écoulement correspondant (zones rigides en gris clair, zones déformées en gris foncé et isovaleurs de la vitesse) pour* $S = 0.6$ *et plusieurs valeurs de* Bi.

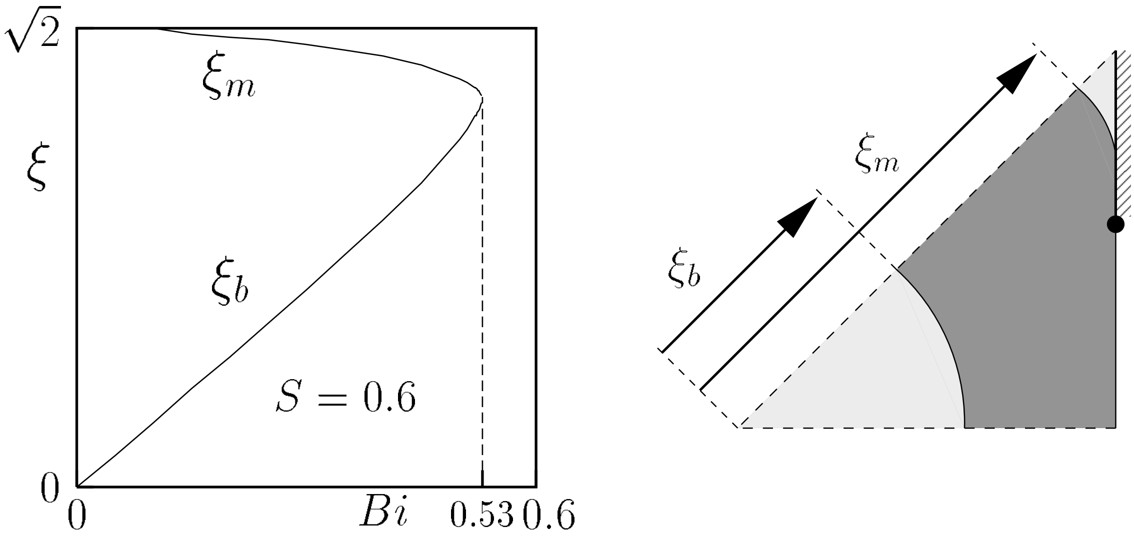


FIG. 4.13 – *Position sur la diagonale du carré de la frontière ξ_m de la zone morte et de la frontière ξ_b du bouchon, en fonction de Bi, pour un maillage adapté et avec $S = 0.6$.*

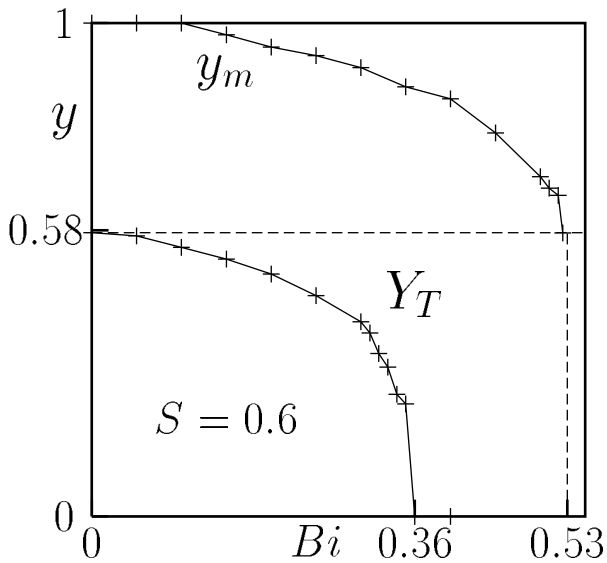


FIG. 4.14 – *Ordonnées Y_T de la transition adhérence/glissement et y_m de la frontière de la zone morte sur la paroi, en fonction de Bi, pour un maillage adapté et avec $S = 0.6$.*

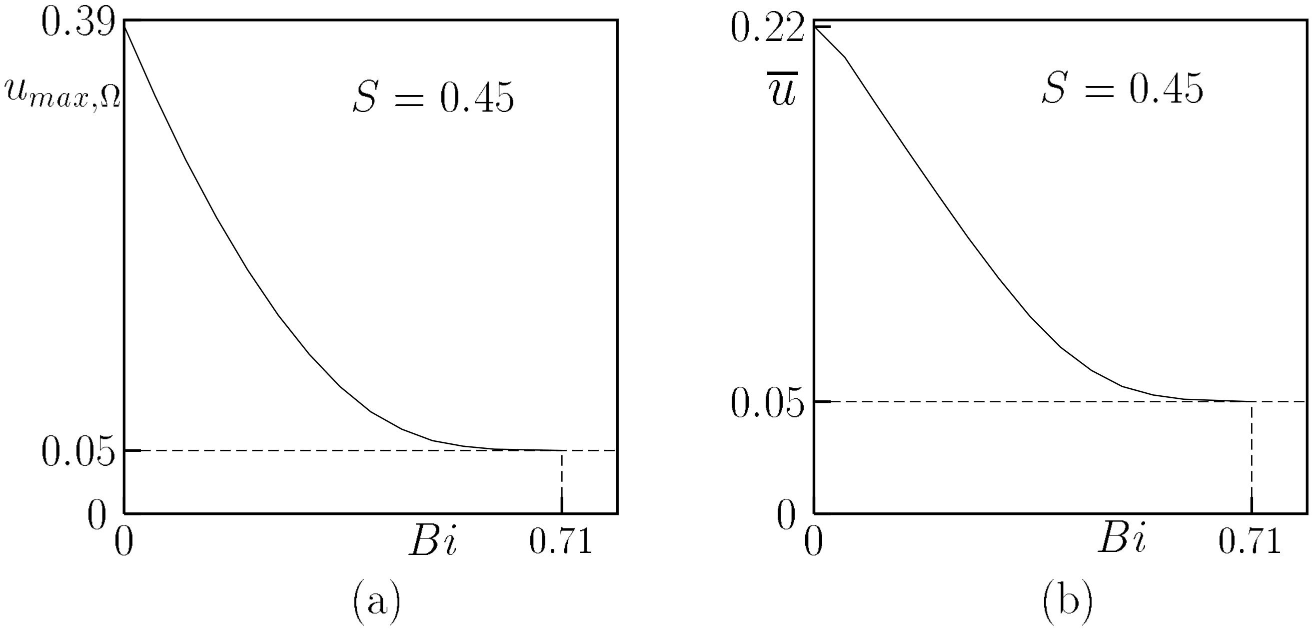


FIG. 4.15 – *(a) Valeur maximale $u_{max,\Omega}$ de la vitesse en fonction de Bi, pour $S = 0.45$. (b) Débit $\overline{u}$ en fonction de Bi, pour $S = 0.45$.*

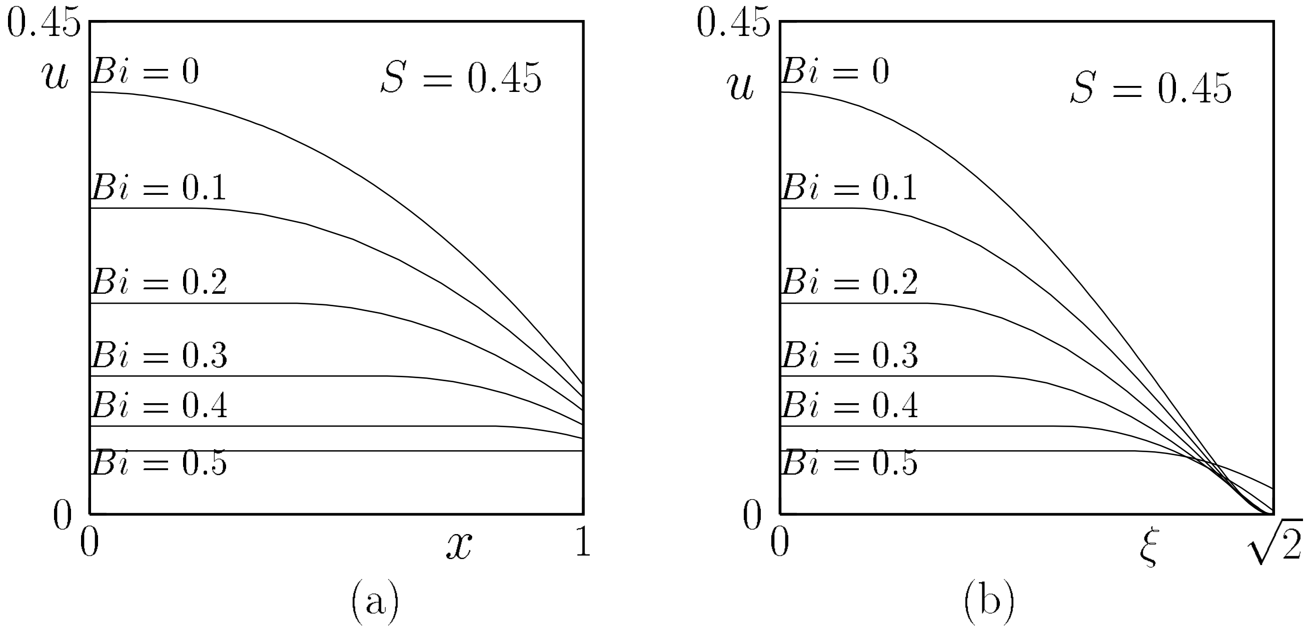


FIG. 4.16 – *Profils de vitesse pour plusieurs valeur de Bi et $S = 0.45$: (a) coupes suivant l'axe horizontal ; (b) coupes suivant l'axe diagonal.*

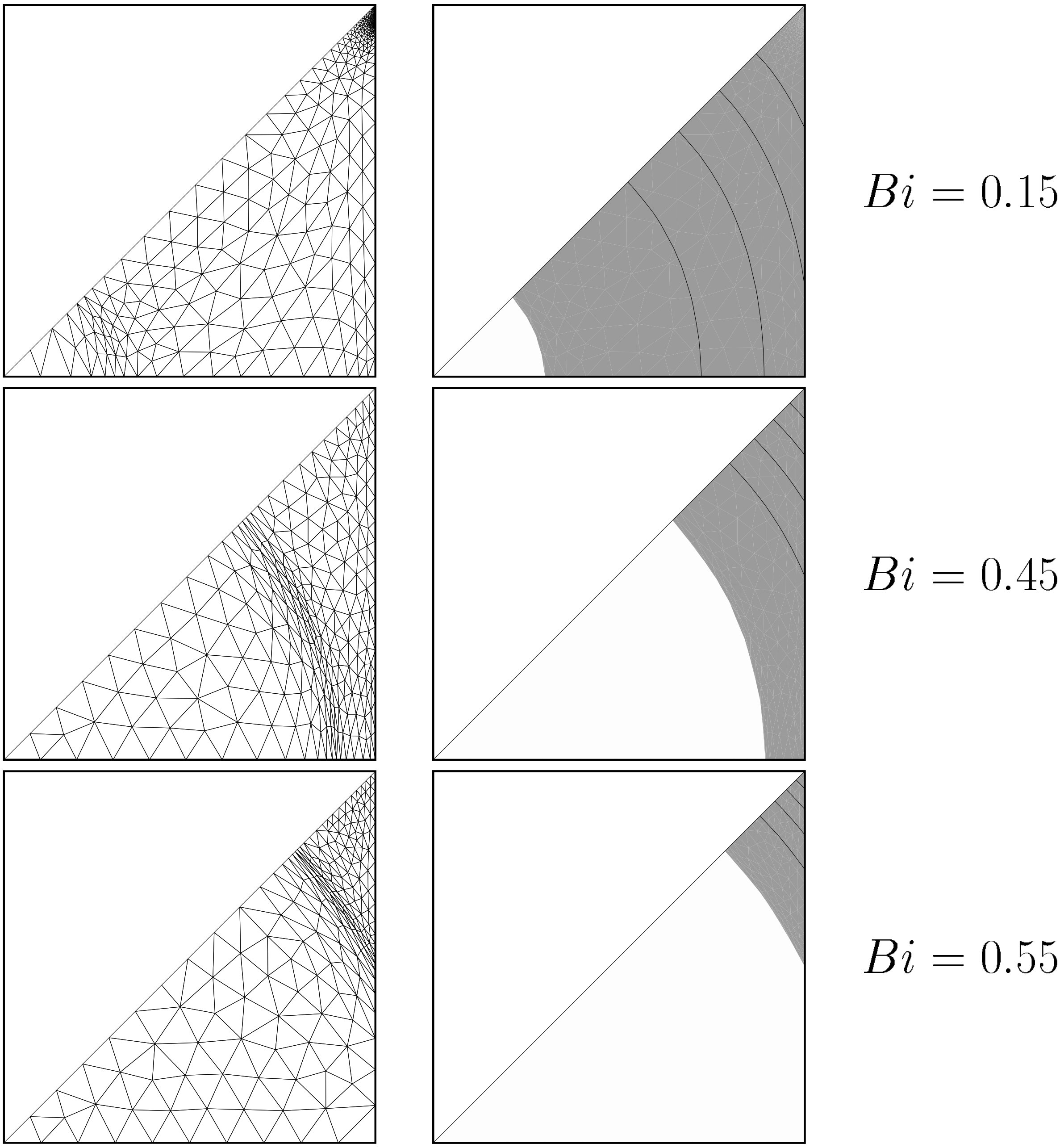


FIG. 4.17 – *Maillages adaptés et écoulement correspondant (zones rigides en gris clair, zones déformées en gris foncé et isovaleurs de la vitesse) pour $S = 0.45$ et plusieurs valeurs de Bi.*

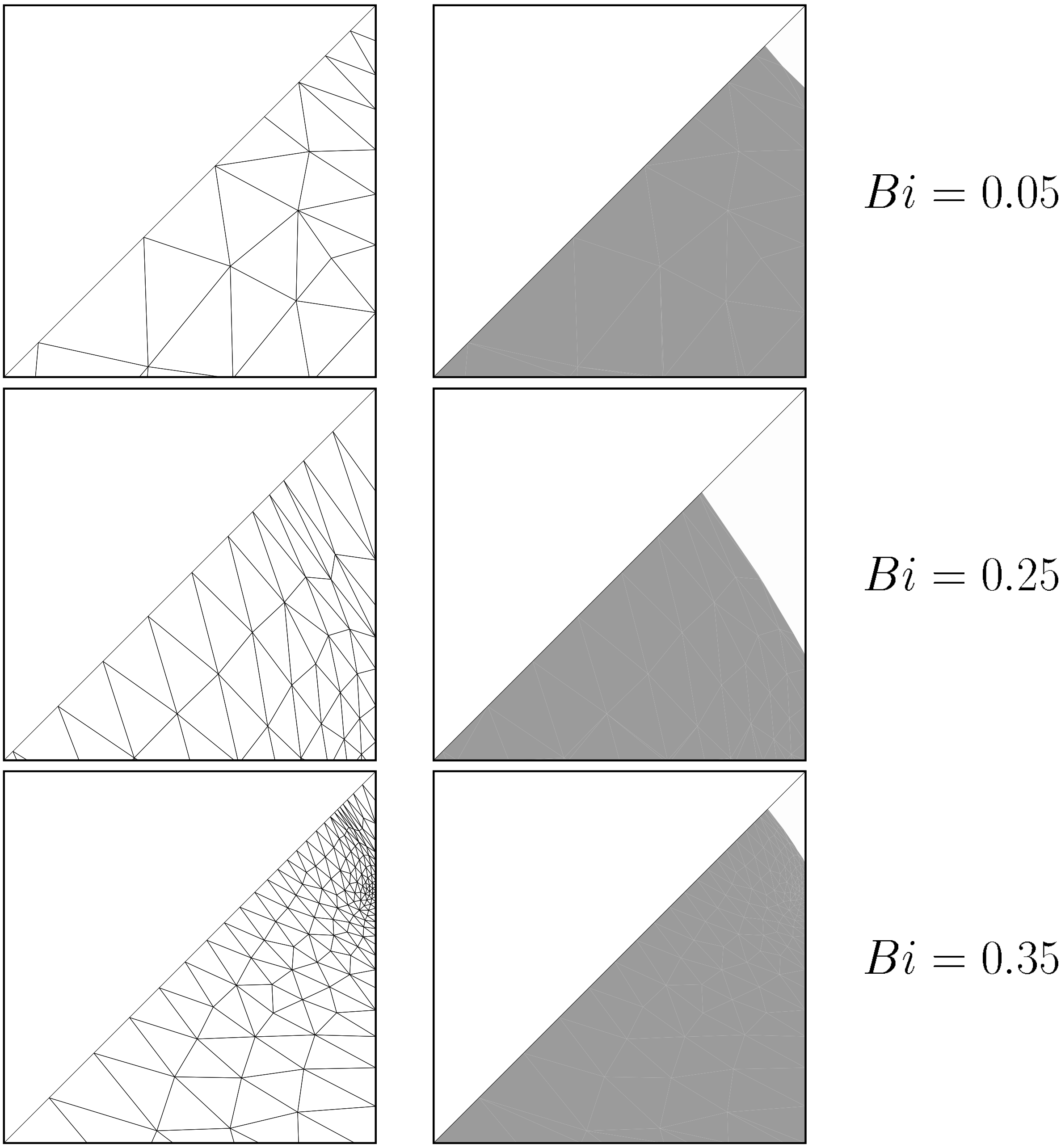


FIG. 4.18 – *Maillages adaptés et écoulement correspondant (zone morte en gris clair, zone déformée en gris foncé) au voisinage du coin pour* $S = 0.45$ *et plusieurs valeurs de* Bi.

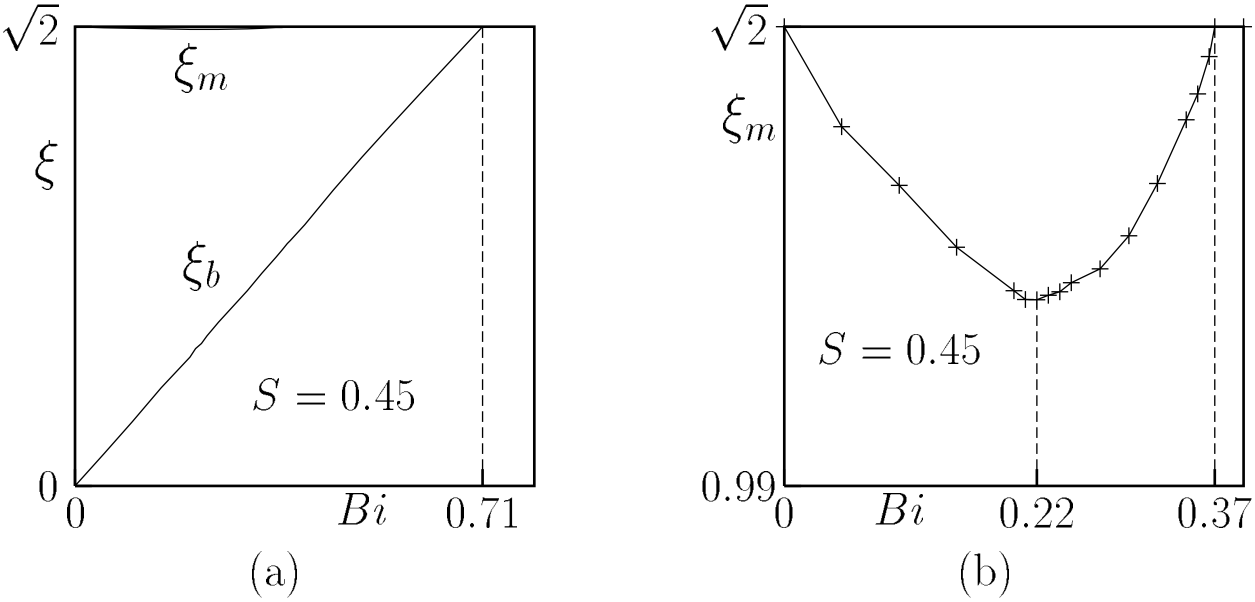


FIG. 4.19 – *Position sur la diagonale du carré de la frontière ξ_m de la zone morte et de la frontière ξ_b du bouchon, en fonction de Bi, pour un maillage adapté et avec $S = 0.45$: (a) superposition des courbes $Bi \mapsto \xi_m(Bi)$ et $Bi \mapsto \xi_b(Bi)$; (b) zoom sur la courbe $Bi \mapsto \xi_m(Bi)$.*

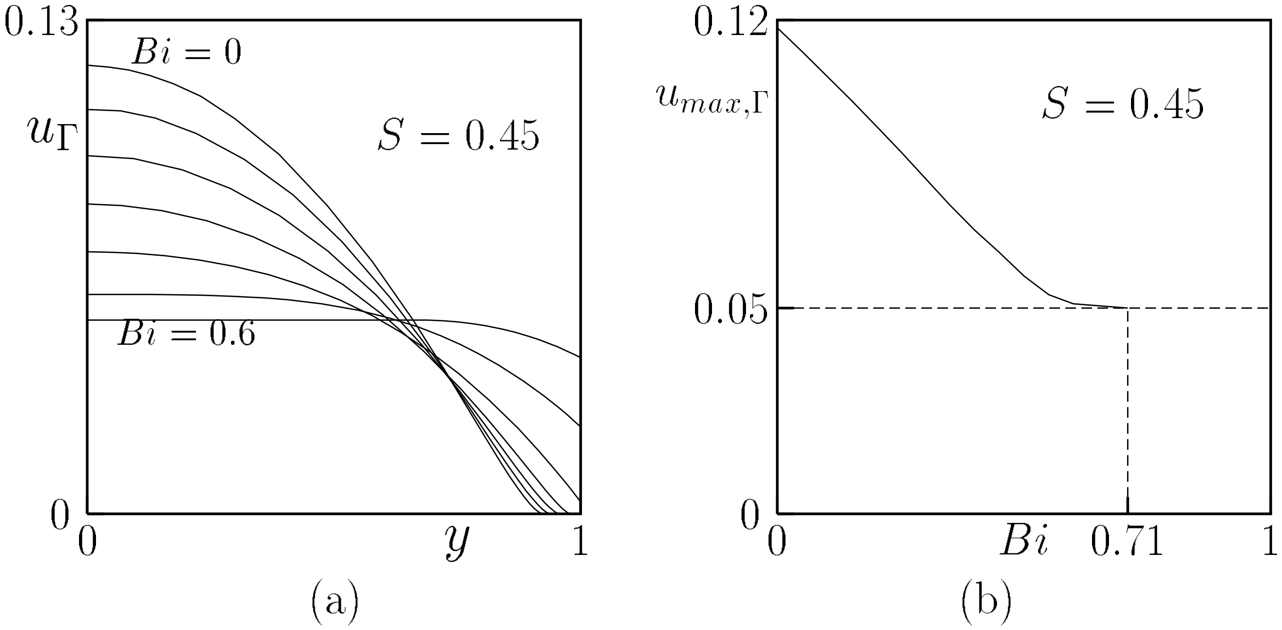


FIG. 4.20 – *Vitesse sur le bord pour $S = 0.45$ (régime mixte où adhérence et glissement coexistent) : (a) pour $Bi \in \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6\}$; (b) valeur maximale en fonction de Bi.*

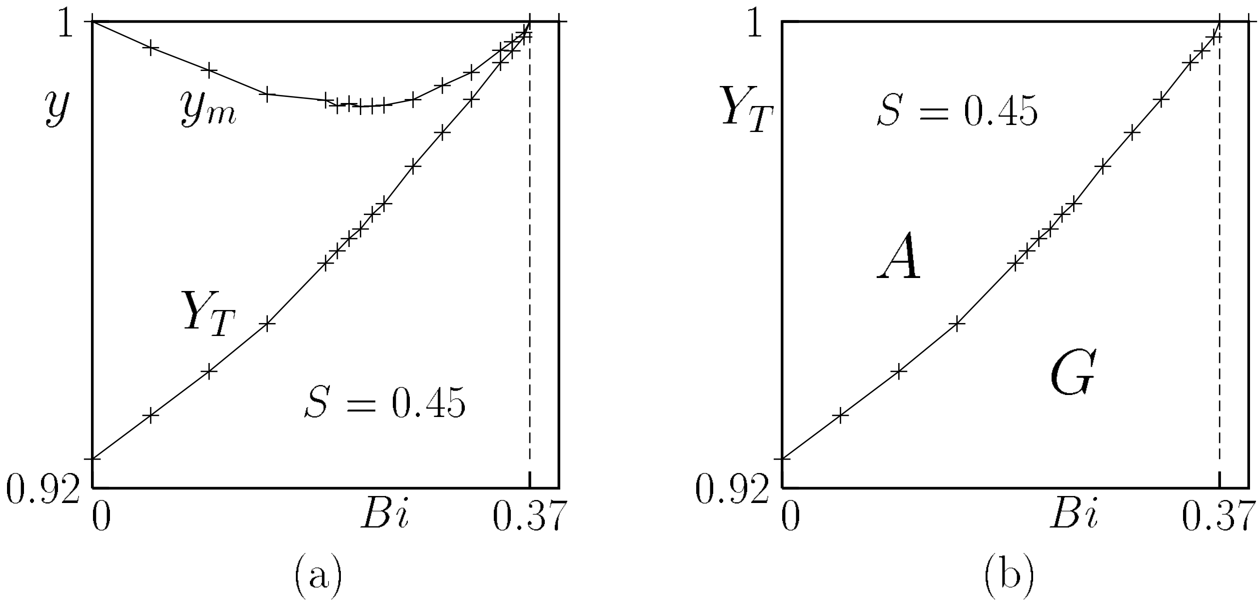


FIG. 4.21 – *Position y_m de la frontière de la zone morte et Y_T du point de transition adhérence/glissement, sur la paroi, en fonction de Bi, pour un maillage adapté et $S = 0.45$: (a) comparaison de y_m et Y_T ; (b) courbe Y_T seule.*

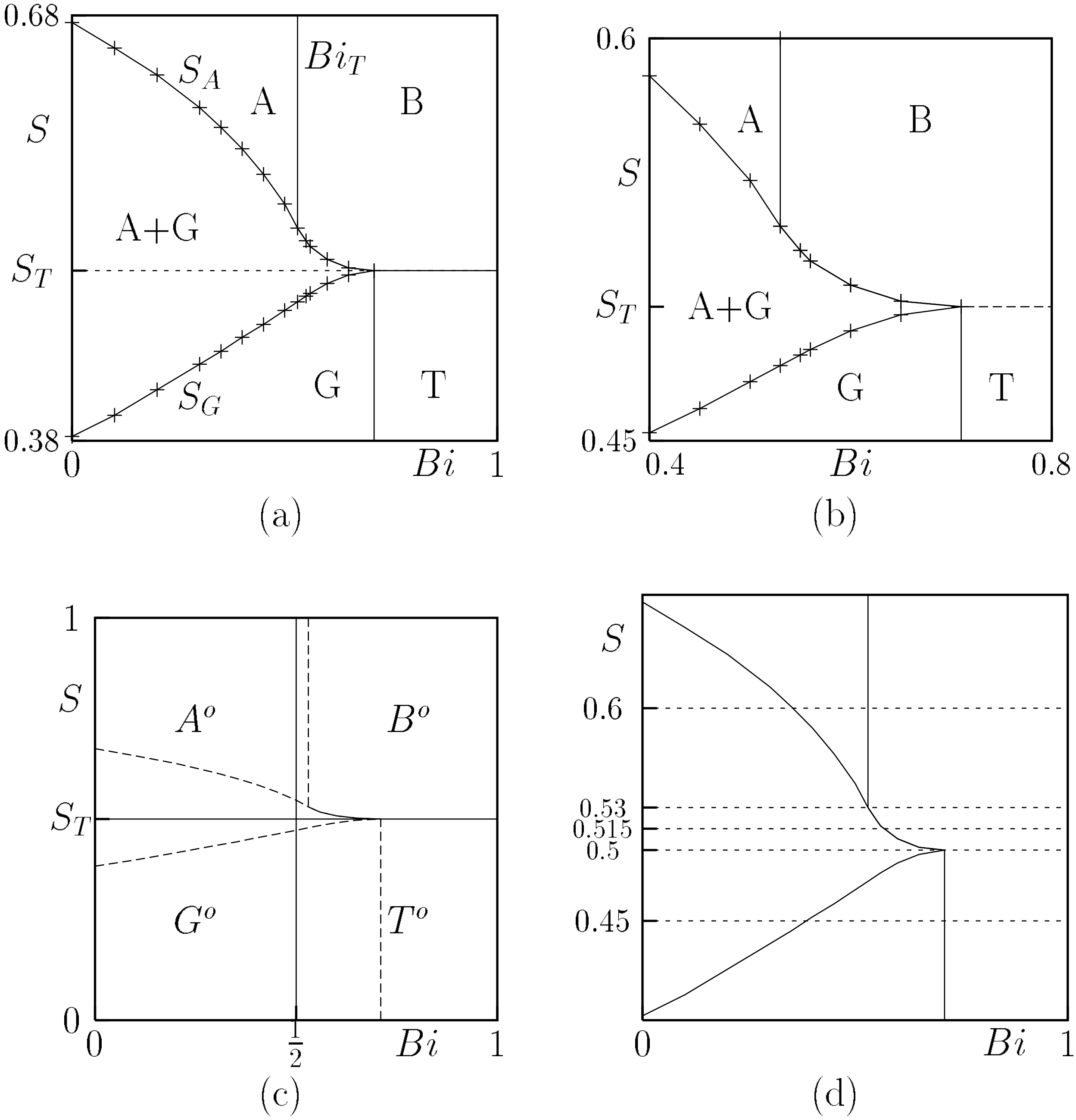


FIG. 4.22 – *Détermination et étude des cinq principaux régimes d'écoulement pour une section carrée : (a) courbes séparant les régimes ; (b) zoom au voisinage du point commun aux cinq régimes ; (c) comparaison des cinq régimes (délimités en pointillés) avec les quatre régimes A^0, B^0, G^0 et T^0 du cas circulaire (délimités en traits pleins) ; (d) représentation en poitillé des diverses valeurs de S auxquelles l'étude de la dépendance de l'écoulement en Bi a été effectuée.*

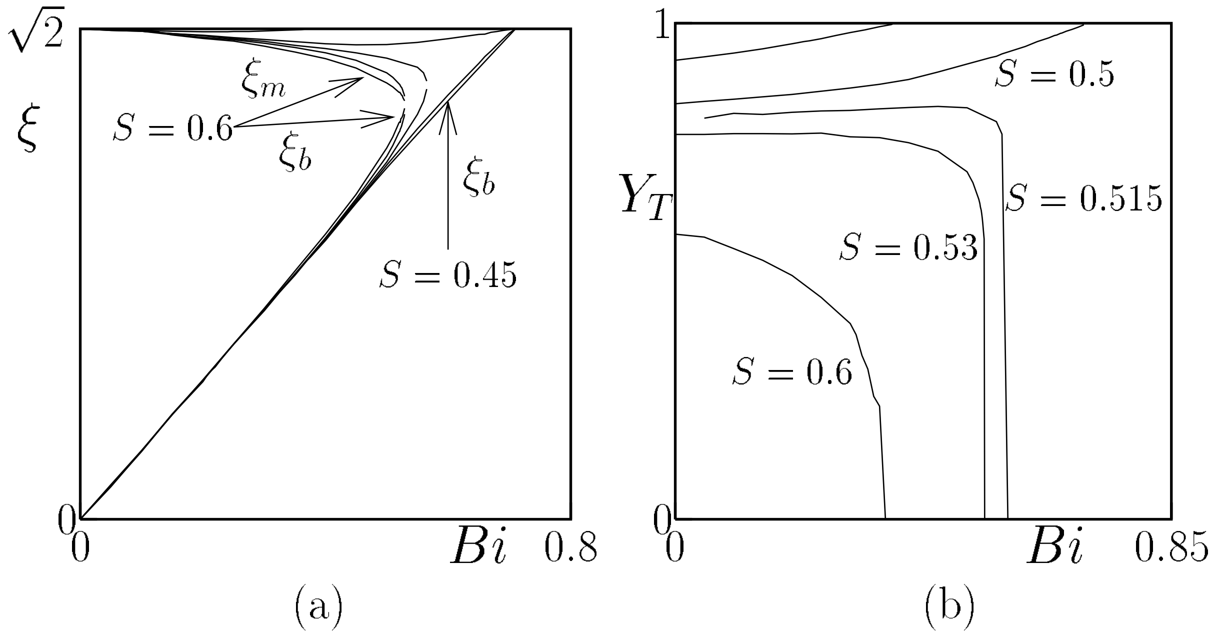


FIG. 4.23 – *Evolution des frontières en fonction de Bi, pour plusieurs valeurs de S : (a) positions ξ_m de la zone morte et ξ_b du bouchon sur la diagonale du carré ; (b) position Y_T du point de transition adhérence/glissement.*

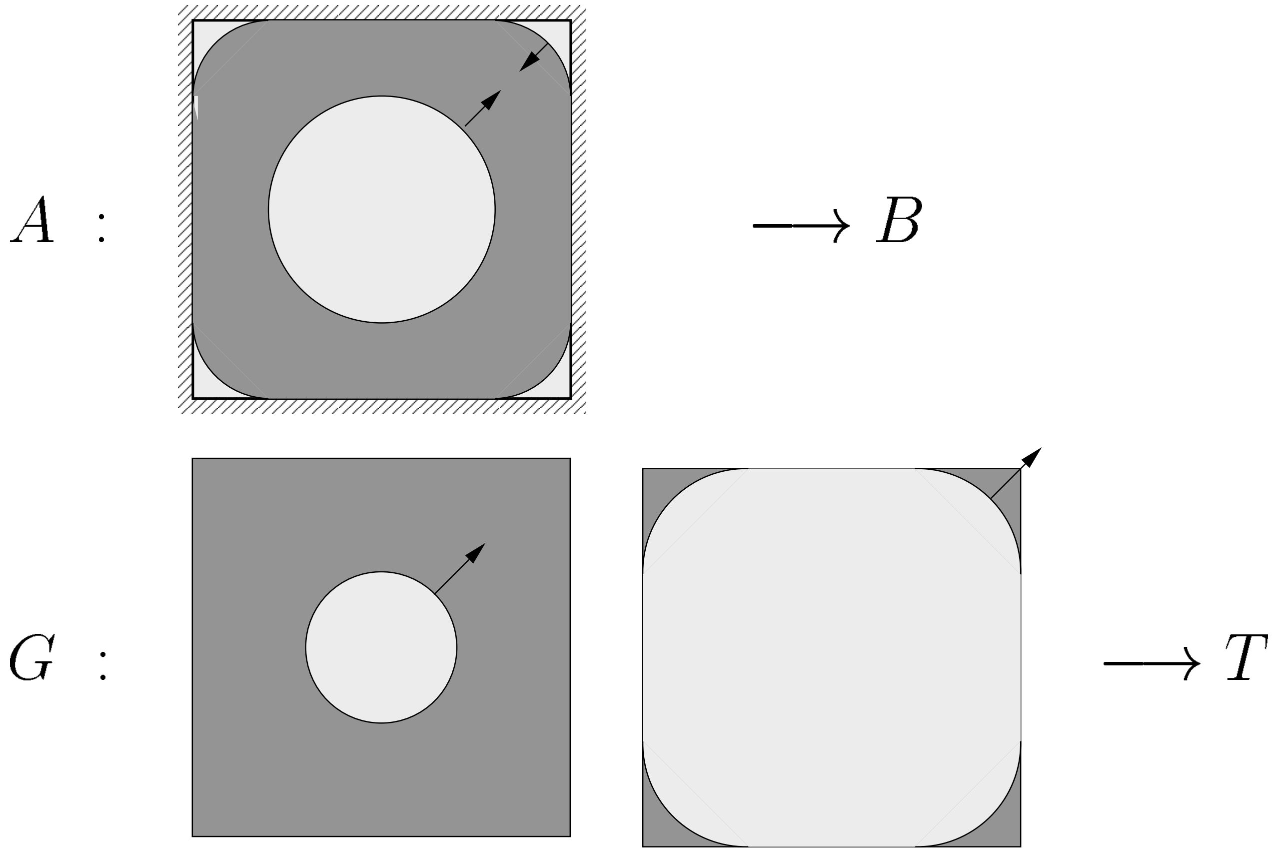


FIG. 4.24 – *Représentation schématique de l'écoulement dans les régimes A et G quand Bi croît : évolution des frontières des zones rigides et des points de transition adhérence/glissement.*

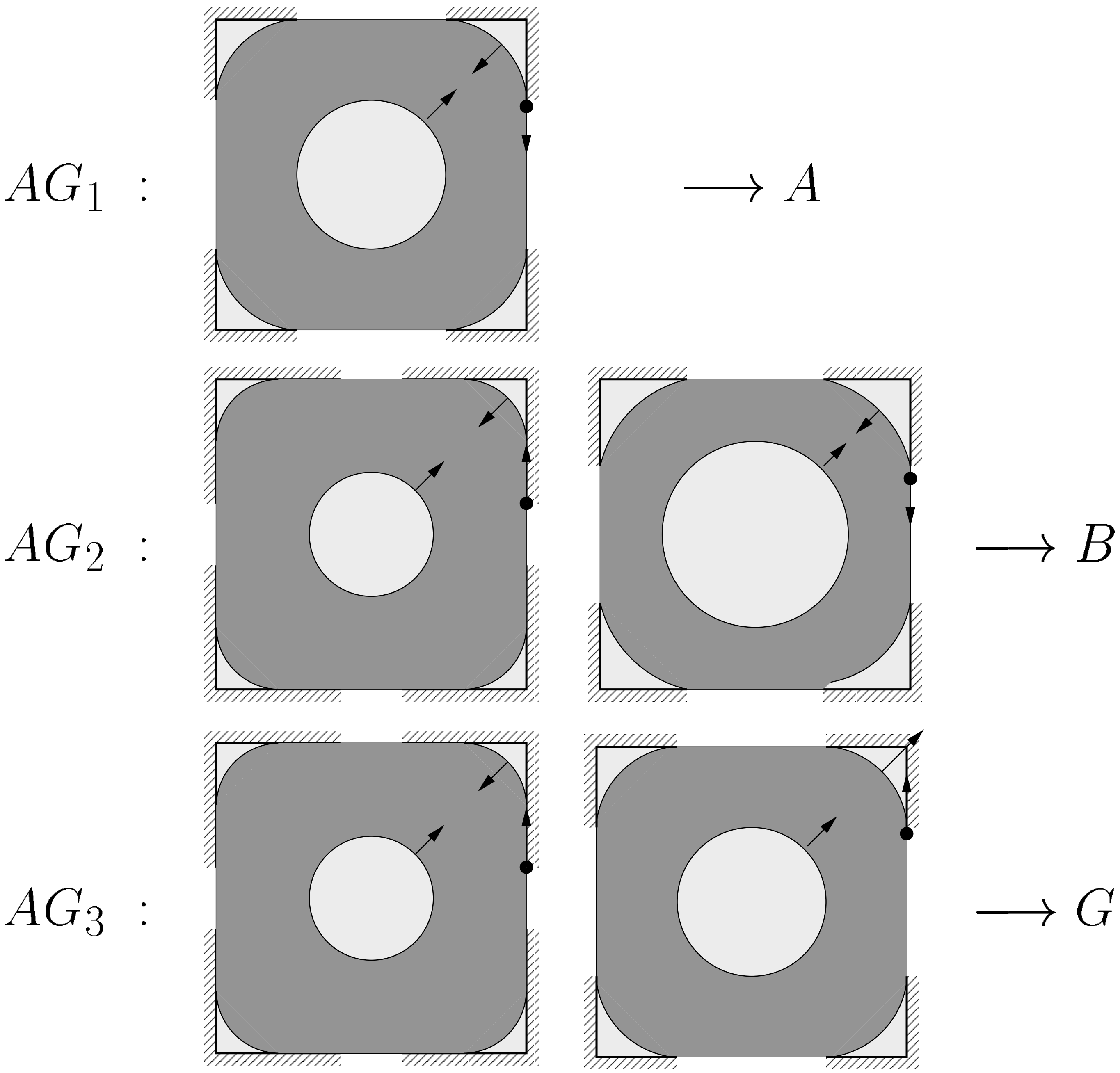


FIG. 4.25 – *Représentation schématique de l'écoulement dans les sous-régimes AG_1, AG_2 et AG_3 de $A + G$ quand Bi croît : évolution des frontières des zones rigides et des points de transition adhérence/glissement.*

Troisième partie

Écoulements bidimensionnels sans glissement

Cette partie est essentiellement orientée vers la simulation numérique d'écoulements bidimensionnels et bornés de fluides de Bingham, sans glissement à la paroi.

La méthode numérique utilisée dans la partie II est à nouveau employée avec quelques modifications. Afin de permettre une lecture indépendante, nous reprenons rapidement la description du modèle et de sa formulation variationnelle, ainsi que la description de la méthode numérique. Ceci induit quelques redondances qui permettent de limiter les renvoies aux parties I et II. Nous donnons également les résultats de tests numériques qui valident notre mise en œuvre de la méthode de résolution. Nous terminons par des résultats de simulation numérique sur un problème lié aux écoulements contenant des particules.

Chapitre 1

Généralités sur le problème continu

L'ensemble de ce bref chapitre est une succession de rappels utiles pour la compréhension des chapitres qui suivent. Nous commençons par reprendre le modèle présenté dans la partie I, lorsque $\Omega \subset I\!R^2$ et dans le cas où la condition de glissement n'a pas lieu, c'est-à-dire quand $\Gamma_S = \emptyset$. Ensuite, nous rappelons des résultats de la littérature concernant :

- une formulation variationnelle à quatre champs inconnus qui est bien adaptée à l'écriture d'un algorithme de lagrangien augmenté,
- l'existence et l'unicité d'une solution.

Nous finissons en indiquant rapidement d'autres formulations classiques. Nous renvoyons à l'annexe B pour des résultats de régularité de $\mathbf{u}$.

1.1 Modélisation des écoulements considérés

Nous considérons dans toute la suite des expressions sans dimension. Rappelons que nous négligeons l'inertie, les écoulements étant considérés lents. Le problème que nous allons résoudre consiste alors à trouver $(\mathbf{u}, \sigma, p)$ vérifiant les relations qui suivent :

$$d = D(\mathbf{u}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{div}\, \sigma - \boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

ainsi que la loi de comportement sans dimension :

$$2\, d = F_\Omega(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|\sigma\| < Bi, \\ \dfrac{\sigma}{\|\sigma\|}\left(\|\sigma\| - Bi\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.4}$$

Et avec les conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sur} & \Gamma_D \\ \sigma.\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur} & \Gamma_N \end{array} \tag{1.5}$$

Le seul nombre sans dimension qui apparaît ici est le nombre de Bingham $Bi = \dfrac{\sigma_0\, L}{U\, \eta}$. Les données sont un terme source $\mathbf{f}$ et une vitesse $\mathbf{u}_D$ imposée sur Γ_D.

1.2 Formulation directe à plusieurs champs

Après avoir défini le cadre fonctionnel, nous allons donner une formulation avec quatre champs inconnus :

- le champ de vecteur de la vitesse $\mathbf{u}$,
- le champ de tenseur des contraintes σ,
- le champ de tenseur des taux de déformation $d = D(\mathbf{u})$,
- et enfin le champ scalaire de la pression p.

Comme pour les écoulements de Poiseuille, nous choisissons cette formulation parce qu'elle est bien adaptée à l'écriture d'un algorithme. Nous rappellerons ensuite un résultat d'existence et unicité. Finalement, une réduction à deux champs, vitesse $\mathbf{u}$ et pression p, est proposée en écho à la formulation mixte du problème de Stokes.

Pour simplifier, nous supposerons ici que $\mathbf{u}_D = 0$.

1.2.1 Formulation variationnelle

Définissons les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{array}{lll} X(\Omega) & = & \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \; ; \; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\} \\ V(\Omega) & = & \{\mathbf{v} \in X(\Omega) \; ; \; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\} \\ T(\Omega) & = & \left\{\tau \in L^2(\Omega)^{2\times 2} \; ; \; \tau = \tau^T\right\} \\ M(\Omega) & = & L^2_0(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) \; ; \; \displaystyle\int_\Omega q \, \mathrm{d}x = 0\right\} \end{array}$$

Nous munissons $X(\Omega)$ du produit scalaire $(D(\mathbf{v}), D(\mathbf{w}))_{0,2;\Omega}$, ce qui en fait un espace de Hilbert, lorsque $\text{mes}(\Gamma_D)$ est non nulle. L'espace $V(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $X(\Omega)$. Les espaces $T(\Omega)$ et $M(\Omega)$ sont munis du produit scalaire L^2 classique, qu'on notera simplement $(.,.)$ en l'absence d'ambiguïté. Nous conviendrons de noter dans la suite les fonctions tests surmontées d'une barre.

Nous allons considérer le problème variationnel suivant :

PROBLÈME **1.2.1** *Trouver $d \in T(\Omega)$, $\sigma \in T(\Omega)$, $\mathbf{u} \in X(\Omega)$ et $p \in M(\Omega)$, vérifiant les relations suivantes, pour toutes fonctions test $\overline{d} \in T(\Omega)$, $\overline{\sigma} \in T(\Omega)$, $\overline{\mathbf{u}} \in X(\Omega)$ et $\overline{p} \in M(\Omega)$:*

$$2\,(d, \overline{d} - d)_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{d}|_{0,1;\Omega} - |d|_{0,1;\Omega}) \geq (\sigma, \overline{d} - d)_{0,2;\Omega} \tag{1.6}$$

$$(\overline{\sigma}, d)_{0,2;\Omega} = (\overline{\sigma}, D(\mathbf{u}))_{0,2;\Omega} \tag{1.7}$$

$$(\sigma, D(\overline{\mathbf{u}}))_{0,2;\Omega} - (p, \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}})_{0,2;\Omega} = (\mathbf{f}, \overline{\mathbf{u}})_{0,2;\Omega} \tag{1.8}$$

$$(\overline{p}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{0,2;\Omega} = 0 \tag{1.9}$$

Nous considérons l'ensemble de ces relations comme étant la formulation variationnelle du problème constitué par les relations (1.1)-(1.5) [1].

1.2.2 Existence et unicité d'une solution

Nous pouvons utiliser directement un résultat démontré dans [57] :

PROPOSITION **1.2.1** *Il existe une solution $(\sigma, \mathbf{u}, d, p)$ au problème 1.2.1, de plus, $\mathbf{u}$ et d sont uniques. En outre, les relations (1.6)-(1.9) sont équivalentes à :*

$$2\,(d, \overline{d} - d)_{0,2;\Omega} + Bi(|\overline{d}|_{0,1;\Omega} - |d|_{0,1;\Omega}) \geq (\sigma, \overline{d} - d)_{0,2;\Omega} \tag{1.10}$$

$$(\overline{\sigma}, d)_{0,2;\Omega} = (\overline{\sigma}, D(\mathbf{u}))_{0,2;\Omega} \tag{1.11}$$

$$(\sigma, D(\overline{\mathbf{u}}))_{0,2;\Omega} = (\mathbf{f}, \overline{\mathbf{u}})_{0,2;\Omega} \tag{1.12}$$

avec les fonctions test $\overline{d} \in T(\Omega)$, $\overline{\sigma} \in T(\Omega)$ et $\overline{\mathbf{u}} \in V(\Omega)$.

REMARQUE **1.2.1** *Comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 1.1.1 de la partie II, les contraintes ne sont pas nécessairement uniques.*

1. Le détail de la formulation est effectuée dans [57]

1.3 Réduction du nombre de champs inconnus

Remarquons qu'en éliminant les champs σ et d, nous obtenons un problème en vitesse-pression dont la structure linéaire sous-jacente ($Bi = 0$) est celle d'un problème de Stokes :

PROBLÈME **1.3.1** *Trouver* $\mathbf{u} \in X(\Omega)$ *et* $p \in M(\Omega)$ *tel que, pour tout* $\mathbf{v} \in X(\Omega)$ *et* $q \in M(\Omega)$*, on ait :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\,(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}-\mathbf{u})) + Bi\,(|D(\mathbf{v})|_{0,1;\Omega} - |D(\mathbf{u})|_{0,1;\Omega}) - (p, \operatorname{div}(\mathbf{v}-\mathbf{u})) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) \\ (q, \operatorname{div}\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right.$$

Reddy [56] a analysé un problème abstrait correspondant qui permet d'établir l'existence de $\mathbf{u} \in X(\Omega)$ et $p \in M(\Omega)$ ainsi que l'unicité de $\mathbf{u}$. On peut voir par exemple à ce sujet l'exposé détaillé de [12].

Ajoutons enfin qu'en choisissant $\mathbf{v} \in V(\Omega)$, nous obtenons une formulation dont le seul champ inconnu est $\mathbf{u}$:

PROBLÈME **1.3.2** *Trouver* $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ *tel que, pour tout* $\mathbf{v} \in V(\Omega)$*, on ait :*

$$2\,(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}-\mathbf{u})) + Bi\,(|D(\mathbf{v})|_{0,1;\Omega} - |D(\mathbf{u})|_{0,1;\Omega}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}-\mathbf{u})$$

C'est la formulation qui est souvent employée dans les travaux d'analyse mathématique (voir Duvaut et Lions [23]).

Chapitre 2

Description de la méthode numérique

Dans ce chapitre, nous adaptons la méthode présentée dans la partie II, au chapitre 2. Ceci nous conduit donc à présenter dans trois sections consécutives les différents aspects de la combinaison originale :

1. une approximation par éléments finis mixtes,
2. un algorithme de lagrangien augmenté,
3. un procédé d'adaptation de maillage.

L'introduction de la pression p comme inconnue du problème nécessitera quelques développements spécifiques, notamment en ce qui concerne l'algorithme de résolution, dans la section 2.3.

Précisons encore que, de même que dans la partie II, nous avons effectué la programmation de cette méthode en C++, excepté le générateur de maillage bamg [40]-[41] qui a été intégré dans notre code pour mettre en œuvre la technique d'adaptation de maillage.

2.1 Choix d'une méthode d'éléments finis

Comme dans la section 2.1 de la partie II, nous commençons par donner le problème variationnel approché, puis nous fixons les espaces approchés via une méthode mixte particulière d'éléments finis. Enfin, pour des raisons pratiques qui apparaîtrons à la section 2.3, nous introduisons une formule explicitant l'approximation du taux de déformation en fonction de la contrainte approchée, en remplacement d'une inéquation variationnelle dans le problème variationnel approché.

2.1.1 Problème variationnel approché

On se donne $X_h(\Omega) \subset X(\Omega)$, $T_h(\Omega) \subset T(\Omega)$ et $M_h(\Omega) \subset M(\Omega)$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie, pilotée par un paramètre $h > 0$.

On considère alors l'analogue discret de (1.6)-(1.9) :

Problème **2.1.1** *Trouver* $\mathbf{u}_h \in X_h(\Omega)$*,* $\sigma_h \in T_h(\Omega)$*,* $d_h \in T_h(\Omega)$ *et* $p_h \in M_h(\Omega)$ *tels que, pour toutes fonctions test* $\overline{\mathbf{u}}_h \in X_h(\Omega)$*,* $\overline{\sigma}_h \in T_h(\Omega)$ *et* $\overline{d}_h \in T_h(\Omega)$*, on ait :*

$$2\,(d_h, \overline{d}_h - d_h) + Bi(|\overline{d}_h|_{0,1;\Omega} - |d_h|_{0,1;\Omega}) \geq (\sigma_h, \overline{d}_h - d_h) \tag{2.1}$$

$$(\overline{\sigma}_h, d_h) = (\overline{\sigma}_h, D(\mathbf{u}_h)) \tag{2.2}$$

$$(\sigma_h, D(\overline{\mathbf{u}}_h)) - (p_h, \mathrm{div}\ \overline{\mathbf{u}}_h) = (\mathbf{f}, \overline{\mathbf{u}}_h) \tag{2.3}$$

$$(\overline{p}_h, \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h) = 0 \tag{2.4}$$

Le résultat suivant est démontré dans [57] :

Proposition **2.1.1** *Supposons qu'il existe des constantes* c_1*,* c_2 *indépendantes de* h *telles que :*

$$(i) \quad \sup_{\sigma_h \in T_h(\Omega)} \frac{(\sigma_h, D(\mathbf{v}_h))}{|\sigma_h|_{0,2;\Omega}} \geq c_1 |D(\mathbf{v}_h)|_{0,2;\Omega} \quad , \ \forall \mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)$$

$$(ii) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)} \frac{(q_h, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_h)}{|D(\mathbf{v}_h)|_{0,2;\Omega}} \geq c_2 |q_h|_{0,2;\Omega} \quad , \ \forall q_h \in M_h(\Omega)$$

alors le problème 2.1.1 admet une solution dont les composantes $\mathbf{u}_h$ *et* d_h *sont uniques.*

Remarque **2.1.1** *Plus concrètement encore, si nous choisissons :*

$$D(X_h(\Omega)) \subset T_h(\Omega)$$

alors la condition inf-sup sur la forme bilinéaire $(., D(.))$ *(condition (i) de la proposition 2.1.1) est satisfaite (on peut prendre* $\sigma_h = D(\mathbf{v}_h) \in T_h(\Omega)$*).*

Avec un tel choix d'espaces, l'unique élément $d_h \in T_h(\Omega)$ *vérifiant (2.2) est en fait défini par :*

$$d_h = D(\mathbf{u}_h)$$

2.1.2 Utilisation de la méthode des éléments finis

Nous souhaitons mettre en œuvre une méthode d'éléments finis pour résoudre le problème (1.6)-(1.9). Pour faciliter la description, nous considérons dans cette partie que le domaine Ω est polygonal. Nous utilisons à nouveau les notations de Raviart et Thomas [55] qui ont été rappelées dans la partie II (Chapitre 2, section 2.1) et nous nous donnons une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω. Voyons maintenant un exemple où l'on peut facilement choisir les espaces $X_h(\Omega)$, $M_h(\Omega)$ et $T_h(\Omega)$.

Exemple **2.1.1** *(Élément de Taylor-Hood)*

L'ouvrage de Brezzi et Fortin [16] mais aussi le livre de Girault et Raviart [32] contiennent de nombreux exemples d'espaces $X_h(\Omega)$ et $M_h(\Omega)$ vérifiant la condition inf-sup sur la forme $(.,\mathrm{div}\,(.))$ ((ii) de la proposition 2.1.1). Considérons ici l'un des plus populaires : l'élément de Taylor-Hood.

Il s'agit de se donner les espaces approchés suivants :

$$\begin{array}{rcl} X_h(\Omega) & = & X_h^{2,0}(\Omega)^2 \cap X(\Omega) \\ M_h(\Omega) & = & X_h^{1,0}(\Omega) \end{array}$$

D'après la proposition 2.1.1 (et la remarque qui la suit), nous pouvons alors choisir :

$$D(X_h(\Omega)) \subset T_h(\Omega) = \left\{ \tau_h \in X_h^{1,-1}(\Omega)^{2\times 2} \; ; \; \tau_h = \tau_h^T \right\}$$

Rappelons que, pour un triangle K, les ensembles $\Sigma_1(K)$ et $\Sigma_2(K)$ invoqués ici sont respectivement constitués des sommets de K et de la réunion des sommets et des milieux des arrêtes de K.

C'est cette approximation que nous avons mise en œuvre. Dans la suite, nous considérons donc que les espaces approchés sont fixés comme dans cet exemple.

2.1.3 Introduction d'une formule explicite

Nous avons déjà remarqué pour le problème de Poiseuille (dans la partie II, section 2.1), que nous ne pouvons pas affirmer l'équivalence entre l'inéquation variationnelle (2.1) et la relation $2\,d_h = F_\Omega(\sigma_h)$ et cela parce que $F_\Omega(\sigma_h)$ n'est pas nécessairement dans $T_h(\Omega)$. Précisément, dans le cadre de l'exemple 2.1.1 nous constatons que $F_\Omega(\sigma_h)$ **n'est pas dans** $T_h(\Omega)$. Or, dans le contexte des algorithmes de lagrangien augmenté, nous avons vu (dans la partie II) qu'il est agréable de disposer d'une relation analogue à la loi de comportement pour relier d_h et σ_h et que ceci nous amène ainsi à considérer la variante suivante du problème 2.1.1 :

PROBLÈME **2.1.2** *Trouver* $\mathbf{u}_h \in X_h(\Omega)$, $\sigma_h \in T_h(\Omega)$, $d_h \in T_h(\Omega)$ *et* $p_h \in M_h(\Omega)$ *tels que, pour toutes fonctions test* $\overline{\mathbf{u}}_h \in X_h(\Omega)$, $\overline{\sigma}_h \in T_h(\Omega)$ *et* $\overline{p}_h \in M_h(\Omega)$, *on ait :*

$$2\, d_h(a_i) = F_\Omega(\sigma_h(a_i)) \ , \ \forall\, a_i \in \Sigma_1(K) \ , \ \forall\, K \in \mathcal{T}_h \tag{2.5}$$

$$(\overline{\sigma}_h, d_h) = (\overline{\sigma}_h, D(\mathbf{u}_h))$$

$$(\sigma_h, D(\overline{\mathbf{u}}_h)) - (p_h, \mathrm{div}\ \overline{\mathbf{u}}_h) = (\mathbf{f}, \overline{\mathbf{u}}_h)$$

$$(\overline{p}_h, \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h) = 0$$

Dans la suite, il nous arrivera de faire référence au problème 2.1.2. Nous supposerons alors que la conclusion de la proposition 2.1.1 a encore lieu.

REMARQUE **2.1.2** *Rappelons une remarque effectuée dans la partie II, qui reste valable ici et qui donne une sens «variationnel» à la formule explicite (2.5). Soit l'inéquation variationnelle :*

$$2\,(d_h, \overline{d}_h - d_h)_{h,\Omega} + Bi(j_{h,\Omega}(\overline{d}_h) - j_{h,\Omega}(d_h)) \geq (\sigma_h, \overline{d}_h - d_h)_{h,\Omega} \ , \ \forall\, \overline{d}_h \in T_h(\Omega) \tag{2.6}$$

où les notations sont celles déjà introduite dans la partie II; $(.,.)_{h,\Omega}$ *et* $j_{h,\Omega}(.)$ *désignent respectivement le produit scalaire* $L^2(\Omega)$ *et la semi-norme* $|D(.)|_{0,1;\Omega}$ *où l'intégration est remplacée par la formule de quadrature des trapèzes. Pour que l'inéquation (2.6) soit satisfaite, il suffit que la relation explicite (2.5) soit vérifiée.*

2.1.4 Formulation à deux champs

L'élimination des champs σ_h et d_h conduit au problème mixte :

PROBLÈME **2.1.3**
Trouver $\mathbf{u}_h \in X_h(\Omega)$ *et* $p_h \in M_h(\Omega)$ *tels que, pour toutes fonctions test* $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)$ *et* $q_h \in M_h(\Omega)$, *on ait :*

$$\begin{cases} 2\,(D(\mathbf{u}_h), D(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)) + Bi\,(|D(\mathbf{v}_h)|_{0,1;\Omega} - |D(\mathbf{u}_h)|_{0,1;\Omega}) - (p_h, \mathrm{div}\,(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ (q_h, \mathrm{div}\,\mathbf{u}_h) = 0 \end{cases}$$

L'analyse d'un problème abstrait analogue a été effectué par Reddy et Hahn [38] et permet de conclure[1] à l'existence d'un unique $\mathbf{u}_h \in X_h(\Omega)$ et d'un $p_h \in M_h(\Omega)$ sous la condition inf-sup sur la forme $(., \mathrm{div}\,())$ et le couple $(X_h(\Omega), M_h(\Omega))$, soit en fait un résultat analogue

1. par application du théorème 5.1, page 1791 de [38]

au théorème bien connu d'existence et d'unicité pour le problème de Stokes[2] (voir à nouveau Brezzi et Fortin [16] ou Girault et Raviart [32]).

Pour obtenir une formulation «en $\mathbf{u}_h$», nous prenons $\mathbf{v}_h$ dans l'analogue discret de $V(\Omega)$:

$$V_h(\Omega) = \{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)\ ;\ (q_h, \mathrm{div}\ \mathbf{v}_h) = 0\ , \forall q_h \in M_h(\Omega)\}$$

et nous obtenons ainsi le :

Problème **2.1.4** *Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h(\Omega)$ tel que, pour tout $\mathbf{v}_h \in V_h(\Omega)$, on ait :*

$$2\,(D(\mathbf{u}_h), D(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)) + Bi\,(|D(\mathbf{v}_h)|_{0,1;\Omega} - |D(\mathbf{u}_h)|_{0,1;\Omega}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)$$

Une application du théorème de Lions-Stampacchia (voir [49]) sur les inéquations variationnelles de seconde espèce permet de montrer qu'il existe un unique $\mathbf{u}_h$ satisfaisant le problème 2.1.4.

2.2 Adaptation de maillage

Nous utilisons le même mailleur anisotrope BAMG et le même procédé de mise en œuvre que dans le cas des écoulements de Poiseuille (Partie II, chapitre 2, section 2.3). Le critère pour l'adaptation est de nouveau défini par la racine carrée de l'énergie mécanique dissipée :

$$\varphi(x) = \sqrt{\sigma : D(\mathbf{u})}(x) = \sqrt{\|D(\mathbf{u})\|^2 + Bi\|D(\mathbf{u})\|}(x)$$

Rappelons que le choix de ce critère trouve une justification dans l'analyse du cas monodimensionnel de la partie I, chapitre 2. Ajoutons que les résultats des mesures d'erreurs effectuées pour le problème de Poiseuille dans la partie II, chapitre 3 encouragent également ce choix.

2.3 Algorithme de lagrangien augmenté

Compte tenu de sa stabilité inconditionnelle, nous avions choisi l'algorithme d'Uzawa pour le problème de Poiseuille. Pour les écoulements bidimensionnels, nous faisons le même choix et pour la même raison. Nous allons donc rappeler la forme de l'algorithme dans le cas présent et détailler les aspects spécifiques qui n'apparaissaient pas pour les écoulements de Poiseuille. Rappelons que dans toute la suite, l'approximation de Taylor et Hood fixe le choix des espaces approchés, suivant l'exemple 2.1.1.

2. correspondant ici au cas où $Bi = 0$

2.3.1 Description de l'algorithme

Comme dans la partie II, nous pouvons préciser pourquoi la formulation variationnelle (1.6)-(1.9) est bien adaptée à l'écriture d'un algorithme de lagrangien augmenté. En fait, il sera plus commode d'utiliser la formulation équivalente (1.10)-(1.12) pour pouvoir appliquer le formalisme de [37]. Nous verrons plus loin que cela n'empèche pas le calcul d'un champ de pression p. Rappelons donc en deux mots le principe de tels algorithmes avant de présenter sous une forme concrète l'algorithme d'Uzawa appliqué à notre problème d'écoulement.

Une méthode de lagrangien augmenté consiste en un algorithme itératif, qui détermine un point de selle $((d,\mathbf{u});\sigma)$, pour une fonctionnelle $L_{\Delta t}$ nommée *lagrangien augmenté*. Dans notre cas, ce lagrangien augmenté prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_{\Delta t}\left((\overline{d},\overline{\mathbf{u}});\overline{\sigma}\right) &= |\overline{d}|^2_{0,2;\Omega} + Bi|\overline{d}|_{0,1;\Omega} - (\mathbf{f},\overline{\mathbf{u}})_{0,2;\Omega} \\ &+ (\overline{\sigma}, D(\overline{\mathbf{u}}) - \overline{d})_{0,2;\Omega} \\ &+ \frac{\Delta t}{2}|D(\overline{\mathbf{u}}) - \overline{d}|^2_{0,2;\Omega} \end{aligned}$$

pour $\overline{d}$ et $\overline{\sigma}$ dans $T(\Omega)$ et $\overline{\mathbf{u}}$ dans $V(\Omega)$ et où Δt est le paramètre d'augmentation.

En effet, les points de selle de cette fonctionnelle sont caractérisés par les relations (1.10)-(1.12), ce qui motive une telle formulation variationnelle : celle-ci permet en effet d'utiliser les méthodes de calcul de point de selle pour déterminer une solution de notre problème. Nous allons voir dans la suite que, grâce au paramètre $\Delta t > 0$, les étapes dans l'algorithme de calcul de point selle que nous utilisons sont faciles à résoudre, alors que ce ne serait plus le cas si Δt était nul. (autrement dit si on appliquait le même algorithme directement à la fonctionnelle L_0 nommée *lagrangien* au lieu de $L_{\Delta t>0}$). Ceci est donc une justification du choix d'utiliser $L_{\Delta t}$ (au lieu de L_0) pour déterminer un point de selle $((d,\mathbf{u});\sigma)$ solution de (1.10)-(1.12).

Dans le cadre des méthodes de lagrangien augmenté, l'algorithme d'Uzawa pour notre problème prend la forme concrète suivante (avec la notation $F_\Omega(.)$ de la section 1.1) :

ALGORITHME **2.3.1** *(Uzawa)*

Soient $\mathbf{u}^0 \in X(\Omega)$, $p^0 \in M(\Omega)$, $\sigma^0 \in T(\Omega)$ *et* $d^0 \in T(\Omega)$.

Étant donnés $d^n \in T(\Omega)$ *et* $\sigma^n \in T(\Omega)$, *calculer* $\mathbf{u}^{n+1} \in X(\Omega)$, $p^{n+1} \in M(\Omega)$, $d^{n+1} \in T(\Omega)$ *et* $\sigma^{n+1} \in T(\Omega)$ *comme suit :*

Étape 1 *: $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in X(\Omega) \times M(\Omega)$ résout un problème de Stokes*

$$\begin{array}{ll} sur\ \ \Omega & \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Delta t}{2}\triangle \mathbf{u}^{n+1} + \boldsymbol{\nabla} p^{n+1} = \mathbf{div}\,(\sigma^n - \Delta t d^n) + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{array} \right. \\ & \\ sur\ \ \Gamma_D & \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_D \\ sur\ \ \Gamma_N & \Delta t D(\mathbf{u}^{n+1}).\mathbf{n} = \Delta t d^n - \sigma^n.\mathbf{n} \end{array} \tag{2.7}$$

Étape 2 *: Résolution explicite des non-linéarités*

$$d^{n+1} := \frac{1}{\Delta t + 2} F_\Omega(\sigma^n + \Delta t D(\mathbf{u}^{n+1})) \tag{2.8}$$

Étape 3 *: Mise à jour des contraintes*

$$\sigma^{n+1} := \sigma^n + \Delta t\,(D(\mathbf{u}^{n+1}) - d^{n+1}) \tag{2.9}$$

Nous voyons apparaître trois types de sous-problèmes :

- un sous-problème de Stokes,
- des calculs explicites correspondant aux non-linéarités,
- des calculs explicites correspondant à la mise à jour du multiplicateur σ^n.

Tout comme dans la partie II, nous avons décidé d'utiliser cet algorithme en l'écrivant au niveau discret. Autrement dit, on discrétise chaque étape de l'algorithme. Nous allons voir cela en détail dans les sections qui suivent.

2.3.2 Résolution du sous-problème de Stokes

Le sous-problème de Stokes est la seule étape qui n'est pas explicite, il convient donc de détailler sa résolution, même si cela est désormais classique. Voici tout d'abord la forme des sous-problèmes discrets que nous devons résoudre :

Problème **2.3.1** *Étant donné $\tau_h \in T_h(\Omega)$, trouver $\mathbf{w}_h \in X_h(\Omega)$ et $p_h \in M_h(\Omega)$, tels que pour tout $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)$ et tout $q_h \in M_h(\Omega)$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t(D(\mathbf{w}_h), D(\mathbf{v}_h)) - (p_h, \operatorname{div}\ \mathbf{v}_h) = (\tau_h, D(\mathbf{v}_h))_{0,2;\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,2;\Omega} \\ (q_h, \operatorname{div}\ \mathbf{w}_h) = 0 \end{array} \right.$$

Rappelons alors un résultat abstrait désormais bien connu (voir par exemple Brezzi et Fortin [16] ou Girault et Raviart [32]).

THÉORÈME **2.3.1** *Soient X et Y deux espaces de Hilbert, a et b deux formes bilinéaires et continues respectivement sur $X \times X$ et $X \times Y$. Soit $g \in X'$. On considère les conditions :*

(i) $a(x,x) \geq c_1 \|x\|_X^2 \ , \ \forall\, x \in X$

(ii) $\displaystyle\sup_{x \in X} \frac{b(y,x)}{\|x\|_X} \geq c_2 \|y\|_Y \ , \ \forall\, y \in Y$

avec c_1 et c_2 deux constantes strictement positives. On note :

$$X_b = \{\overline{x} \in X \ ; \ b(\overline{y}, \overline{x}) = 0 \ , \ \forall\, \overline{y} \in Y\}$$

Si (i) est satisfaite, alors il existe un unique $x \in X_b$ tel que : $a(x,\overline{x}) = \langle g, \overline{x}\rangle \ , \ \forall \overline{x} \in X_b$ De plus, sous la condition (ii), il existe $y \in Y$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(x,\overline{x}) + b(y,\overline{x}) = \langle g, \overline{x}\rangle & \forall \overline{x} \in X \\ b(\overline{y}, x) = 0 & \forall \overline{y} \in Y \end{array} \right.$$

et cet y est unique.

Dans le cas concret qui nous préoccupe, nous avons donc $X = X_h(\Omega)$, $Y = M_h(\Omega)$ et

$$\begin{array}{rcl} \langle g, \overline{\mathbf{v}_h}\rangle & = & (\tau_h, D(\mathbf{v}_h)) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \\ a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) & = & \Delta t(D(\mathbf{w}_h), D(\mathbf{v}_h)) \\ b(q_h, \mathbf{v}_h) & = & -(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \end{array}$$

Le choix des espaces $X_h(\Omega)$ et $M_h(\Omega)$ que nous avons fait et qui, rappelons le, garantit les hypothèses de la proposition 2.1.1, nous assure donc l'existence d'un unique $\mathbf{w}_h \in X_h(\Omega)$ mais aussi d'un unique $p_h \in M_h(\Omega)$ vérifiant le problème 2.3.1. Il est alors possible de montrer (voir par exemple [16]) que la méthode des éléments finis nous conduit à résoudre un problème matriciel de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc} A & B^T \\ B & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} W \\ P \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F \\ G \end{array} \right)$$

la méthode réputée la plus efficace (voir [37]) pour résoudre un tel problème est à nouveau une méthode de lagrangien augmentée. Rappelons que la forme de cette sous-résolution itérative est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A + \rho B^T B)\, W^{k+1} = F + B^T G - B^T P^k \\ P^{k+1} = P^k + \rho B\, W^{k+1} \end{array} \right. \tag{2.10}$$

La convergence de W^{k+1} vers W est d'autant plus rapide que $\rho > 0$ est grand (voir Glowinski et LeTallec [37]). Dans nos calculs numériques, pour résoudre le système linéaire

associé à la matrice $A_\rho = A + \rho B^T B$, nous avons choisi d'effectuer, une fois pour toute avant la boucle de l'algorithme 2.3.1, une factorisation LDL^T de A_ρ.
Nous avons choisi la valeur $\rho = 10^7$ dans nos calculs. Le critère d'arrêt $\|B\,W^{k+1}\| < 10^{-10}$ a été retenu pour l'algorithme (2.10).
Sur l'ensemble de nos calculs numériques (chapitres 3 et 4), nous avons constaté que dans les toutes premières itérations de l'algorithme 2.3.1, trois ou quatre itérations de (2.10) sont nécessaires dans le meilleur des cas et une vingtaine dans le pire des cas. Ensuite, le nombre d'itérations de (2.10) décroît rapidement au fil des itérations de l'algorithme 2.3.1 et s'établit à une seule itération.

2.3.3 Résolution explicite de la non-linéarité

Considérons la discrétisation de l'étape (2.8). Nous effectuons des calculs de la forme :

$$\xi_h(a) := \frac{F_\Omega(\beta_h)(a)}{2 + \Delta t} \tag{2.11}$$

pour chaque sommet a des triangles $K \in \mathcal{T}_h$. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la partie II, nous pouvons considérer que cette démarche consiste à introduire une formule explicite à la place d'une inéquation variationnelle dans l'algorithme de lagrangien augmenté appliqué au problème discret 2.1.1. Cela nous conduit alors à penser que nous résolvons ainsi le problème variationnel approché avec formule explicite 2.1.2.

2.3.4 Convergence de l'algorithme

Rappelons que la convergence de l'algorithme 2.3.1 est assurée par un théorème énoncé et démontré dans le livre de Glowinski et LeTallec [37] (page 84-87) et aussi dans Fortin et Glowinski [34].

Chapitre 3

Mesures d'erreur

Nous souhaitons ici valider le solveur de la partie III mettant en œuvre :

- l'approximation par éléments finis décrite dans l'exemple 2.1.1,
- le procédé d'adaptation de maillage décrit section 2.2,
- l'algorithme de résolution 2.3.1 (Uzawa).

C'est le solveur utilisé dans le chapitre 4.

Nous avons choisi d'effectuer des tests de convergence sur le problème de Couette car nous connaissons explicitement sa solution, et de plus, celle-ci n'étant pas polynômiale par morceaux, l'erreur ne peut être nulle.

Nous commencerons par présenter rapidement le problème de Couette sous une forme sans dimension, puis nous donnerons des résultats de mesure d'erreur d'approximation sur la vitesse $\mathbf{u}$. En outre, nous dirons un mot sur les estimations d'erreurs connues pour le problème des écoulements confinés de fluides de Bingham, et sur les améliorations possibles dans le cas de Couette.

3.1 Présentation du cas test

Nous considérons l'écoulement laminaire permanent entre deux cylindres coaxiaux tournants à base circulaire. Dans ce problème, nous supposons que le matériau adhère à la paroi des cylindres. Nous faisons donc les hypothèses simplificatrices d'usage pour cet écoulement, c'est-à-dire :

1. les cylindres ont un grand allongement, autrement dit : $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0$,

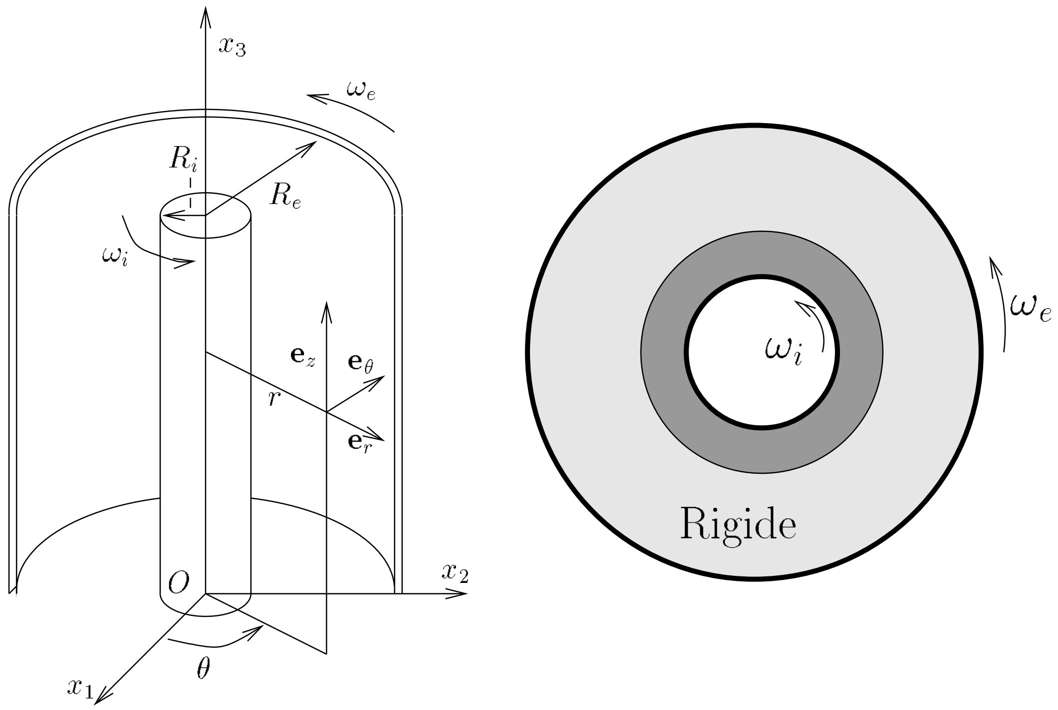


FIG. 3.1 – *Représentation schématique de l'écoulement de Couette.*

2. l'écoulement est de révolution autour de l'axe $(O\,\mathbf{e}_z)$, c'est-à-dire : $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = 0$,
3. la vitesse ne possède qu'une seule composante non-nulle u_θ sur $\mathbf{e}_\theta$ et $u_\theta = r\omega$, ω étant la vitesse angulaire.

Les expressions dimensionnées de la solution sont données dans l'annexe A.

Nous choisissons la longueur caractéristique égale au rayon extérieur R_e et la vitesse caractéristique U est la vitesse au bord externe, soit $U = R_e\,\omega_e$. On pose de plus $\Sigma = \eta\,U/R_e = \eta\,\omega_e$. Les paramètres sans dimension sont $\omega_0 = \omega_i/\omega_e$ et $r_0 = R_i/R_e$ et, bien sûr, on a toujours le nombre $Bi = \dfrac{\sigma_0\,L}{\eta\,U} = \dfrac{\sigma_0}{\eta\omega_e}$. Alors nous pouvons écrire la solution sans dimension.

Nous définit les nombres $K_0 = K_0(Bi, r_0, \omega_0)$ et $r_s > 0$ par :

$$1 = \omega_0 + \frac{K}{2r_0^2} - \frac{Bi}{2}\left(1 + \ln\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{K}{Bi}\right)\right)$$

$$r_s = \sqrt{\frac{K_0}{Bi}}$$

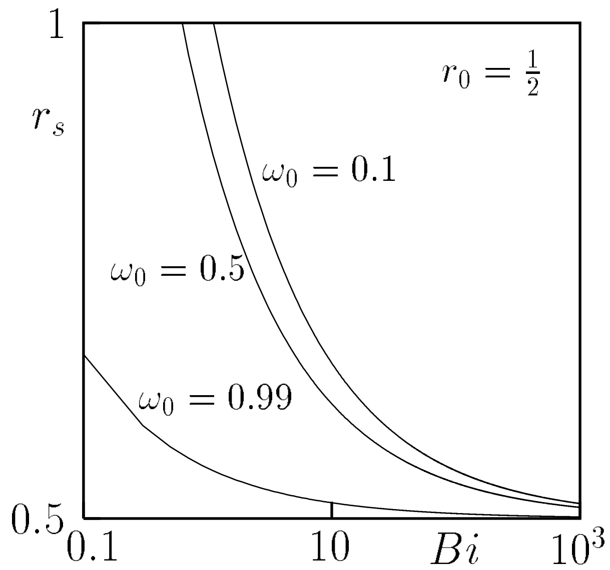


FIG. 3.2 – *Frontières r_s des zones rigides en fonction de Bi, dans un écoulement de Couette, pour différents rapports ω_0 et $r_0 = 1/2$.*

puis, nous posons :

$$K = \begin{cases} K_0 & \text{si} \quad r_s < 1 \\ \dfrac{-2(1-\omega_0 - Bi\ln(r_0))}{1-\dfrac{1}{r_0^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'écoulement est alors déterminé par les relations :

$$\sigma_{r\theta}(r) = \frac{K}{r^2}$$

$$\omega(r) = \begin{cases} \omega_0 - Bi\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) - \dfrac{K}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r_0^2}\right) & \text{si } r < r_s \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure 3.2 montre à titre d'indication la position de la frontière entre les zones rigides et les zones cisaillées en fonction de Bi pour différentes valeurs de ω_0 et pour r_0 fixé à la valeur $\frac{1}{2}$.

3.2 Tests de convergence

Les calculs ont été menés pour une géométrie fixe, définie par $r_0 = \frac{1}{2}$. La rotation relative ω_0 a également été fixée à la valeur $\frac{1}{2}$. Nous pouvons voir sur la figure 3.2 qu'il existe un Bi_0 tel qu'il n'y ait pas de zones rigides si $Bi \in [0; Bi_0]$, nous en avons calculé la valeur avec la formule (A.2). Dans notre cas particulier, où nous avons fixé r_0 et ω_0, nous pouvons calculer $Bi_0 = \dfrac{1}{3 - 2\,ln(2)}$. Afin d'observer l'influence du terme non-linéaire du problème, nous avons effectué les calculs pour la valeur $Bi = 10$. Nous pouvons alors vérifier que $Bi_0 = \dfrac{1}{3 - 2\,ln(2)} < Bi = 10$, nous sommes donc dans une situation où il existe une couronne rigide et une couronne cisaillée, avec $r_s \approx 0.63$. Cette dernière valeur est calculée numériquement par une méthode de Newton appliquée à la relation (A.1) donnant K.

Nous avons tout d'abord considéré une famille de maillages quasi-uniformes, de densités croissantes. Précisément, si h_0 est le pas du premier maillage, le pas du n-ième maillage est $h_n = \frac{h_0}{2^n}$. Ceci nous a permis de tester les aspects indépendants de l'adaptation de maillage. Nous avons pris $h_0 = 0.078539816 \approx \pi/20$. Les quatre maillages utilisés pour les tests sont représentés Fig. 3.6.

Afin de nous assurer de la validité de nos résultats, nous avons observé :

- l'indépendance de l'erreur vis-à-vis des paramètres de l'algorithme, en s'assurant que le résidu de l'algorithme était suffisamment faible pour que l'erreur n'en dépende plus,
- le pas du maillage est assez petit pour obtenir une valeur asymptotique fiable du taux de convergence.

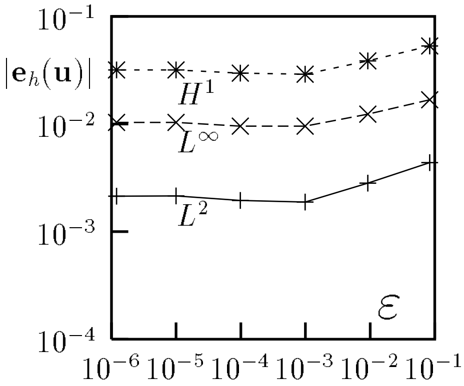
Ce sont les mêmes précautions que lorsque nous avons effectué des mesures d'erreurs sur le problème de Poiseuille, partie II, chapitre 3. Dans le cas présent, nos mesures sont moins poussées car nous souhaitons seulement valider notre solveur.

Il faut remarquer à quel point il est important de faire converger l'algorithme de résolution du problème. Les tableaux de la figure Fig. 3.3 montrent les erreurs obtenues pour chaque norme et chaque maillage, en fonction de la tolérance ε. Les calculs ont été effectués avec $\Delta t = 10$.

Il est à prévoir que pour Δt plus grand, la sensibilité à la valeur du résidu est bien plus importante. Rappelons-nous en effet que le résidu contrôle en particulier la convergence vers zéro du terme $D(\mathbf{u}_h^n) - d_h^n$. Or ce terme apparaît sous la forme $\Delta t \times (D(\mathbf{u}_h^n) - d_h^n)$ dans chaque sous-problème de l'algorithme. Lorsque nous ferons des calculs sur des problèmes plus complexes dont la solution analytique ne nous est pas connue, il sera donc impératif de contrôler la valeur des résidus et de ne pas prendre Δt trop grand (à moins de connaître une valeur optimale pour Δt qui soit très grande), sans quoi, l'erreur pourrait être arbitraire et ceci pourrait avoir entre autre des conséquences importantes sur la détermination précise des frontières des zones rigides.

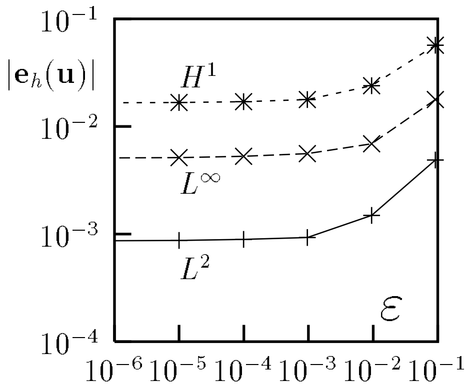
La figure 3.4 résume les résultats de convergence obtenus.

ε	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,2;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,\infty;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{1,2;\Omega}$
10^{-1}	0.004383	0.01676	0.0532441
10^{-2}	0.00282397	0.012362	0.038666
10^{-3}	0.00188375	0.00957819	0.0290291
10^{-4}	0.00195029	0.00954669	0.0297197
10^{-5}	0.00214155	0.010349	0.031781
10^{-6}	0.00213745	0.01033	0.0317359



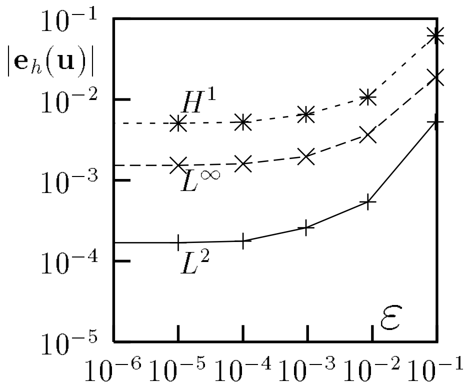
(a) $h = h_0$

ε	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,2;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,\infty;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{1,2;\Omega}$
10^{-1}	0.00486288	0.0178027	0.0568677
10^{-2}	0.00148606	0.00689919	0.0239223
10^{-3}	0.000927849	0.00559909	0.0177734
10^{-4}	0.000893885	0.00527649	0.0170144
10^{-5}	0.000871497	0.00514149	0.0167053
10^{-6}	0.000866144	0.00510299	0.0166168



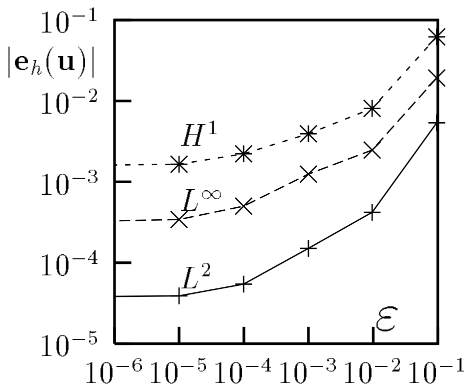
(b) $h = \frac{h_0}{2}$

ε	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,2;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,\infty;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{1,2;\Omega}$
10^{-1}	0.00529259	0.0188563	0.0613895
10^{-2}	0.000538895	0.00367968	0.0107184
10^{-3}	0.000259073	0.0019665	0.00654161
10^{-4}	0.000176973	0.00160531	0.00524781
10^{-5}	0.000168874	0.00152872	0.00510163
10^{-6}	0.000168375	0.00152522	0.00509359



(c) $h = \frac{h_0}{4}$

ε	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,2;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,\infty;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{1,2;\Omega}$
10^{-1}	0.00536305	0.0191507	0.0620498
10^{-2}	0.00041975	0.00246991	0.00805735
10^{-3}	0.000150369	0.00124385	0.00393995
10^{-4}	5.45518e-05	0.000502428	0.00222854
10^{-5}	3.90681e-05	0.000343094	0.00164664
10^{-6}	3.83533e-05	0.000328514	0.00161554



(d) $h = \frac{h_0}{8}$

FIG. 3.3 – *Sensibilité de l'erreur* $\mathbf{e}_h(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ *à la tolérance* ε *du résidu de l'algorithme 2.3.1 dans l'approximation* P_2 *du problème de Couette, pour* $\Delta t = 10$*, et* $Bi = 10$.

h/h_0	$\lvert \mathbf{e}_h(\mathbf{u})\rvert_{0,2;\Omega}$	$\lvert \mathbf{e}_h(\mathbf{u})\rvert_{0,\infty;\Omega}$	$\lvert \mathbf{e}_h(\mathbf{u})\rvert_{1,2;\Omega}$
1	0.00213753	0.01033	0.0317368
1/2	0.000867613	0.00512329	0.0166455
1/4	0.000168375	0.00152522	0.00509359
1/8	3.83533e-05	0.000328514	0.00161554

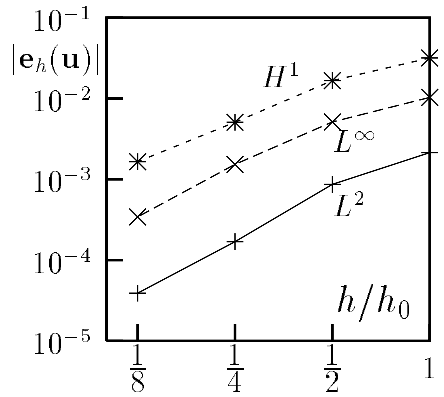


FIG. 3.4 – *Convergence vers 0 (quand $h \longrightarrow 0$) des erreurs dans l'approximation P_2 du problème de Couette, pour des maillages quasi-uniformes avec $Bi = 10$.*

La convergence apparaît clairement sur cette figure, ce qui valide le solveur sur les maillages quasi-uniformes.

Nous avons également voulu vérifier que l'adaptation de maillage fournit une amélioration de l'erreur. Nous avons donc effectué un cycle d'adaptation de maillage avec $c_0 = 1$. Quelques-uns des maillages obtenus au cours de ce cycle sont représentés Fig. 3.7. Nous pouvons constater sur la figure 3.5, que l'erreur diminue nettement dans toutes les normes où nous l'avons mesurée. En particulier, les erreurs en norme H^1 et L^∞ sont divisées par 10. Bien sûr, nous nous sommes assuré, comme pour le cas Poiseuille, que le procédé d'adaptation de maillage avait "convergé" au sens où le nombre d'éléments ainsi que les erreurs mesurées semblent osciller autour d'une valeur constante, à partir d'un nombre suffisant de remaillages. Dans le cas présent, nous voyons l'erreur H^1 se stabilise au voisinage de la valeur 3×10^{-3}. Reconnaissons que les courbes ont un aspect chaotique qui rend difficile l'appréciation de la convergence du procédé.

Nous considérons, compte tenu de l'ensemble de ces résultats, que notre solveur est validé.

3.3 Sur les estimations d'erreur

Des travaux récents de Han et Reddy [38] étendent les résultats de Glowinski, Lions et Trémolières [35] au cas d'une formulation mixte à deux champs présentant la même structure que notre problème, lorsque celui-ci est formulé en vitesse-pression (autrement dit le problème 1.3.1). Ainsi, dans notre cas, les résultats de Han et Reddy donnent alors, pour tout $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega)$ et $q_h \in M_h(\Omega)$:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,2;\Omega} \leq c \left\{ |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,2;\Omega} + |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,2;\Omega}^{1/2} + |p - q_h|_{0,2;\Omega} \right\}$$

i	résidu	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,2;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{0,\infty;\Omega}$	$\|\mathbf{e}_h(\mathbf{u})\|_{1,2;\Omega}$
0	6.39469e-07	0.00213753	0.01033	0.0317368
5	4.72028e-07	5.94251e-05	0.000676575	0.00227544
10	5.96939e-07	5.55213e-05	0.00059237	0.00229222
15	6.5547e-07	6.53697e-05	0.000997714	0.00303551

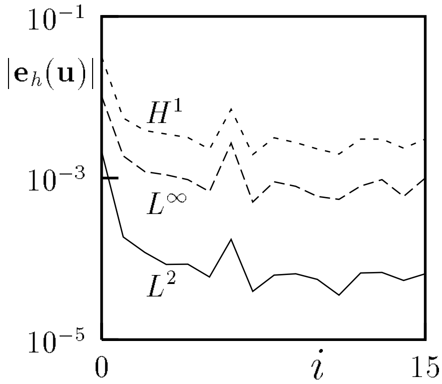


FIG. 3.5 – *Diminution de l'erreur d'approximation P_2 du problème de Couette au cours de l'adaptation de maillage, à partir du maillage uniforme de pas h_0, avec $c_0 = 1$, pour $Bi = 10$.*

La méthode de Han et Reddy consiste à combiner les techniques utilisées dans [35] à celles exposées par Brezzi et Fortin [16] et Girault et Raviart [32] pour le cas linéaire. L'estimation abstraite sur la vitesse ainsi obtenue ne donne pas d'amélioration de l'ordre de convergence obtenu dans [35]. Il est possible de montrer (voir annexe A) que pour Couette, $\mathbf{u} \in H^{5/2-\alpha}(\Omega)$, $\forall\, \alpha > 0$, en outre $p = 0$ convient de sorte qu'en utilisant l'opérateur d'interpolation (défini dans la partie II) pour concrétiser cette estimation, nous obtenons alors :

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,2;\Omega} \leq c \left\{ |\mathbf{u}|_{5/2-\alpha,2;\Omega} h^{3/2-\alpha} + |\mathbf{u}|^{1/2}_{5/2-\alpha,2;\Omega} h^{3/4-\alpha} \right\} = \mathcal{O}\left(h^{3/4-\alpha}\right)$$

Il semble cependant que ce dernier résultat sous-estime nos mesures. En effet, nous avons mesuré un pente moyenne de 1.43 pour la courbe de convergence en norme H^1 (Fig. 3.4).

En fait, nous avons pu vérifier que le problème de Couette satisfait les hypothèses de régularité, qui, dans le cas de Poiseuille circulaire, garantissent une estimation en $\mathcal{O}(h^2\sqrt{|\ln(h)|})$, avec des maillages adaptés. Rappelons que ces hypothèses sont :

$$\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap H^3(\{x \in \Omega \; ; \; \|D(\mathbf{u})\| \neq 0\})$$

$$\int_{\{x\in\Omega \; ; \; \|D(\mathbf{u})\| > \varepsilon\}} \frac{\mathrm{d}x}{\|D(\mathbf{u})\|} = \mathcal{O}(|\ln\varepsilon|)$$

$$\mathrm{mes}(\{x \in \Omega \; ; \; 0 < \|D(\mathbf{u})\| < \varepsilon\}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Or, nous avons dans le cas présent les propriétés suivantes (voir l'annexe A) :

LEMME **3.3.1** *(deux identités utiles pour Couette)*

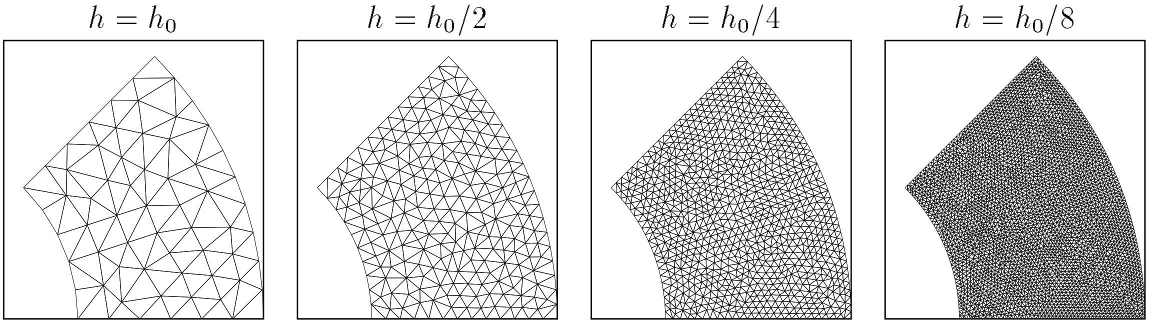


FIG. 3.6 – *Les quatre maillages quasi-uniformes utilisés pour valider le solveur d'écoulements bidimensionnels sur le problème de Couette.*

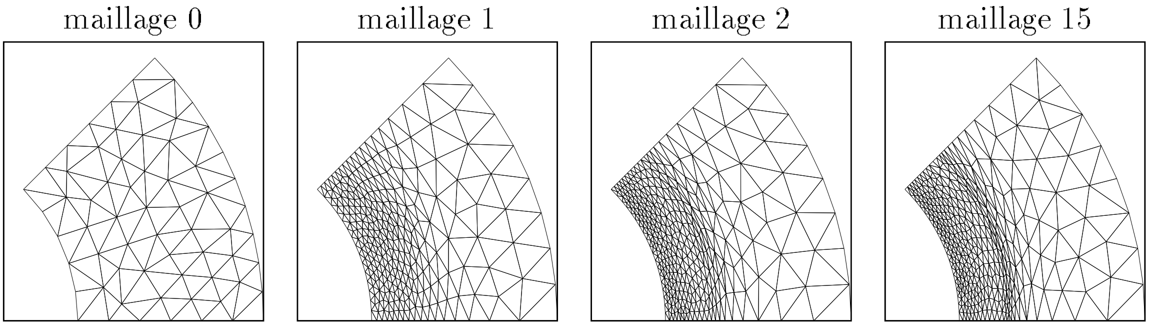


FIG. 3.7 – *Quatre maillages du cycle d'adaptation utilisé pour valider le solveur d'écoulements bidimensionnels sur le problème de Couette.*

Dans le cas d'un écoulement de Couette, les identités suivantes sont satisfaites :

$$\int_{\{x\in\Omega\ ;\ \|D(\mathbf{u})\|>\varepsilon\}} \frac{\mathrm{d}x}{\|D(\mathbf{u})\|} = \frac{\pi r_s^2}{Bi} \left\{ \frac{r_0^2}{r_s^2} - \frac{Bi}{Bi+\varepsilon} + \ln\left(\frac{1-\frac{r_0^2}{r_s^2}}{Bi+\varepsilon} \right) - \ln(\varepsilon) \right\}$$

$$\mathrm{mes}(\{x\in\Omega\ ;\ 0 < \|D(\mathbf{u})\| < \varepsilon\}) = \pi r_s^2 \left(\frac{\varepsilon}{Bi+\varepsilon} \right)$$

et, de plus :

$$\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{k+1,\infty}(\{x\in\Omega\ ;\ \|D(\mathbf{u})\| \neq 0\})\ ,\ \forall k \geq 0$$

Ainsi, il semble possible d'envisager que les résultats du chapitre II.3 puissent se généraliser à des problèmes en vitesse-pression. En particulier, ceci amène comme perspective, pour le présent travail, un approfondissement des mesures d'erreurs que nous n'avons effectuées ici que dans le but de valider le code de calcul.

Chapitre 4

Effet de paroi sur l'écoulement autour d'un cylindre

4.1 Introduction

Nous avons décidé d'étudier l'effet de paroi dans le problème de l'écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un cylindre en déplacement à vitesse constante entre deux plaques parallèles.

Nous avons choisi d'aborder ce problème car il constitue le point de départ pour l'étude des écoulements contenant des particules.Toutefois, il ne s'agit pas uniquement d'un problème de physique fondamentale intéressant. Ce problème constitue en effet un cas test pour lequel la précision des méthodes numériques utilisées est mise à l'épreuve car il comporte plusieurs difficultés de natures différentes. En effet, nous verrons que certaines zones rigides sont de petites tailles et donc *a priori* difficiles à obtenir de manière précise et, d'autre part, nous verrons que la solution présente une singularité au sommet du cylindre : les contraintes de cisaillement y tendent vers l'infini.

Notre problème, ainsi qu'un problème analogue, l'écoulement autour d'une particule sphérique, ont été étudiés intensivement pour des fluides visco-élastiques (voir par exemple les travaux numériques récents de Huang et Feng [42] ainsi que les références de cet article sur l'effet de paroi pour le cylindre).

Concernant les fluides à seuil, les références sur le cylindre sont moins abondantes. On peut citer les premiers travaux expérimentaux de Yoshioka et Adachi [67] et ceux de Brooks et Whitmore [17]-[18] sur la mesure du coefficient de traînée. A notre connaissance, il n'existe aucun travail numérique sur le problème que nous envisageons ici.

Cependant, des travaux numériques récents traitent le cas voisin de la particule. Beris et al. [7] ont étudié le cas d'un milieu infini par une méthode de transformation de domaines, et le modèle bivisqueux de Bercovier-Engleman [6]. Blackery et Mitsoulis [10] se sont intéressés aux effets de paroi en utilisant une méthode d'éléments finis et le modèle bivisqueux de Papanastasiou [54], ils ont considéré pour cela un rapport de diamètre tube/particule ≥ 2, c'est la situation que nous appellerons ici «loin des bords». La même étude est également faite par Mitsoulis et Beaulne [5] dans le cas du modèle d'Herschel-Bulkley. D'autre part, de nombreux travaux expérimentaux ont traité le problème de la particule sphérique, mais toujours pour la situation que nous nommons «loin des bords». Une revue détaillée en est faite par Chhabra et Uhlherr [19]. Il faut ajouter à cette revue les travaux récents de Atapattu et al. [2]-[3] concernant notamment les effets de paroi et la forme de la frontière des zones déformées.

Finalement, l'examen de la littérature révèle que :

- le cas du cylindre n'a jamais été traité numériquement pour les modèles viscoplastiques,
- les travaux expérimentaux et numériques concernant le cas voisin de la particule sphérique ne considèrent pas les situations où la paroi est très proche de la particule (c'est-à-dire les cas où le rapport des diamètres de la particule et du tube la contenant est plus petit que 2).

Dans le présent travail, nous proposons donc une étude originale en traitant numériquement, pour le cas du cylindre, les effets de paroi «près des bords» (c'est-à-dire lorsque la distance entre la paroi et le cylindre devient petite devant le rayon du cylindre). Nous allons déterminer le comportement de la vitesse et des contraintes. En particulier nous établirons les frontières des zones déformées et le coefficient de traînée.

4.2 Aspect général

4.2.1 Description du problème

Le schéma Fig. 4.1 résume les éléments du problèmes que nous considérons ici. Un cylindre infini de rayon R est en translation verticale à vitesse constante U, entre deux plaques distantes d'une largeur H.

La longueur de référence est le rayon R du cylindre. La vitesse de référence est la vitesse U de translation du cylindre. nous obtenons donc les deux nombres sans dimension du problème :

$$\alpha = \frac{H - R}{R} > 0$$

$$Bi = \frac{\sigma_0 \, R}{\eta \, U}$$

Le nombre α désigne donc la longueur sans dimension de l'interstice entre la plaque et le cylindre.

Par soucis d'économie, nous utilisons la symétrie horizontale et verticale pour réduire au quart le domaine de calcul (voir le schéma Fig. 4.1). Ceci donne les conditions aux limites sur les axes de symétrie :

$$\sigma.\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

et sur la paroi des plaques ainsi qu'en amont :

$$\mathbf{u} = 0$$

et enfin sur la paroi du cylindre :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e}_2$$

4.2.2 Les différentes zones de l'écoulement

Commençons par observer de manière globale l'allure de l'écoulement, Fig. 4.2 et fixons à cette occasion une terminologie concise.

L'écoulement présente quatre types de zones distinctes comme le montrent les figures Fig. 4.3 (et les zooms Fig. 4.4 et Fig. 4.5) ainsi que le schéma Fig. 4.2 :

1. Une *zone déformée* entoure le cylindre. Nous nommerons sa frontière *enveloppe*. Nous voyons que celle-ci est en contact avec la paroi. Beris et al. [7] ont déterminé une forme de ce type dans le cas d'une particule sphérique et d'un milieu infini.
2. Deux zones rigides, en forme de pointes, sont situées sur l'axe de l'écoulement et collées à la proue et à la poupe du cylindre. Ce sont deux zones mortes, toujours incluses dans la zone perturbée. Pour le problème analogue de la particule sphérique, elles sont désignées parfois dans la littérature par le nom de «callotes polaires». Ceci est moins adapté au cas d'un cylindre, nous parlerons plutôt de *pointes*.
3. Deux zones rigides ovales aux extrémités anguleuses sont situées à l'intérieur de la zone déformée, et chacune est placée entre la paroi et le cylindre, de manière symétrique par rapport à l'axe de l'écoulement. Nous nommerons ces zones *noyaux*.
4. Une zone plastique qui contient la zone déformée. C'est le matériau viscoplastique dans lequel le cylindre se déplace.

Ces zones ont été déterminées en utilisant le critère de Von Mises sur le champ discret σ_h ; Nous déterminons la frontière des zones rigides par l'isovaleur : $\|\sigma\| = Bi$.

En outre, la fonction de courant est calculée par une approximation P_2 continue du problème :

$$
\begin{array}{ll}
-\triangle\psi = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sur l'axe de symétrie coupant l'interstice} \\
\psi = 0 & \text{en amont, sur la paroi et sur l'axe de l'écoulement} \\
\psi = -y & \text{sur la paroi du cylindre}
\end{array}
$$

Ceci revient donc bien à considérer que le cylindre se déplace et que la matière est inerte loin de celui-ci. L'allure de la *zone déformée* ainsi que l'existence de la *pointe* sont des éléments familiers pour qui s'intéresse à l'écoulement d'un fluide à seuil autour d'un objet en translation.
En effet, la bibliographie sur l'écoulement de matériaux viscoplastiques autour d'une bille sphérique établit ces phénomènes (pour $\alpha \geq 1$), amenant alors la discussion sur la forme précise de l'enveloppe et de la *pointe*, en fonction de paramètres tels que α et Bi. (voir dans la revue de Chhabra et Uhlherr [19] les nombreuses références concernant la pointe et l'enveloppe).
L'existence du noyau est, par contre, un élément original qui n'est jamais mentionné pour le modèle de Bingham. Notons que les rares travaux sur le cylindre n'ont jamais mis en évidence l'allure des frontières des zones rigides, donc en particulier du noyau.
Dans le cas d'une particule sphérique, il est à noter qu'un noyau a été obtenu par Beaulne et Mitsoulis [5] via un calcul numérique et à l'aide de modèle bivisqueux de Papanastasiou [54] pour le modèle de Herschel-Bulkley. Il s'agit alors plutôt d'un «anneau» de matière rigide qui entoure la particule[1]. Remarquons que, dans ce cas particulier, l'existence d'un tel anneau n'est possible que si le champs des vitesses dans cette zone consiste uniquement en une translation parallèle à l'axe de l'écoulement. En effet, si ce n'est pas le cas, la composante de rotation fait se déformer l'anneau de matière rigide, ce qui est contradictoire! Ajoutons que Beris et al. remarquent la présence d'un tore où le champs des vitesses est «proche» de celui de solide rigide et précisent qu'il est impossible d'avoir une zone rigide dans ce tore. Nous pouvons maintenant commencer à observer le rôle de α sur les différents phénomènes que nous venons de décrire.

Nous pouvons déjà constater sur les figures Fig. 4.3, Fig. 4.4 et Fig. 4.5 que la diminution de α entraîne une réduction de la taille de chacune des trois zones. Nous voyons en particulier la réduction de l'extension totale de l'enveloppe. De même, le noyau ne fait pas que s'aplatir quand α diminue, il conserve la même forme ovale et sa superficie diminue (Fig. 4.4). La pointe voit elle aussi sa superficie diminuer tandis que sa forme est conservée (Fig. 4.5). Notons que les noyaux sur la figure Fig. 4.4 sont représentés de manière dilatée ; nous avons ramené l'interstice de longueur α à la longueur 1. Nous pouvons ainsi comparer

1. Beaulne et Mitsoulis parlent d'«îlots»

la *taille relative* des noyaux dans l'interstice et constater une réduction très nette de celle-ci.

Par ailleurs, nous pouvons observer les lignes de courant Fig. 4.3. Nous voyons alors la trajectoire des particules de matière déplacées par le passage du cylindre. Chaque particule déplacée revient à sa position initiale après le passage du cylindre. Nous pouvons alors distinguer deux types de lignes. D'une part, des lignes partent horizontalement du cylindre, le contournent puis reviennent symétriquement de l'autre côté du cylindre en contact avec celui-ci. En particulier, la ligne de niveau $\psi = 10^{-6}$ souligne la frontière de l'enveloppe. D'autre part, puisque la vitesse à la paroi de la plaque est nulle, il existe un point sur l'axe de l'interstice où la vitesse est également nulle. Les particules situées entre ce point et le cylindre ont une trajectoire en forme de boucle. Ce point particulier où la vitesse est nulle est donc le centre d'un petit tourbillon situé juste au dessus du sommet du cylindre. La ligne frontière de ce tourbillon est l'isovaleur $\psi = -1$. L'augmentation du cisaillement dans l'interstice quand α diminue est souligné par le ressèrement des lignes. Nous pouvons voir, Fig. 4.4, que les lignes ne s'écartent pas dans le noyau rigide ce qui est cohérent avec le fait que la matière ne s'y déforme pas. Le tourbillon s'aplatit quand α diminue alors que la valeur de ψ au centre diminue. Ceci est susceptible d'indiquer un accroissement du cisaillement, à condition que ψ au centre ne diminue pas trop vite. (nous verrons cet aspect plus loin avec la vitesse et les contraintes sur cet axe) Sur la figure Fig. 4.5, nous voyons que les lignes de courant sont horizontales dans toutes la partie rigides. En effet la vitesse est constante et parallèle à l'axe dans cette zone car celle-ci subit le même mouvement que le cylindre.

Dans la suite, nous allons développer et préciser ces différents aspects.

4.2.3 Rôle de l'adaptation et convergence par rapport au maillage

Les différentes zones de l'écoulement sont de tailles très différentes. En particulier la *pointe* peut être très petite et il importe d'avoir un maillage bien adapté pour en connaître la forme précise. Ceci apparaît d'ailleurs nettement dans les travaux de Beris et al. [7] où un maillage bien adapté ([7], figure 3. page 227) permet de capturer la courbure de la *pointe* (voir figure 9, page 233) et de l'*enveloppe*[2], dans le cas de la particule sphérique en milieu infini. Par comparaison, les travaux de Blackery et Mitsoulis [10] ne permettent pas une résolution aussi précise, faute d'un maillage non-adapté (voir la comparaison des deux travaux, [10], page 74, Fig. 12)

Signalons qu'à chaque valeur de α, nous avons fait correspondre un maillage initial uniforme et volontairement très grossier, ceci afin de ne pas influencer le processus d'adaptation de maillage en présumant de l'allure de la solution finale. Nous souhaitons montrer

2. modulo la perte de précision induite par l'approximation bivisqueuse du modèle de Bingham

ainsi que le maillage s'adapte facilement aux détails les plus fins, ce qui signifie que nous pouvons obtenir des résultats précis même lorsque nous ne connaissons pas à l'avance l'allure de la solution.

Ajoutons par ailleurs que les maillages initiaux n'ont pas tous le même pas, c'est-à-dire que ce pas initial $h^0 = h^0(\alpha)$ n'est pas constant par rapport à α. En effet, avoir h^0 constant par rapport à α impose de prendre h^0 égale à la plus petite valeur de α étudiée (il faut au moins un élément dans l'interstice !), or cela conduit à des maillages initiaux inutilement denses lorsque α est plus grand. Par exemple, si $h^0 = \alpha_{min} = 1/16$, nous avons 32 éléments dans l'interstice pour $\alpha = 2$, ce qui nous semble inutilement volumineux pour un maillage initial. Nous avons donc choisi $h^0(\alpha)$ de manière à avoir d'une part une centaine d'éléments pour $\alpha = 2$, ce qui correspond à $h^0(2) = 1/2$, puis d'autre part de manière à conserver un élément dans l'interstice, soit la répartition[3] :

$$h^0(\alpha) = \begin{cases} 1/2 & si \quad \alpha \geq 1/2 \\ \alpha & si \quad \alpha \leq 1/2 \end{cases}$$

En outre, pour obtenir une solution «satisfaisante», chaque valeur de α requiert une valeur particulière de c_0, c'est pourquoi les résultats que nous présentons ont été obtenus avec une valeur de c_0 comprise, selon les cas, entre 1 et 1/4.

Dans toute la suite de cette section, sauf mention explicite du contraire, nous considérons le cas particulier où $\alpha = 1$ et $Bi = 10$. La valeur de c_0 que nous avons utilisée dans le processus d'adaptation est alors de 1/2.

Voyons tout d'abord, Fig. 4.6, comment le maillage et la solution se précisent au cours d'un cycle d'adaptation. Le maillage initial ($N = 0$) est grossier, l'*enveloppe* est donc elle-même très grossière. De plus le *noyau* et la *pointe* n'apparaissent pas. Le second maillage ($N = 1$) est beaucoup plus dense dans la zone déformée en particulier dans l'interstice. Ceci fait apparaître le *noyau*. En outre, la forme de l'*enveloppe* apparaît. Le maillage suivant ($N = 2$) commence à s'adapter aux différentes frontières. Nous voyons les formes de l'*enveloppe* et du *noyau* devenir plus nettes. De plus, la *pointe* apparaît pour la première fois. Le dernier maillage ($N = 9$) est nettement resserré sur les frontières. Il est également moins dense que le second ($N = 1$) dans les parties de la zone déformée où la dissipation d'énergie est faible (autrement dit dans la zone déformée mais loin de l'interstice).

Les lignes de courant se précisent plus rapidement que les frontières, car la résolution de la fonction de courant (P_2) est plus précise que celle des contraintes (P_1-discontinue). En particulier la ligne d'enveloppe et la frontière du tourbillon sont nettement identifiables dès le premier maillage adapté.

Nous avons représenté en détail le maillage et les frontières des zones sur la figure Fig. 4.7.

---

3. qui ne prétend pas être la meilleure mais nous a paru convenable pour un maillage initial dans le cadre d'une étude des effets de paroi

Nous pouvons en particulier observer l'allongement et l'aplatissement des triangles le long des frontières de la *pointe* et du *noyau.*

Nous disposons donc d'un procédé qui permet de déterminer de manière très précise la courbure et les proportions des frontières des zones rigides. En particulier, dans le cas précis de la figure Fig. 4.7, nous pouvons constater sans équivoque que la *pointe* n'est pas arrondie et que le *noyau* est convexe, avec des extrémités pointues.

Nous devons également souligner un autre aspect important de l'adaptation de maillage ; la contrainte au sommet du cylindre est singulière. Nous devons donc être capable d'obtenir un maillage suffisamment fin et adapté à cette singularité. Nous avons représenté sur la figure Fig. 4.8.a le dernier maillage du cycle d'adaptation ($N = 9$) au voisinage de la singularité et, Fig. 4.8.b, le deuxième invariant du tenseur des contraintes. La courbe ainsi obtenue montre la nécessité de prendre des mailles localement inférieures à 10^{-2} pour voir l'indice de la singularité apparaître.

Nous avons également porté sur la figure Fig. 4.9 cette même courbe pour chaque maillage du cycle d'adaptation. Nous voyons alors la solution se préciser jusqu'à une finesse de maille de 10^{-4}. Nous avons représenté, à titre d'exemple, Fig. 4.10, le nombre d'éléments des maillages en fonction des itérations du cycle d'adaptation. Ce nombre augmente rapidement, puis se stabilise pour $N \geq 5$, ce que nous pouvons interpréter comme une convergence du processus d'adaptation. Cette convergence du nombre d'éléments a été observée pour tous les calculs dont nous présentons les résultats.

Nous avons déjà mentionné que, pour certaines valeurs de α, choisir $c_0 = 1$ suffit à obtenir une solution d'allure «satisfaisante». Cela signifie concrètement que la singularité est résolue et que les frontières des zones rigides apparaissent nettement. Cependant, lorsque α diminue, les contours des zones rigides, notamment la *pointe*, n'apparaissent pas avec une précision suffisante. Il semble alors nécessaire de choisir c_0 plus petit que 1. Rappelons en effet que le processus d'adaptation de maillage a pour but de niveler l'erreur. Or, lorsque α diminue, le niveau des déformations augmente dans l'interstice, tandis qu'ailleurs (en particulier au voisinage de la *pointe*), il reste borné. Alors l'erreur sur le premier maillage augmente lorsque α diminue. Donc, pour que l'erreur au voisinage de la *pointe* soit la même que dans l'interstice, il devient nécessaire d'avoir un maillage dense dans l'interstice, alors, que, au niveau de la *pointe*, le maillage peut être assez grossier. Ceci explique que, lorsque α diminue, le maillage se densifie de plus en plus dans interstice au détriment d'autres zones. Pour obtenir des frontières de zones rigides plus nettes, il faut alors exiger une erreur locale plus faible, soit choisir c_0 plus petit que 1.

La figure Fig. 4.11 montre, dans le cas particulier $Bi = 10$ et $\alpha = 1/4$, comme le profil de $\|\sigma\| - Bi$ se précise sur l'axe de l'écoulement, lorsque nous prenons $c_0 = 2^{-n}$ et que nous choisissons $n = 0, 1, 2$. La courbe pour $c_0 = 1$ est nettement distincte de des deux courbes $c_0 = 1/2$ et $c_0 = 1/4$ qui sont presque confondues. Ceci permet de de constater un point important qui est la convergence des frontières y_p de la *pointe* et y_e de l'*enveloppe* sur cet axe.

4.3 Effet de la paroi sur la vitesse et les contraintes

Nous souhaitons étudier les effets géométriques (autrement dit la dépendance en α), pour Bi non nul. A cet effet nous choisissons une valeur de Bi qui, nous l'espérons, n'entre pas un cas *très particulier*. Une valeur particulièrement petite nous rapproche du cas limite où les effets visqueux dominent, au contraire une valeur particulièrement grande nous rapproche du cas limite où les effet plastiques dominent. Ainsi, dans toute cette partie, Bi est fixée à la valeur $Bi = 10$, où aucun des deux effets ne nous a paru nettement dominer l'autre.

Nous avons pris soin de vérifier que le domaine de calcul est suffisamment long pour ne pas perturber la solution. Pour cela, nous nous sommes référés à l'extension y_e de l'enveloppe sur l'axe de symétrie parallèle à la paroi en fonction de la longueur L du domaine de calcul. Nous avons fait les calculs pour une longueur $L = 10R$ et $L = 5R$, cela pour chaque α, sans observer de changements significatifs dans la valeur de l'extension y_e.

4.3.1 Comportement sur l'axe de symétrie traversant l'interstice

Considérons en détail le comportement de la solution dans l'interstice. En particulier, observons les variations des contraintes et de la vitesse sur l'axe de symétrie. Notons qu'à cet effet nous utiliserons *de préférence* l'abscisse normalisée $\tilde{x} = \dfrac{x-1}{\alpha}$, afin de pouvoir facilement comparer les quantités entre elles, en fonction de α.

Commençons par étudier le rôle de α sur le tenseur des contraintes σ. La figure Fig. 4.12.a représente $\|\sigma\|$ sur l'axe de l'interstice, pour plusieurs valeurs de α, en fonction de abscisse $\tilde{x} \in]0;1[$ précédemment définie. Chaque courbe tend vers $+\infty$ en 0, décroît jusqu'à une valeur nulle en $\tilde{x}_1(\alpha)$, puis $\|\sigma\| - Bi$ devient à nouveau positif en un point $\tilde{x}_2(\alpha) > \tilde{x}_1(\alpha)$ et croit jusqu'à une valeur finie en $\tilde{x} = 1$. Ceci est la manifestation de trois phénomènes :

1. la contrainte est singulière au sommet du cylindre (c'est une singularité géométrique),
2. il existe une zone rigide (où $\|\sigma\| < Bi$), que nous nommons *noyau* située vers le milieu de l'interstice,
3. le cisaillement est intense à la paroi.

Nous voyons que le cisaillement à la paroi croit lorsque α diminue. Ceci est caractéristique des effets de paroi, du moins lorsque l'adhérence est imposée (voir par exemple les travaux cités en introduction).

La singularité des contraintes est également un phénomène connu pour les écoulements avec ce type de géométrie. Sur la figure Fig. 4.13, nous pouvons voir, pour différentes valeurs de α, la quantité $\|\sigma\|$ au voisinage de la singularité. Nous voyons que la pente des courbes est indépendante de α. Plus précisément, nous avons, au voisinage de $x = 1$:

$$\|\sigma(x)\| - Bi = c(\alpha)(x-1)^{-0.084}$$

$$c(\alpha) = c_0.\alpha^{-4/5} \ , \ \ \alpha << 1$$

(le coefficient $c(\alpha)$ est représenté sur la figure Fig. 4.13.b)

La présence du noyau est plus inhabituelle. Nous voyons que la *place relative* qu'il occupe diminue lorsque α diminue. Cette diminution est représentée sur la figure Fig. 4.12.b où nous pouvons voir l'évolution des frontières $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ en fonction de α. Lorsque α décroît, la courbe de $\tilde{x}_1$ croit et converge vers une valeur limite $\tilde{x}_1(0) = 1/2$. Par contre, la courbe de $\tilde{x}_2$ se compose de deux parties monotones. Pour α décroissant vers 1, $\tilde{x}_2$ croit vers un maximum, puis lorsque α tend vers 0, $\tilde{x}_2$ décroît vers la valeur limite $\tilde{x}_2(0) = 1/2$. Si nous détaillons d'avantage, nous constatons que, pour $\alpha \leq 1$, le noyau vient se placer au centre de l'interstice, alors que, pour $\alpha \geq 1$, il est plus proche du cylindre que de la paroi. De plus, pour $\alpha \leq 1$, nous pouvons constater que la *taille relative* du noyau tend vers 0 lorsque α tend vers 0. Ceci n'est pas une évidence ; en effet, l'hypothèse selon laquelle $\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$ est une constante c non-nulle n'est pas absurde, car cela signifie alors tout simplement que la taille («réelle») du noyau vaut $x_2(\alpha) - x_1(\alpha) = c\,\alpha$, ce qui a un sens dès que $c < 1$. Le noyau s'aplatit donc nettement plus vite que l'interstice. Remarquons que l'évolution de la taille relative du noyau met en évidence le rôle central de la valeur $\alpha = 1$ qui permet de délimiter les situations *près du bord* des situations *loin du bord.*

Observons à présent, Fig. 4.14, le profil de vitesse u_1 dans l'interstice, suivant l'axe de symétrie, pour différentes valeurs de α. Les courbes sont semblables à celles que nous obtiendrions en «penchant» un profil de Poiseuille. Plus précisément, elles présentent un plateau central qui n'est pas horizontal, ce qui révèle un déplacement de solide rigide dont la composante de rotation n'est pas nulle, ceci correspond au noyau rigide identifié précédemment et ajoute ainsi une information : la matière dans ce noyau est en rotation (la vitesse de rotation étant alors la pente du plateau). Sur la figure Fig. 4.14.b, nous pouvons comparer la *largeur relative* du plateau en fonction de α. Nous retrouvons l'observation déjà faite avec les contraintes ; la *largeur relative* diminue avec α, lorsque $\alpha \leq 1$. Compte tenu de ce qui précède, il est assez naturel d'étudier en détail la composante de rotation rot $\mathbf{u}$. (Notons que la figure Fig. 4.14.b ne nous permet pas de comparer facilement les pentes des plateaux, celles-ci étant faussées d'un facteur α par la représentation à l'aide de abscisse $\tilde{x}$)

La quantité rot $\mathbf{u}$ est représentée sur la figure Fig. 4.15 pour plusieurs valeurs de α. Nous constatons à nouveau la présence d'un plateau, qui correspond à la pente des plateaux des courbes de vitesse que nous venons d'observer. La valeur de rot $\mathbf{u}$ dans ce plateau correspond donc à la vitesse de rotation dans le noyau rigide.

La représentation de rot $\mathbf{u}$ en fonction de $\tilde{x}$, au voisinage des plateaux (Fig.4.15.c) permet de constater que la vitesse de rotation ω dans le noyau croit lorsque α diminue. Cette croissance est représentée sur la figure Fig. 4.15.d. Nous y voyons nettement ω tendre vers l'infini en accélérant quand α tend vers 0. Plus précisément, nous avons pu établir que :

$$\omega(\alpha) = c_1\, \alpha^{-16/25} \quad , \quad \alpha << 1$$

4.3.2 Comportement sur l'axe parallèle à la paroi

Nous considérons à présent le comportement de la vitesse et des contraintes sur l'axe de symétrie parallèle à la paroi. La figure Fig. 4.16.a représente les profils de vitesse sur cet axe, pour différentes valeurs de α. La vitesse reste nulle sur une courte distance au voisinage du cylindre, puis croit jusqu'à la valeur constante 0. La distance sur laquelle la vitesse varie diminue lorsque α tend vers 0 et semble tendre vers une constante non-nulle. Ceci suggère que la zone déformée sur cet axe ne disparaît pas progressivement, ce qui n'est pas *a priori* intuitif.

Poursuivons en observant les contraintes sur cet axe de symétrie, pour plusieurs valeurs de α, Fig. 4.16.b. Nous pouvons constater une réduction de l'extension de la pointe et de la zone déformée lorsque α diminue. Ceci est en accord avec les observations sur la vitesse. En outre, lorsque α diminue, nous pouvons constater que l'intensité de la déformation augmente.

L'extension y_p de la pointe et l'extension y_e de l'enveloppe sont portées, en fonction de α, sur la figure Fig. 4.17. Nous voyons alors se préciser les observations précédentes ; y_e et y_p tendent vers des valeurs non-nulles et nettement distinctes lorsque α tend vers 0.

4.3.3 Coefficient de traînée

Le coefficient de traînée a été calculé suivant la définition (Batchelor [4], page 233) :

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2} \times \frac{1}{R} \times \int_{\Gamma^*_{cyl}} (\sigma^*_{tot}.\mathbf{n}).\mathbf{e_x} \mathrm{d}s^* = \frac{X}{\mathcal{R}e}$$

où l'exposant * fait référence aux quantités dimensionnées et :

$$X = \int_{\Gamma_{cyl}} (\sigma_{tot}.\mathbf{n}).\mathbf{e_x} \mathrm{d}s$$

est la quantité que nous avons calculée et représentée en fonction de α et pour $Bi = 10$ sur la figure Fig. 4.18. Nous avons pu établir le comportement asymptotique de X, pour $\alpha << 1$:

$$X = C\,\alpha^{-9/4} \quad , \quad \alpha << 1$$

4.4 Conclusion

Notre méthode numérique nous a permis d'établir de manière précise les faits suivants :

- quand α tend vers 0, la *taille relative* du noyau tend vers 0 et sa vitesse de rotation tend vers l'infini comme $\alpha^{-16/25}$,
- lorsque α tend vers 0 l'extension y_p de la *pointe* ainsi que celle y_e de l'*enveloppe* tendent vers des valeurs constantes, non-nulles et nettement distinctes. Le profil de vitesse tend également vers une courbe limite.
- Le coefficient de traînée tend vers l'infini comme $\alpha^{-9/4}$ quand α tends vers 0.
- La contrainte est singulière au sommet du cylindre et l'indice de la singularité est indépendant de α, la loi de $\|\sigma\|$ a été établie au voisinage du sommet, pour $\alpha << 1$.

Nous avons donc réussi à traiter un problème contenant plusieurs difficultés. Ceci nous a permis de constater la bonne tenue de notre méthode numérique et d'obtenir des résultat originaux.

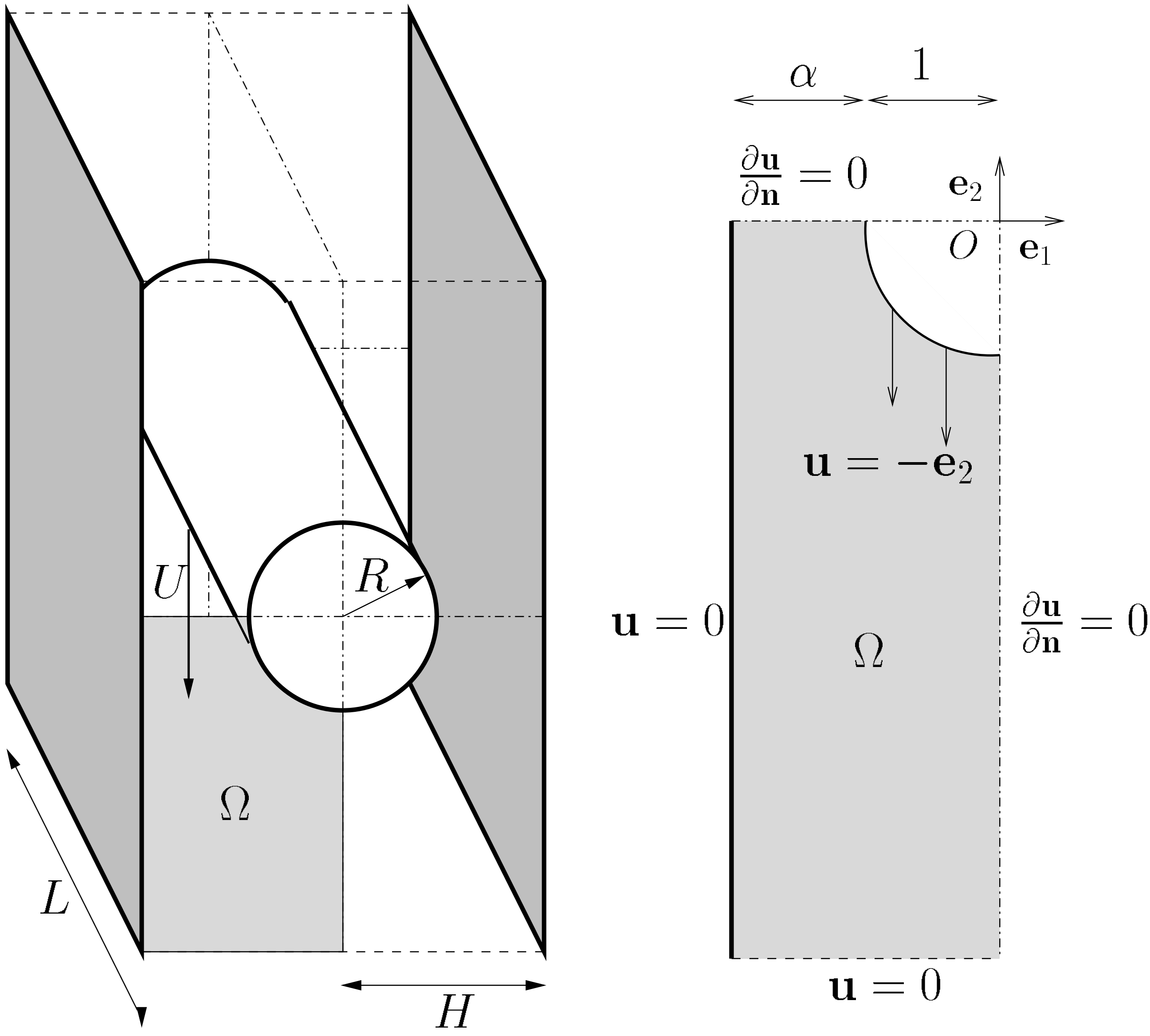


FIG. 4.1 – *Cylindre de rayon R en translation à vitesse constante U entre deux plaques parallèles et proches distantes de $2H$; Conditions aux limites et domaine de calcul.*

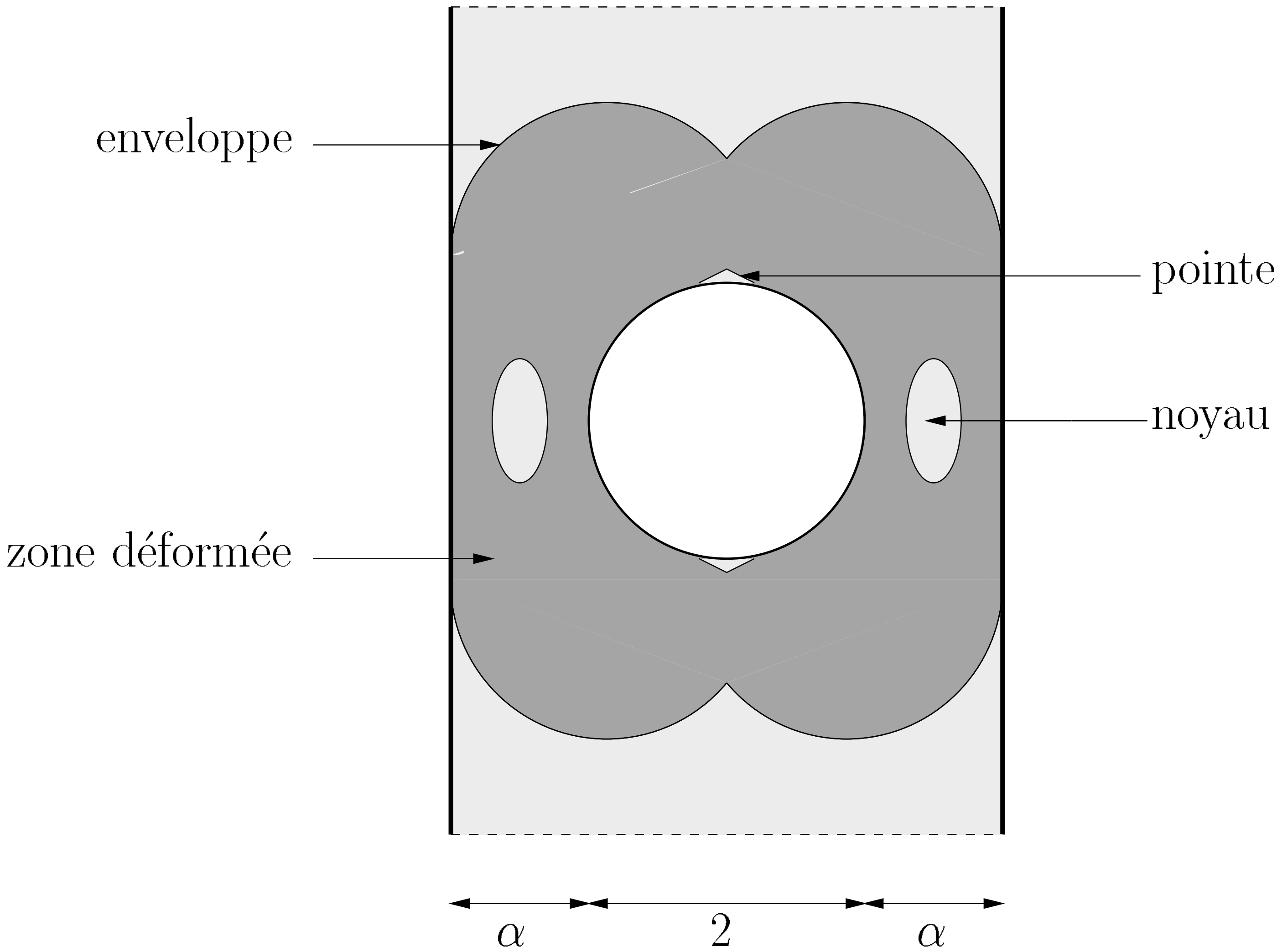


FIG. 4.2 – *Représentation schématiques des différentes zones de l'écoulement ; zones déformées en gris foncé, zones rigides en gris clair, section du cylindre en blanc.*

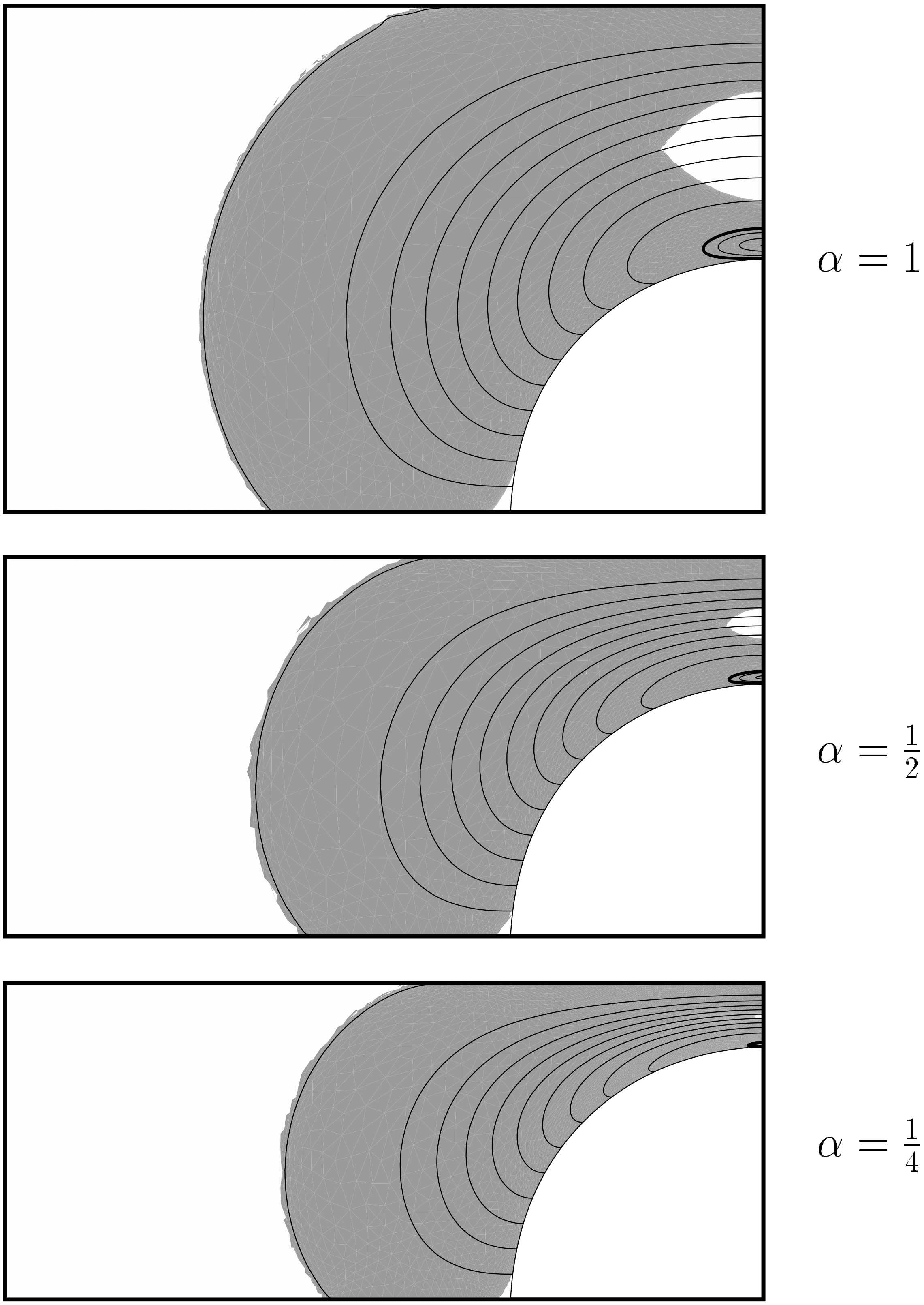


FIG. 4.3 – *Zones rigides (gris clair), zone déformée (gris foncé) et lignes de courant au voisinage du cylindre (blanc), calculées pour plusieurs valeurs de α et $Bi = 10$.*

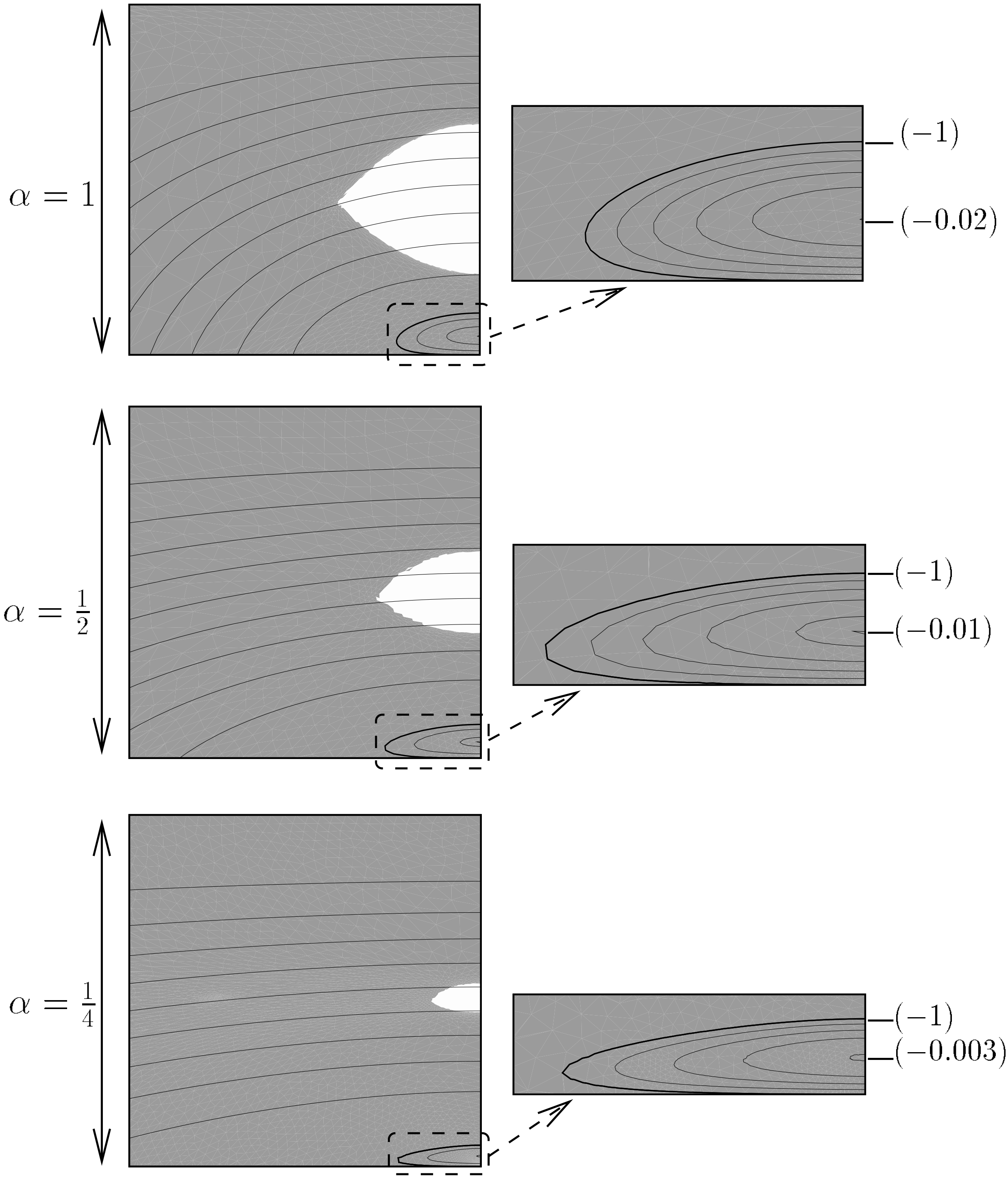
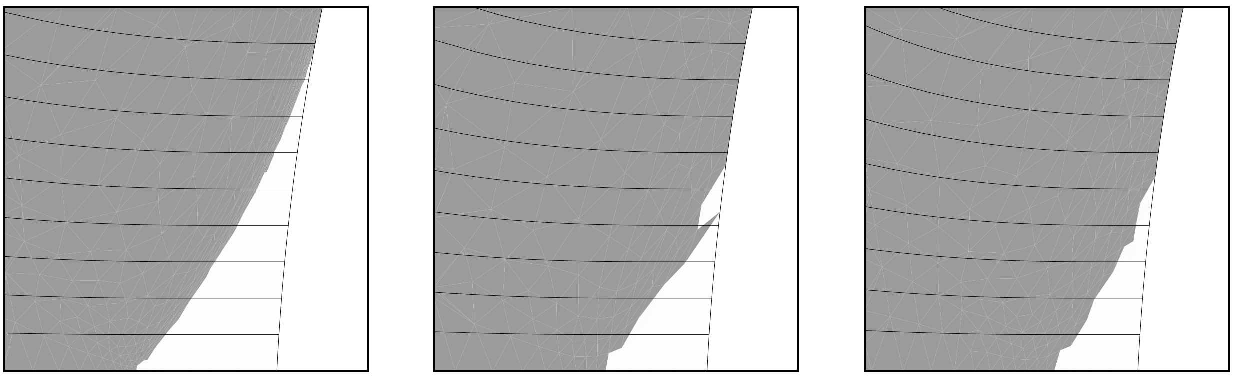


FIG. 4.4 – *Noyau rigide (gris clair), zone déformée (gris foncé) et lignes de courant dans tout l'interstice, calculés pour $Bi = 10$ et plusieurs valeurs de α, avec zoom sur le tourbillon au sommet du cylindre.*



$\alpha = 1$ $\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha = \frac{1}{4}$

FIG. 4.5 – *Zone morte (gris clair) en forme de pointe collée au cylindre (blanc), zone déformée (gris foncé) et lignes de courant à la proue du cylindre, calculées pour* $Bi = 10$ *et plusieurs valeurs de* α.

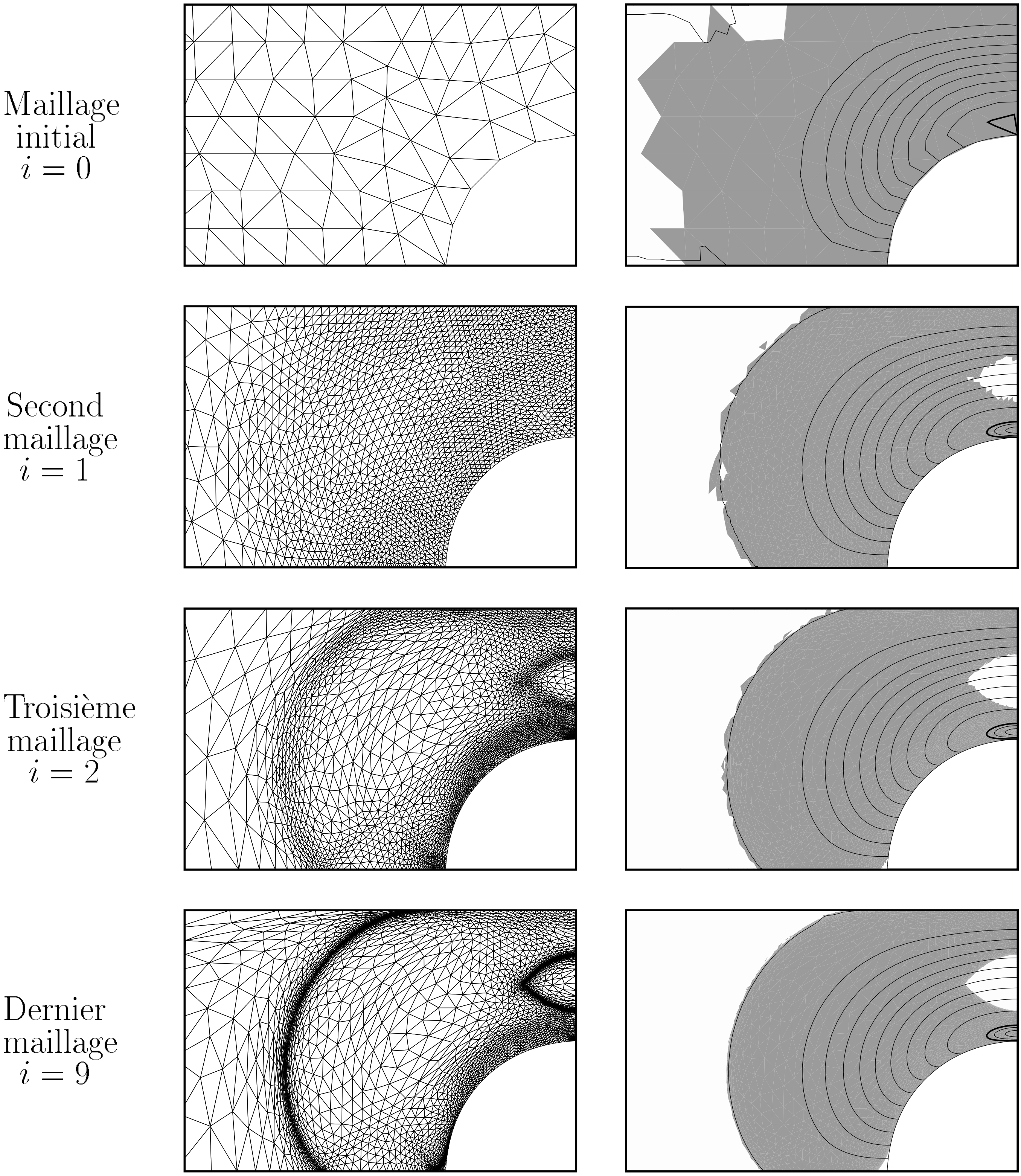


FIG. 4.6 – *Exemple d'un cycle d'adaptation de maillage, pour $Bi = 10$ et $\alpha = 1$. Colonne de gauche : quatre maillages successifs du voisinage du cylindre (blanc) ; colonne de droite : zones rigides (gris clair), zone déformée (gris foncé) et lignes de courant calculées sur chacun des maillages.*

(a)

(b)

(c)

(d)

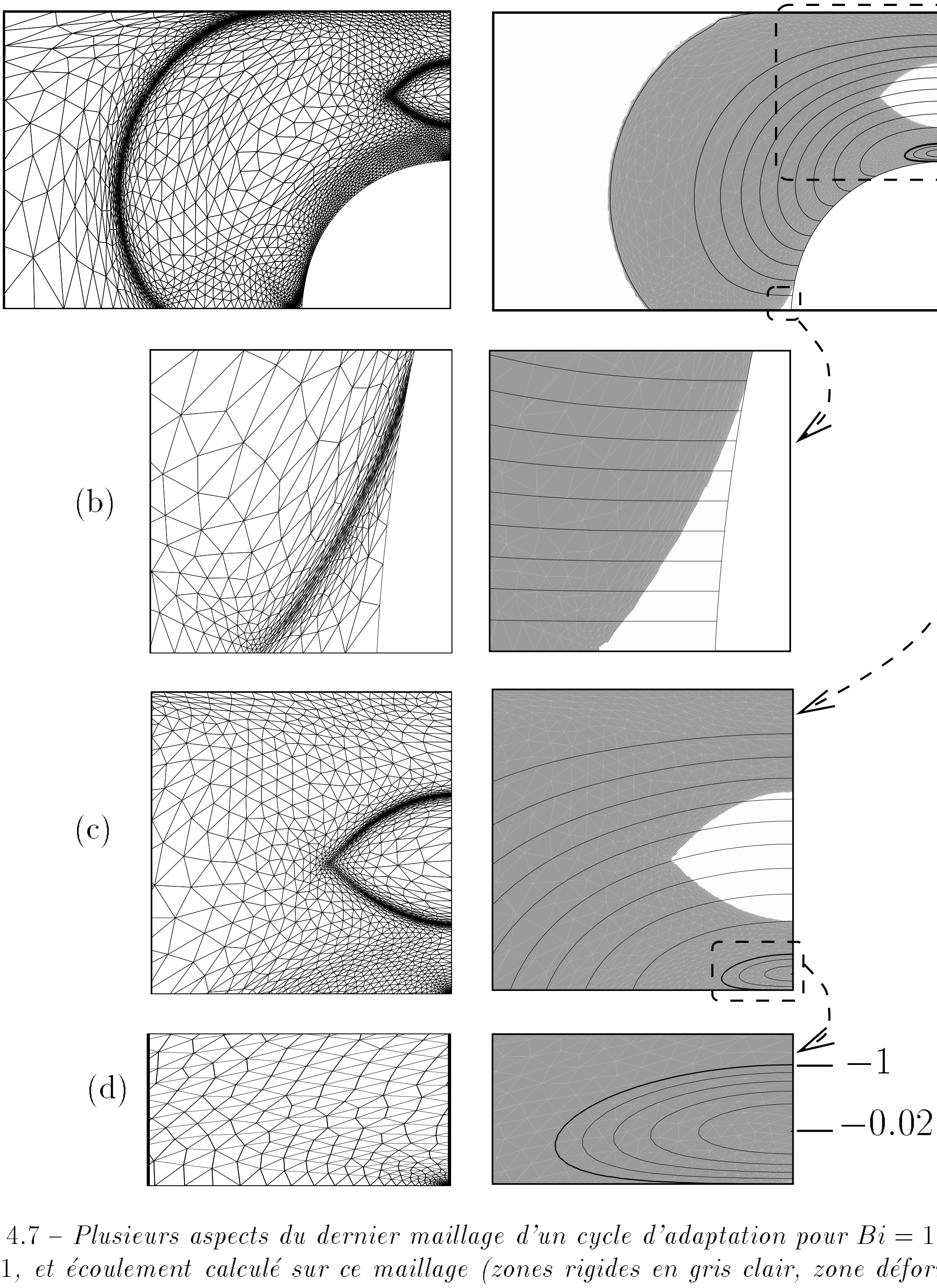


FIG. 4.7 – *Plusieurs aspects du dernier maillage d'un cycle d'adaptation pour* $Bi = 10$ *et* $\alpha = 1$*, et écoulement calculé sur ce maillage (zones rigides en gris clair, zone déformée en gris foncé et lignes de courant). (a) : aspect global ; (b) : zoom sur la pointe morte à la proue du cylindre ; (c) : zoom dans tout l'interstice ; (d) : zoom sur le tourbillon au sommet du cylindre.*

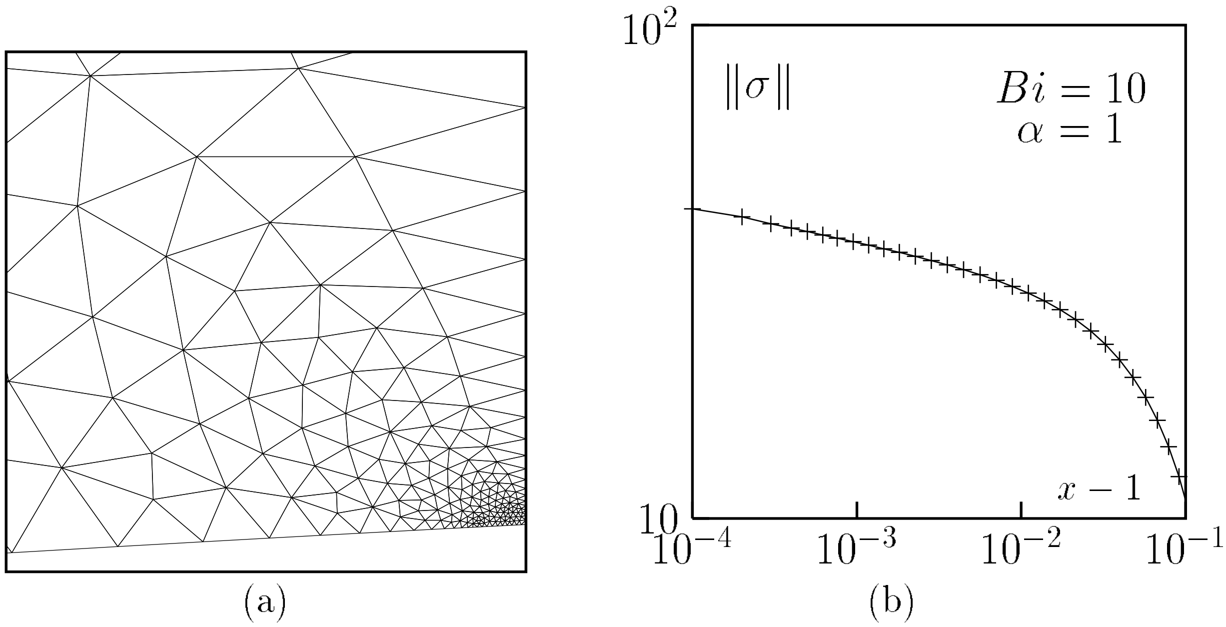


FIG. 4.8 – *Voisinage du sommet du cylindre pour $Bi = 10$ et $\alpha = 1$: (a) zoom du dernier maillage d'un cycle d'adaptation ; (b) singularité du deuxième invariant des contraintes.*

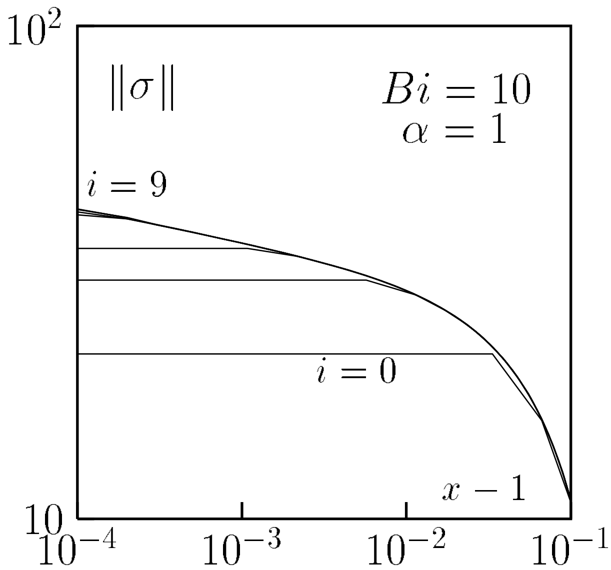


FIG. 4.9 – *Singularité du deuxième invariant des contraintes au voisinage du sommet du cylindre, pour différents maillages ($0 \leq i \leq 9$) du cycle d'adaptation, avec $Bi = 10$ et $\alpha = 1$.*

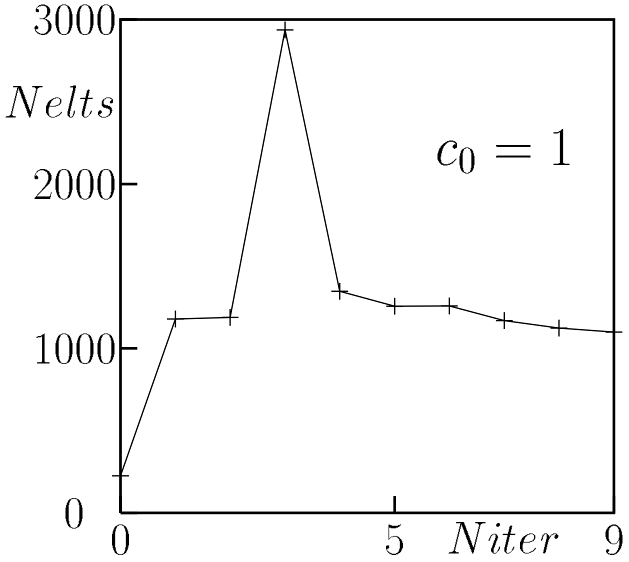


FIG. 4.10 – *Nombre d'éléments en fonction du nombre d'itération dans le cycle d'adaptation pour $Bi = 10$, $\alpha = 1$ et $c_0 = 1$.*

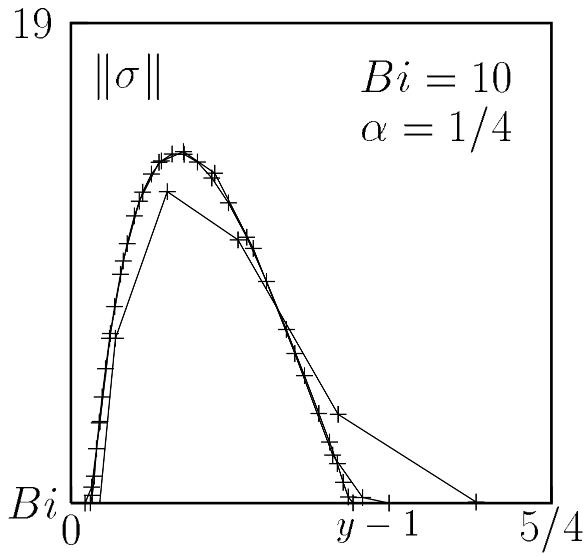


FIG. 4.11 – *Affinement de $\|\sigma\|$ sur l'axe de l'écoulement, au voisinage de la proue du cylindre, pour $Bi = 10$, $\alpha = 1/4$ et $c_0 \in \{1/4; 1/2; 1\}$.*

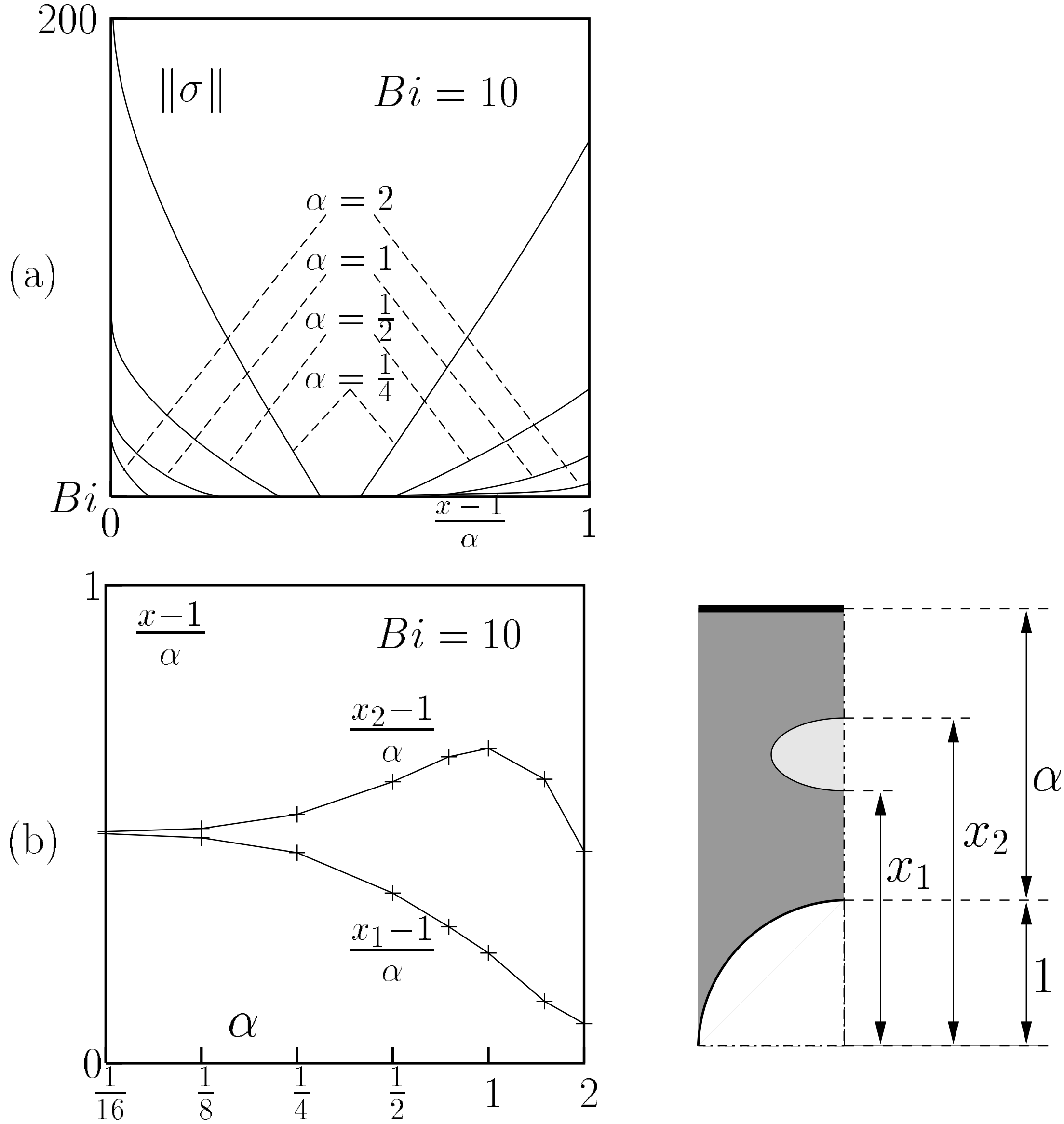


FIG. 4.12 – *Détermination de l'épaisseur du noyau rigide dans l'interstice, pour $Bi = 10$: (a) deuxième invariant des contraintes sur l'axe de symétrie traversant l'interstice, pour plusieurs valeurs de α ; (b) frontières x_1 et x_2 du noyau sur l'axe de symétrie traversant l'interstice, en fonction de α.*

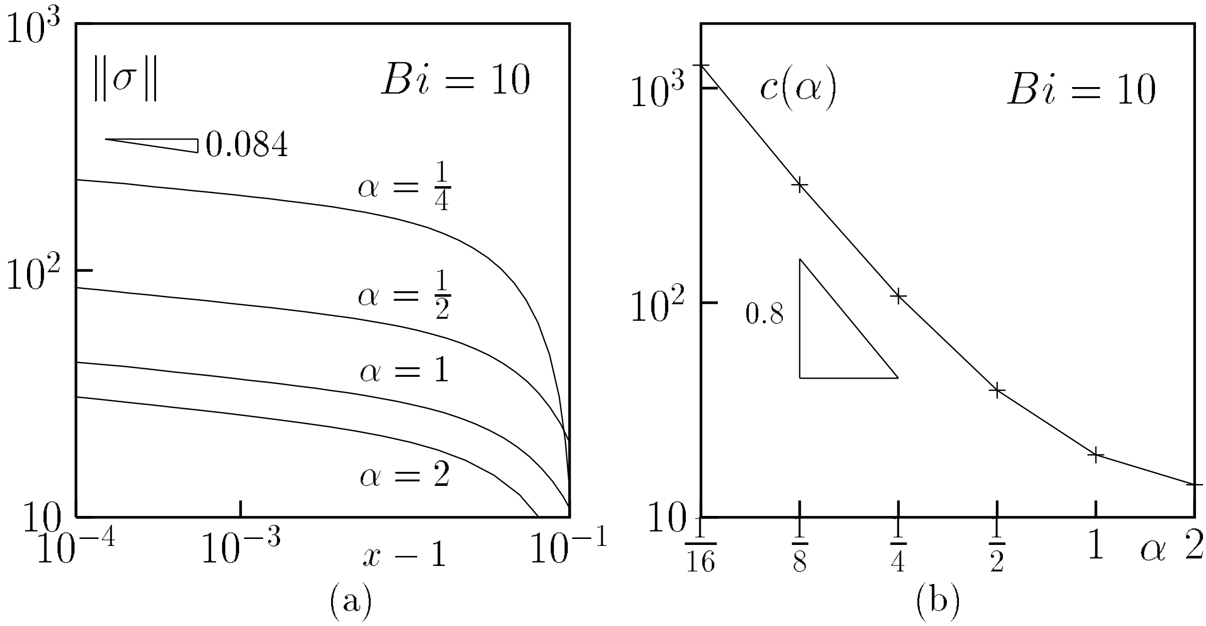


FIG. 4.13 – *Singularité des contraintes au voisinage du sommet du cylindre, pour $Bi = 10$: (a) deuxième invariant des contraintes sur l'axe de symétrie traversant l'interstice, pour plusieurs valeurs de α ; (b) coefficient $c(\alpha)$ de la singularité en fonction de α, dans la formule $\|\sigma\| = c(\alpha)(x-1)^{0.084}$.*

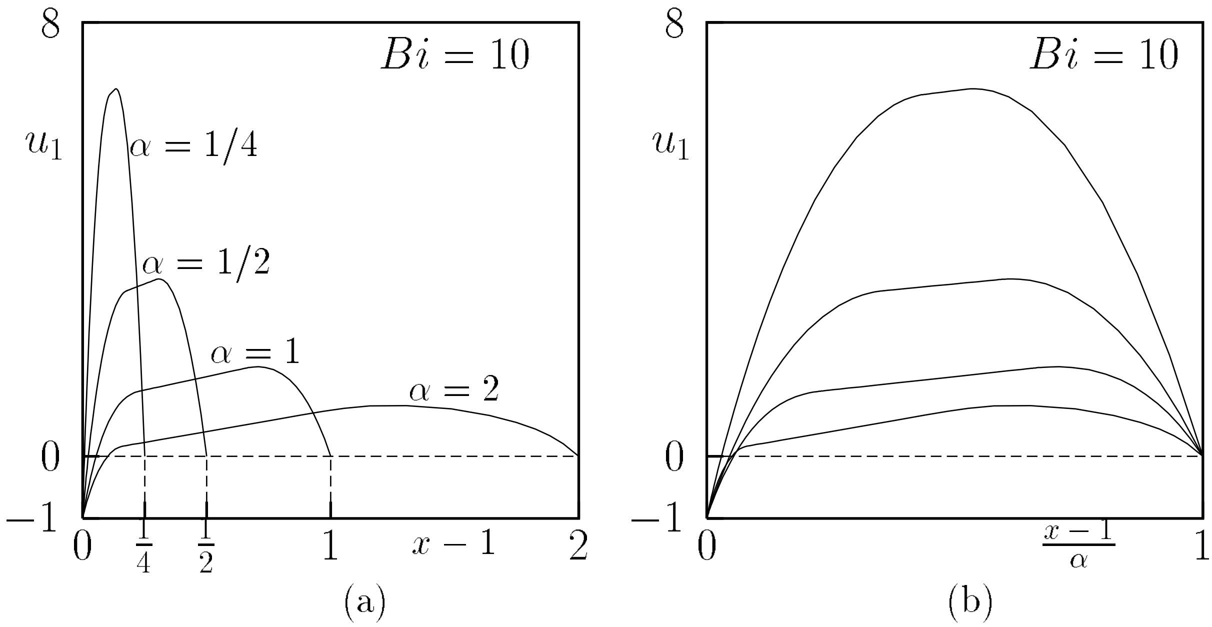


FIG. 4.14 – *Vitesse sur l'axe de symétrie traversant l'interstice, pour $Bi = 10$ et plusieurs valeurs de α :(a) les courbes sont simplement superposées ; (b) l'interstice est dilaté de $]0;\alpha[$ vers $]0;1[$.*

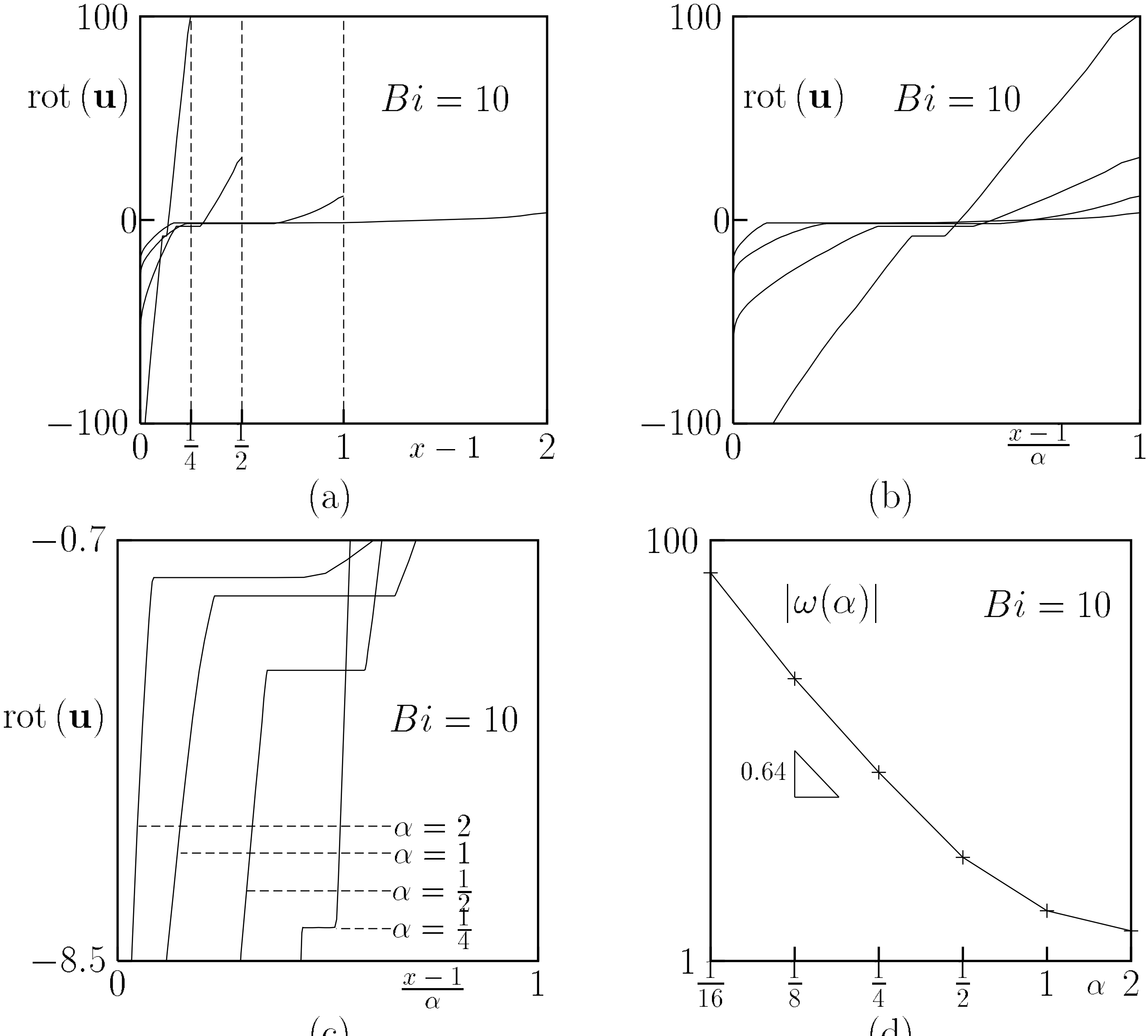


FIG. 4.15 – *Taux de rotation* rot (**u**) *sur l'axe de symétrie traversant l'interstice, pour* $Bi = 10$ *et plusieurs valeurs de* α *: (a) en fonction de* y*, (b) en fonction de* $\tilde{x}$ *et (c) en vue rapprochée au voisinage des plateaux. (d) Vitesse de rotation* ω *dans le noyau en fonction de* α*.*

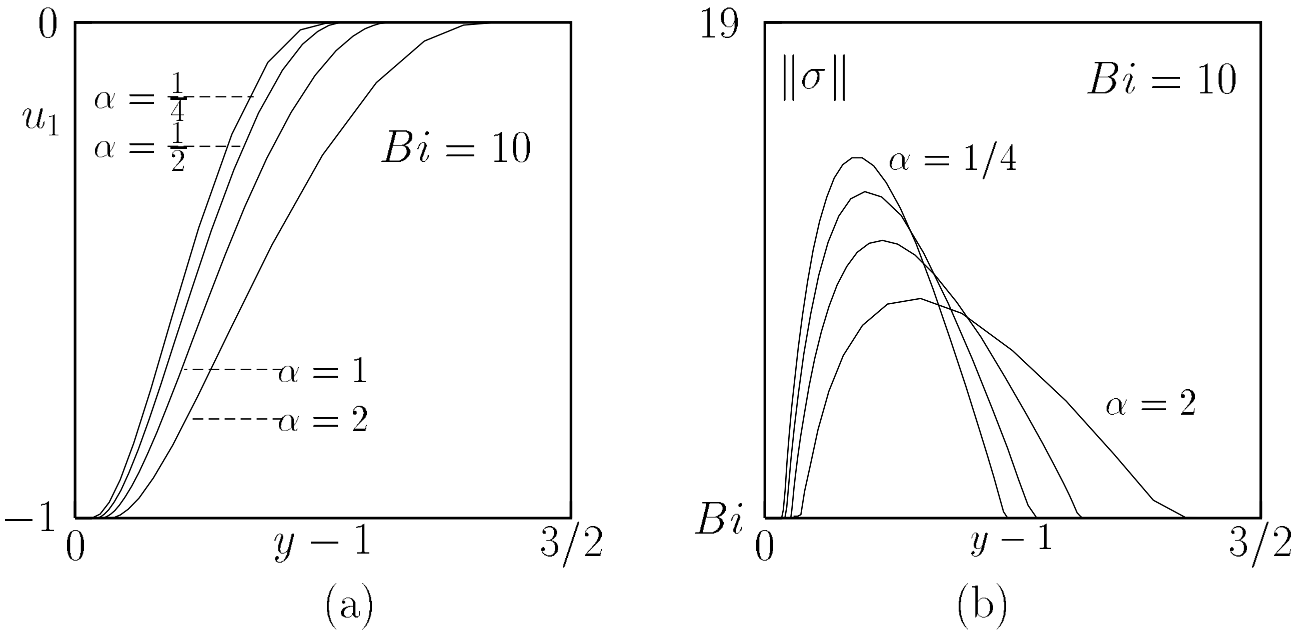


FIG. 4.16 – *Comportement au voisinage du cylindre, sur l'axe de l'écoulement, pour* $Bi =$ 10 *et plusieurs valeurs de* α *: (a) profil de vitesse ; (b) deuxième invariant des contraintes.*

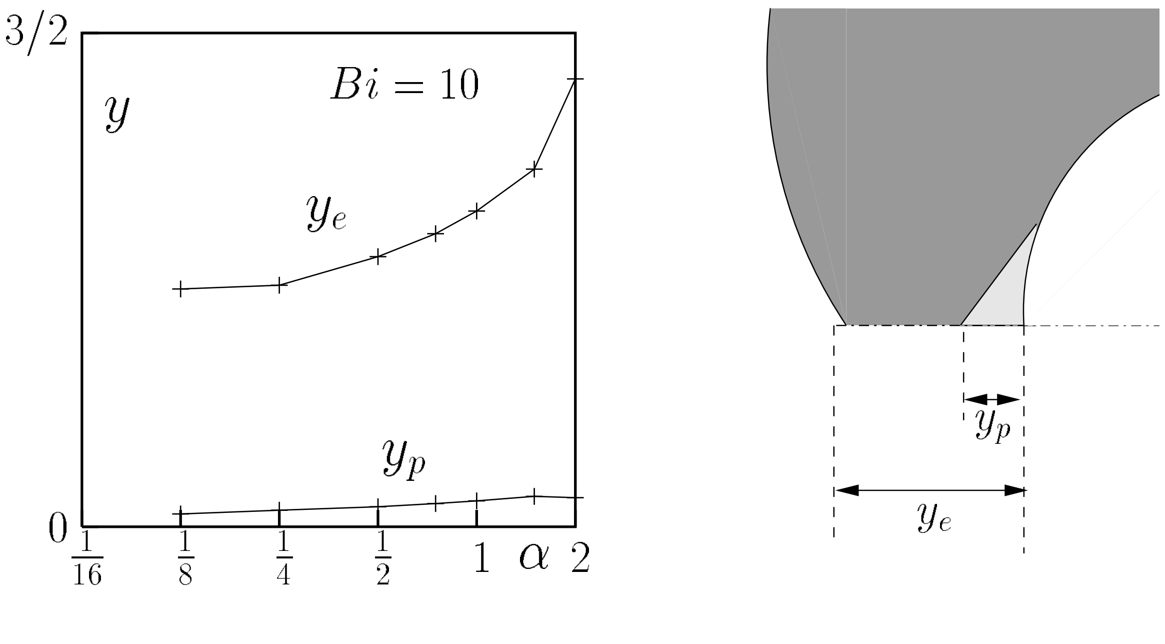


FIG. 4.17 – *Frontières* x_p *de la pointe et* x_e *de l'enveloppe sur l'axe de l'écoulement, pour* $Bi = 10$*, en fonction de* α*.*

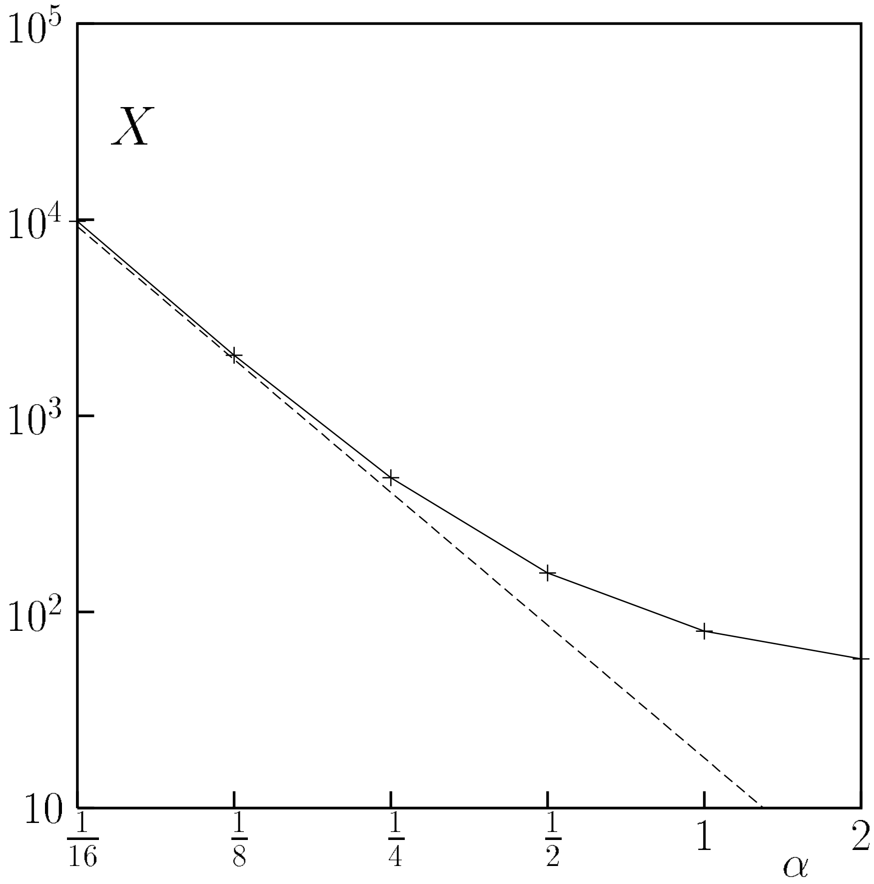


FIG. 4.18 – *Coefficient de traînée* $C_X = \frac{X}{Re}$ *en fonction de* α *pour* $Bi = 10$

Bibliographie

[1] P. Alart. Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact. *J. Math. Pures Appl.*, 76:83–108, 1997.

[2] D. D. Atapattu, R. P. Chhabra, and P. H. T. Uhlherr. Wall effet for spheres falling at small Reynolds number in a viscoplastic medium. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 38:31–42, 1990.

[3] D. D. Atapattu, R. P. Chhabra, and P. H. T. Uhlherr. Creeping motion in Herschel-Bulkley fluids : flow and drag. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 59:245–265, 1995.

[4] Batchelor. *Flow due to moving body at small Reynolds number.* 1979.

[5] M. Beaulne and E. Mitsoulis. Creeping motion of sphere in tubes filled with Herschel-Bulkley fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 72:55–71, 1997.

[6] M. Bercovier and M. Engelman. A finite element mesthod for incompressible non-newtonian flows. *J. Comp. Phys.*, 36:313–326, 1980.

[7] A. N. Beris, J. A. Tsamopoulos, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. *J. Fluid Mech.*, 158:219–244, 1985.

[8] C. R. Beverly and R. I. Tanner. Numerical analysis of three dimensional Bingham plastic flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 42:85–115, 1992.

[9] E. C. Bingham. *Fluidity and Plasticity.* McGraw-Hill, New York, 1922.

[10] J. Blackery and E. Mitsoulis. Creeping motion of sphere in tubes filled with a Bingham plastic material. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70:59–77, 1997.

[11] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I : Algorithms. *Finite Elem. Anal. Des.*, 25:61–83, 1997.

[12] L. Boscardin. Méthodes de lagrangien augmenté pour la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas d'écoulements de fluide de Bingham. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1999.

[13] S. Brenner and R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods.* Springer-Verlag, 1991.

[14] H. Brezis. Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations. *Contributions to nonlinear functional analysis, Proc. Sympos. Univ. Wisconsi, Madison 1971*, pages 101–156, 1971.

[15] H. Brezis. Seuil de régularité pour certains problèmes unilatéraux. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A*, 273:35–37, 1971.

[16] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer-Verlag, 1991.

[17] G. F. Brooks and R. L. Whitmore. The static drag on bodies in Bingham plastics. *Rheol. Acta*, 7:188–193, 1968.

[18] G. F. Brooks and R. L. Whitmore. Drag forces in Bingham plastics. *Rheol. Acta*, 8:472–480, 1969.

[19] R. P. Chhabra and P. H. T. Uhlherr. Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastics liquids. *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, pages 611–633, 1988.

[20] P. G. Ciarlet and P. A. Raviart. Interpolation theory over curved elements, with application to finite element methods. *Comput. Meth. in Appl. Mech. eng.*, 1:217–251, 1972.

[21] P. G. Ciarlet(ed.) and J. L. Lions(ed.). *Basic Error Estimates for Elliptic Problems, in Handbook of numerical analysis. Volume II: Finite element methods (Part 1).* North-Holland, 1991.

[22] N. Cristescu and I. Suliciu. *Viscoplasticitate.* Ed. tehnica, Bucaresti, 1976.

[23] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[24] R. S. Falk and B. Mercier. Error estimates for elasto-plastic problems. *RAIRO*, 11:135–144, 1977.

[25] A. Fortin, D. Côté, and P. A. Tanguy. On the imposition of friction boundary conditions for the numerical simulation of Bingham fluid flows. *Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 88:97–109, 1991.

[26] M. Fortin. Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis. Thèse d'état, PARIS VI, 1972.

[27] P. J. Frey and P. L. George. *Maillages, applications aux éléments finis.* Hermès, 1999.

[28] Martin Fuchs, Joseph F. Grotowski, and Juergen Reuling. On variational models for quasi-static Bingham fluid. *Math. Methods Appl. Sci., No.12*, 19:991–1015, 1996.

[29] Martin Fuchs and Gregory Seregin. Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three. *Math. Z., No.3*, 227:525–541, 1998.

[30] P. L. George and H. Borouchaki. *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis.* Hermès, 1997.

[31] M. Giaquinta. *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems.* Birkhäuser, 1993.

[32] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, theory and algorithms.* Springer-Verlag, 1986.

[33] R. Glowinski. *Numerical Methods For non-linear Variational Problems.* Springer-Verlag, 1980.

[34] R. Glowinski and M. Fortin. *Méthodes de Lagrangien Augmenté, applications à la résolution de problèmes aux limites.* Dunod, 1982.

[35] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *analyse numérique des inéquations variationnelles.* Dunod, 1976.

[36] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities.* North-Holland, 1981.

[37] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator Splitting method in Non-Linear Mechanics.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 1989.

[38] W. Han and B. D. Reddy. On the finite element method for mixed variational inequalities arising in elastoplasticity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1778–1807, 1995.

[39] S. Haubruge, V. H. Nguyen, and J. J. Strodiot. Convergence analysis and applications of the Glowinski-Le Tallec splitting method for finding a zero of the sum of two maximal monotone operators. *journal of optimization theory and applications*, 97:645–673, 1998.

[40] F. Hecht. *Bidimensional anisotropic mesh generator.* INRIA, 1997.

[41] F. Hecht. *BAMG : Bidimensional Anisotropic Mesh Generator.* INRIA, 1998.

[42] P. Y. Huang and J. Feng. Wall effects on the flow of viscoelastic fluids around a circular cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 60:179–198, 1995.

[43] R. R. Huilgol and M. P. Panizza. On the determination of the plug flow region in Bingham fluids through the application of variational inequalities. *J. Non-Newtonian Fluids Mech.*, 58:207–217, 1995.

[44] I. R. Ionescu. A boundary value problem with non-local viscoplastic friction law for the bingham fluid. *Studdi Cercetari Matematice - Mathematical Reports*, 37:60–65, 1985.

[45] I. R. Ionescu and M. Sofonea. The blocking Property in the study of the Bingham fluid. *International Journal for Engenering Sciences*, 24:289–297, 1986.

[46] I. R. Ionescu and A. Touzani. Viscosity solutions for dynamical problems with slip rate dependent friction. *en préparation*, 1998.

[47] I. R. Ionescu and B. Vernescu. A numerical method for a viscoplastic problem. An application to the wire drawing. *International Journal for Engenering Sciences*, 26:627–633, 1988.

[48] Jong Uhn Kim. A finite element approximation of three dimensional motion of a Bingham fluid. *M2AN*, 23:293–333, 1989.

[49] J. L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.*, 20:493–519, 1967.

[50] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov. Variational methods in the theory of viscous-plastic medium. *J. Mech. and Appl. Math. (P.M.M.)*, 29:468–492, 1965.

[51] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov. On stagnant flow regions of a viscous-plastic medium in pipes. *J. Mech. and Appl. Math. (P.M.M.)*, 30:705–719, 1966.

[52] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov. On qualitative singularities of the flow of a viscous-plastic medium in pipes. *J. Mech. and Appl. Math. (P.M.M.)*, 31:581–585, 1967.

[53] Q. L. Nguyen. Instabilités liées au frottement des solides élastiques. Modélisation de l'initiation des séismes. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 1999.

[54] Papanastasiou and C. Tasos. Flows of materials with yield. *J. Rheol.*, 31:385–404, 1987.

[55] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, 1983.

[56] B. D. Reddy. Mixed variational inequalities arising in elastoplasitcity. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 19:1071–1089, 1992.

[57] N. Roquet. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de Lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles.* Université d'Orsay Paris-Sud, Prépublication 97-21, 1997.

[58] N. Roquet, R. Michel, and P. Saramito. Estimations d'erreurs pour un fluide viscoplastique par éléments finis P_k et maillages adaptés. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* accepté, 2000.

[59] D. Sandri. Analyse numérique de fluides non newtoniens : Fluides viscoelatiques et quasi-newtoniens. thèse 95-91, Université Lyon 1, juillet 1991.

[60] P. Saramito and N. Roquet. An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes. *soumis*, 2000.

[61] G.A. Seregin. On the differentiability of local extremals of variational problems in the mechanics of rigidly viscoplastic media. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1987, 305 :23-30, 1987 ; traduction anglaise dans Soviet. Math. 31*, 1987.

[62] G.A. Seregin. On differential properties of extremals of variational problems of the mechanics of viscoplastic media. *Proc. Steklov Inst. Math.*, pages 147–157, 1991.

[63] G.A. Seregin. Continuity for the strain velocity tensor in two-dimensional variational problems from the theory of the bingham fluid. Preprint 402, SFB 256 Universität Bonn, 1995.

[64] M. Sofonea and I. R. Ionescu. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity.* Oxford University Press, 1993.

[65] Taylor and Wilson. Conduit flow of an incompressible, yield-stress fluid. *Journal of Rheology*, 41:93–101, 1997.

[66] M. G. Vallet. *Génération de maillages anisotropes adaptés. Application à la capture de couches limites.* Rapport de Recherche n^0 1360, INRIA, 1990.

[67] N. Yoshioka and K. Adachi. On creeping flow of a viscoplastic fluid past a cylinder. *Chem. Eng. Sci.*, 28:215–226, 1973.

Annexe A

Quelques résultats utiles pour Poiseuille et Couette

Problème de Poiseuille circulaire dimensionné

Les expressions qui suivent sont données dans [25]. En supposant une symétrie radiale, la seule composante non-nulle du tenseur des contraintes est $\sigma_{r\,z}$. Elle est alors déterminée de manière unique par l'expression :

$$\sigma_{r\,z} = -\frac{f\,r}{2}$$

et la vitesse u est donnée comme une fonction de r par l'expression :

$$u(r) = u(1) + \frac{f}{4\eta}(R - 2\sigma_0/f)^2 \times \begin{cases} \left\{1 - \dfrac{(r - 2\sigma_0/f)^2}{(R - 2\sigma_0/f)^2}\right\} & \text{si } r > \dfrac{2\sigma_0}{f} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec la vitesse au bord donnée par :

$$u(1) = \begin{cases} \dfrac{fR - 2s_g}{2c_f} & \text{si } \dfrac{fR}{2} > s_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème de Couette dimensionné

La solution analytique avec des quantités dimensionnées se présente sous la forme suivante.

Si on appelle C/L le couple par unité de longueur du cylindre interne, on a :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C}{2\pi\, L\, r^2}$$

si on pose $R_s = \sqrt{\dfrac{C}{2\pi\, L\sigma_0}}$, la vitesse de rotation est donnée par :

$$\omega(r) = \begin{cases} \omega_i + \dfrac{C}{4\pi\eta\, L}\left(\dfrac{1}{R_i^2} - \dfrac{1}{r^2}\right) - \dfrac{\sigma_0}{\eta}\ln(r/R_i) & \text{si } R_i < r < R_s \\ \\ \omega_e & \text{si } R_s < r < R_e \end{cases}$$

lorsque $R_s < R_e$, la continuité de ω à l'interface rigide/fluide s'exprime par :

$$\omega_e - \omega_i = \frac{C}{4\pi\eta\, L\, R_i^2} - \frac{\sigma_0}{2\eta}\left(1 + \ln\left(\frac{c}{2\pi\, L\, R_i^2\sigma_0}\right)\right)$$

Mais, lorsqu'au contraire, $R_s \geq R_e$, on a une autre condition :

$$\omega_e - \omega_i = \frac{C}{4\pi\eta\, L}\left\{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_i^2}\right\} - \frac{\sigma_0}{\eta}\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$$

Dans le but d'écrire un problème sans dimension, nous choisissons la longueur caractéristique égale au rayon extérieur R_e et la vitesse caractéristique U est la vitesse au bord externe, soit $U = R_e\,\omega_e$. Si on pose $\Sigma = \eta\, U/R_e = \eta\,\omega_e$, on a :

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{\Sigma} = \frac{C}{2\pi\, L\,\eta\,\omega\, R_e^2} \times \frac{1}{\left(\frac{r}{R_e}\right)^2} = K \times \frac{1}{\left(\frac{r}{R_e}\right)^2} \quad \text{avec} \quad K = \frac{C}{2\pi\, L\,\omega_e\, R_e^2}$$

et aussi :

$$\frac{R_s}{R_e} = \sqrt{\frac{C}{2\pi\, L\, R_e^2\,\sigma_0}} = \sqrt{\frac{\eta\,\omega_e}{\sigma_0} \times K}$$

dans la zone cisaillée, on écrit :

$$\frac{\omega(r)}{\omega_e} = \frac{\omega_i}{\omega_e} + \frac{1}{2}\frac{C}{2\pi\eta\, L\,\omega_e\, R_e^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{r}{R_e}\right)^2}\right) - \frac{\sigma_0}{\eta\,\omega_e}\ln\left(\frac{r}{R_e}\frac{R_e}{R_i}\right)$$

quant à la condition de continuité, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$1 - \frac{\omega_i}{\omega_e} = \frac{1}{2}\frac{C}{2\pi\eta\, L\, R_e^2\omega_e} \times \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2 - \frac{\sigma_0}{2\eta\omega_e}\left(1 + \ln\left(\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2 \times \frac{C}{2\pi\, L\, R_e^2\omega_e\eta} \times \frac{\omega_e\eta}{\sigma_0}\right)\right)$$

Nous voyons apparaître des paramètres sans dimension $\omega_0 = \omega_i/\omega_e$, et $r_0 = R_i/R_e$ et bien, sûr, on a toujours le nombre $Bi = \frac{\sigma_0\, L}{\eta\, U} = \frac{\sigma_0}{\eta\omega_e}$.

Donc finalement, si $K_0 = K_0(Bi, r_0, \omega_0)$ est une constante définie par la condition de continuité :

$$1 = \omega_0 + \frac{K_0}{2r_0^2} - \frac{Bi}{2}\left(1 + \ln\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{K_0}{Bi}\right)\right) \tag{A.1}$$

et r_s par :

$$r_s = \sqrt{\frac{K_0}{Bi}}$$

alors, dans le cas où $r_s < 1$, on peut poser $K = K_0$, sinon, K est donné par la relation explicite (traduisant le fait que $\omega(1) = 1$) :

$$K = \frac{-2(1 - \omega_0 - Bi\ln(r_0))}{1 - \frac{1}{r_0^2}}$$

et on vérifie alors que l'écoulement est déterminé par :

$$\sigma_{r\theta}(r) = \frac{K}{r^2}$$

$$\omega(r) = \begin{cases} \omega_0 - Bi\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{K}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) & \text{si } r < r_s \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Absence de zones rigides avec $Bi \neq 0$ pour Couette

On peut donner la valeur de Bi_0 telle qu'aucune zone rigide n'existe pour $Bi < Bi_0$, on l'obtient en écrivant qu'alors $r_s = 1$, ce qui se traduit par $K = Bi_0$. Alors, cette dernière égalité une fois introduite dans l'une des deux expressions donnant K, nous obtenons :

$$Bi_0 = \frac{2(1 - \omega_0)}{\frac{1}{r_0^2} - 1 + 2\ln(r_0)} \tag{A.2}$$

Plus généralement, en connexion avec les estimations d'erreurs du chapitre II.3 et les possibilités d'extension mentionnées au chapitre III.3, nous pouvons chercher à montrer que :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0,\ \exists\, Bi_\varepsilon > 0,\ \forall\, Bi < Bi_\varepsilon,\ \|D(\mathbf{u})\| > \varepsilon\ ,\ \ \forall r \in]r_0; 1[$$

La quantité $\|D(\mathbf{u})\|$ est alors connue explicitement. Rappelons en effet que si on définit :

$$K = \frac{-2(1-\omega_0 - Bi\ln(r_0))}{1-\frac{1}{r_0^2}}$$

on a :

$$\|D(\mathbf{u})\| = \|\sigma\| - Bi = \frac{K}{r^2} - Bi$$

le minimum de cette dernière expression est donc atteint en $r=1$, donc on va résoudre :

$$Bi\left\{2\frac{\ln(r_0)}{1-\frac{1}{r_0^2}} - 1\right\} > \varepsilon - 2\frac{\omega_0 - 1}{1-\frac{1}{r_0^2}}$$

Or, d'une part,

$$2\frac{\ln(r_0)}{1-\frac{1}{r_0^2}} - 1 < 0$$

équivaut à :

$$2r_0^2\ln(r_0) + 1 - r_0^2 > 0$$

ce qui est toujours vrai car le membre de gauche est une fonction décroissante sur $[0,1]$ et valant 0 en $r=1$.

D'autre part,

$$\varepsilon - 2\frac{\omega_0 - 1}{1-\frac{1}{r_0^2}} < 0$$

équivaut à :

$$\varepsilon < 2\frac{\omega_0 - 1}{1-\frac{1}{r_0^2}} = \varepsilon_0$$

Donc on obtient, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$Bi < \frac{\varepsilon + 2\frac{1-\omega_0}{1-\frac{1}{r_0^2}}}{2\frac{\ln(r_0)}{1-\frac{1}{r_0^2}} - 1} = Bi_\varepsilon$$

Calculs pour les estimations d'erreurs

Deux identités pour Couette

Commençons par établir r_ε tel $\Omega_{0\,\varepsilon} = \{(r;\theta) \in \Omega \ ; \ r_\varepsilon < r < r_s\}$. Nous avons :

$$\frac{K}{r_\varepsilon^2} - Bi = \varepsilon$$

donc, si on se souvient que $r_s = \sqrt{\frac{K}{Bi}}$ décrit la frontière rigide/fluide, on peut établir :

$$r_\varepsilon^2 = \frac{K}{Bi + \varepsilon} = \frac{Bi r_s^2}{Bi + \varepsilon}$$

alors, $\Omega_{0\,\varepsilon}$ est une couronne dont on détermine facilement l'aire (première identité) :

$$\mathrm{mes}(\Omega_{0\,\varepsilon}) = \pi(r_s^2 - r_\varepsilon^2) = \pi r_s^2 \times \left(1 - \frac{Bi}{Bi+\varepsilon}\right) = \pi r_s^2 \times \left(\frac{\varepsilon}{Bi+\varepsilon}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

A présent, calculons une seconde identité :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\|D(\mathbf{u})\|} = \int_{\{(r;\theta)\in\Omega; r_0<r<r_\varepsilon\}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{\frac{K}{r^2} - Bi} = \frac{2\pi}{Bi}\int_{r_0}^{r_\varepsilon} \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{r_s^2 - r^2}$$

$$= \frac{\pi r_s^2}{Bi}\left\{\frac{r_0^2}{r_s^2} - \frac{Bi}{Bi+\varepsilon} + \ln\left(\frac{1 - \frac{r_0^2}{r_s^2}}{Bi+\varepsilon}\right) - \ln(\varepsilon)\right\}$$

$$= \mathcal{O}(|\ln(\varepsilon)|)$$

Calcul de $\mathrm{mes}(\Omega_{0\,\varepsilon})$ pour Poiseuille

Commençons par établir r_ε tel $\Omega_{0\varepsilon} = \{(r;\theta) \in \Omega \ ; \ r_s < r < r_\varepsilon\}$. Rappelons à cet effet l'expression du cisaillement : $\sigma = -\frac{r}{2}$. On résout donc l'équation :

$$\frac{r_\varepsilon}{2} - Bi = \varepsilon$$

et on obtient alors : $r_\varepsilon = 2(\varepsilon + Bi)$ et $r_s = 2Bi$, d'où l'expression de $\mathrm{mes}(\Omega_{0\,\varepsilon})$:

$$\mathrm{mes}(\Omega_{0\,\varepsilon}) = \pi(r_\varepsilon^2 - r_s^2) = 4\pi\,\varepsilon(2Bi + \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Remarques sur la régularité de u

Ici, nous désignons par $\mathbf{u}$ la vitesse pour Couette ou pour Poiseuille circulaire. Pour simplifier, nous notons E au lieu de E^n, pour chaque espace fonctionnel E et $n \geq 1$.

Nous avons dit plusieurs fois que $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{k,\infty}(\Omega^+)$, pour tout $k \geq 0$ et, en effet il est clair que $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,\infty}(\Omega) \cap C^k(\overline{\Omega^+})$, pour tout $k \geq 0$. Nous avons aussi utilisé le fait $\mathbf{u} \in H^{5/2-\alpha}(\Omega)$, $\forall\, \alpha > 0$. Cette régularité provient de[1] :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega) \text{ pour } s < 1 - 1/p \text{ et } \forall\, p > 1$$

Ce qui donne, en particulier, pour $p = 2$:

$$\nabla^2 \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \hookrightarrow H^{1/2-\alpha}(\Omega)$$

Vérifions que $\nabla^2 \mathbf{u} \in BV(\Omega)$. Nous savons que :

$$\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{3,1}(\Omega^+) \text{ et } \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_0$$

donc, pour $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^1(\Omega)$ telle que $|\boldsymbol{\varphi}|_{0,\infty;\Omega} \leq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla^2 \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega^+} \nabla^2 \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_0} \nabla^2 \mathbf{u}\, \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} \,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega^+} \nabla^3 \mathbf{u}\, \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x \\ &\leq |\mathbf{u}|_{2,\infty;\Omega} \mathrm{mes}(\Gamma_0) + |\mathbf{u}|_{3,1;\Omega^+}\end{aligned}$$

et ainsi nous avons bien $\nabla^2 \mathbf{u} \in BV(\Omega)$.

1. un tel argument a été utilisé par H. Brezis dans [15]

Annexe B

Régularité de la vitesse pour un écoulement stationnaire et confiné

L'établissement d'estimations d'erreur dans les méthodes d'éléments finis nécessite de faire des hypothèses de régularité. C'est pourquoi nous dressons ici l'état de l'art sur la régularité de la vitesse **u** pour le problème de l'écoulement stationnaire et confiné d'un fluide à seuil, modélisé à l'aide de la loi de comportement de Bingham ou de Herschel-Bulkley.

Cas d'un fluide de Bingham avec adhérence à la paroi

Tout d'abord, concernant le problème de Poiseuille, nous disposons d'une extension du résultat classique de régularité connu pour l'équation de Laplace.

THÉORÈME **B.0.1** *(Brezis, [14]) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit u l'unique solution de l'inéquation variationnelle :*

$$(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}(v-u))_{0,2;\Omega} + Bi(|\boldsymbol{\nabla} v|_{0,1;\Omega} - |\boldsymbol{\nabla} u|_{0,1;\Omega}) \geq (f, v-u)_{0,2;\Omega} \;\; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

On a :

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

et si, de plus, Ω est convexe, on a :

$$\|u\|_{2,2;\Omega} \leq c(\Omega, Bi)|f|_{0,2;\Omega}$$

Puis, pour le problème plus général d'un écoulement confiné quelconque, sans prise en compte de l'inertie, avec des conditions de Dirichlet homogène, nous savons qu'il existe une unique solution $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N$ (voir [49]). De plus, nous pouvons énoncer des résultats récents de régularité Hölderienne.

THÉORÈME **B.0.2** *(Seregin, [61], [62], [63])*

1. *Si* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$, *alors* $\mathbf{u} \in H^2_{loc}(\Omega)^N$.
2. *Si* $\mathbf{f} \in L^{2,2\lambda}(\Omega)^N$ *avec* $\lambda > 0$, *alors il existe un ouvert* $\Omega^+ \subset \Omega$ *tel que :*

$$D(\mathbf{u}) \in C^{0,\nu}(\Omega^+)^{N\times N} \ , \ \forall \nu \in [0, \lambda[$$

$$\|D(\mathbf{u})\|(x) > 0 \ \forall x \in \Omega^+$$

$$\|D(\mathbf{u})\|(x) = 0 \ p.p. x \in \Omega \backslash \Omega^+$$

Si $\mathbf{f} \in L^{2,2\lambda}(\Omega)^N$ *avec* $\lambda > 0$, *alors* $D(\mathbf{u}) \in C^0(\Omega)^{N\times N}$.

Ces résultats s'appuient sur une régularisation du problème initial via la fonctionnelle :

$$j_\delta(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left\{ \sqrt{\delta^2 + \|D(\mathbf{u})\|^2} - \delta \right\} dx \tag{B.1}$$

La continuité hölderienne sur Ω^+ s'obtient grâce à une estimation de type Campanato (voir [31]). Plus précisément, il est démontré que :

$$U(x,\rho) \leq c(N,\nu) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\nu} \left(U(x,R) + R^{2\mu}\right) \quad , \quad \forall \rho \in]0, R[\, , \ \forall x \in B(z, r_1)$$

où :

$$U(\xi,\rho) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\text{mes}(B(\xi,\rho))} \int_{B(\xi,\rho)} ||D(\mathbf{u}) - (D(\mathbf{u}))_{\xi,\rho}||^2 \, \mathrm{d}x$$

et $\mu > 0$, $B(z,r) \subset\subset \Omega$ et $r_1 < r/8$. Ainsi, $D(\mathbf{u})$ est dans l'espace de Campanato :

$$\mathcal{L}^{2,N+2\nu}(\Omega^+)^{N\times N} \hookrightarrow C^{0,\nu}(\Omega^+)^{N\times N}$$

Cas du modèle de Herschel-Bulkley avec adhérence à la paroi

Dans [28], le modèle d'Herschel-Bulkley rhéo-fluidifiant (l'exposant de la loi de puissance p vérifie $1 < p < 2$) est traité pour des conditions de Dirichlet, sans prise en compte de l'inertie. Il s'agit d'une extension du résultat de régularité Hölderienne énoncé dans le théorème (B.0.2).

Théorème **B.0.3** *On définit les deux ensembles :*

$$\Omega^* \overset{déf}{=} \Big\{ x \in \Omega \ ; \ x \text{ est un point de Lebesgue de } D(\mathbf{u}) \text{ et}$$
$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{\text{mes}(B(x;r))} \int_{B(x;r)} ||D(\mathbf{u}) - (D(\mathbf{u}))_{x,r}||^p \, \mathrm{d}\xi = 0 \Big\}$$

$$\Omega^*_+ \overset{déf}{=} \{ x \in \Omega^* \ ; \ D(\mathbf{u}) \neq 0 \}$$

Alors, on a :

1. *Ω^*_+ est un ouvert et $D(\mathbf{u}) \in C^{0,\alpha}(\Omega^*_+)^{N\times N}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$,*
2. *$\nabla \mathbf{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega^*_+)^{N\times N}$, pour tout $\alpha \in]0,1[$.*

Là, encore, la démonstration passe par une régularisation de $|D(.)|_{0,1;\Omega}$ en $j_\delta(.)$ telle que définie en (B.1). L'auteur démontre la convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$ de la solution régularisée $\mathbf{u}_\delta$ vers la solution $\mathbf{u}$. Ceci lui permet un passage à la limite dans l'estimation :

$$E(\mathbf{u}_\delta; B(x_0, t^k R)) \leq 2^{-k} E(\mathbf{u}_\delta; B(x_0, R)) \tag{B.2}$$

où :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}; B(x_0, t^k R)) \ &\overset{\text{déf}}{=} \ \frac{1}{\text{mes}(B(R;x_0))} \int_{B(R;x_0)} ||D(\mathbf{v}) - (D(\mathbf{v}))_{x_0,R}||^p \ dx \\ &+ \ \frac{1}{\text{mes}(B(R;x_0))} \int_{B(R;x_0)} ||D(\mathbf{v}) - (D(\mathbf{v}))_{x_0,R}||^2 \ dx \end{aligned}$$

et $x_0 \in \Omega^*_+$, $R > 0$ et $t > 0$ sont fixés indépendamment de δ et $k > 0$ est un entier quelconque. L'estimation (B.2) est délicate à obtenir et constitue l'essentiel de la démonstration. Elle permet de conclure que $D(\mathbf{u}_\delta)$ et $D(\mathbf{u})$ sont dans $C^{0,\alpha}(B(x_0; R/2))^{N\times N}$.

Remarquons que le cas rhéo-épaississant ($p > 2$) n'a pas été traité à notre connaissance bien qu'il corresponde à un ensemble important de situations.

Cas d'un modèle de Bingham ; prise en compte de l'inertie

Commençons par rappeler les résultats de Duvaut et Lions [23] au sujet d'une solution faible.

THÉORÈME **B.0.4** *On définit l'espace fonctionnel :*

$$V \overset{déf}{=} \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \ ; \ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0\}$$

Il existe un unique $\mathbf{u} \in V$ *vérifiant l'inéquation variationnelle :*

$$(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}-\mathbf{u})) + Bi(|D(\mathbf{v})|_{0,1;\Omega} - |D(\mathbf{u})|_{0,1;\Omega}) + ((\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}-\mathbf{u})\ ,\ \forall \mathbf{v} \in V$$

La démonstration utilise une régularisation de $|D(.)|_{0,1;\Omega}$. La prise en compte de l'inertie est ensuite effectuée par Fuchs et Seregin dans [29]. Cependant, dans cette étude, les nombres sans dimensions sont fixés à l'unité. Ainsi, les effets tels que la perte d'unicité attendue pour $\mathcal{R}e \gg 1$ (par analogie avec Navier-Stokes), ainsi qu'une éventuelle perte de régularité, ne sont pas envisagés. La régularité obtenue est alors la même qu'en l'absence d'inertie.

THÉORÈME **B.0.5**
1. *Si* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$*, alors* $\mathbf{u} \in H^2_{loc}(\Omega)^N$*,*
2. *Si* $\mathbf{f} \in L^{2,N-2}(\Omega)^N$*, alors* $\mathbf{u} \in H^2_{loc}(\Omega)^N \cap C^{0,\alpha}(\Omega)^N$*, pour tout* $\alpha \in]0;1[$*,*
3. *Si* $\mathbf{f} \in L^{2,N-2+2\mu}(\Omega)^N$ *pour un* $\mu \in]0;1[$*, alors on a de plus :*
   - *(a)* $D(\mathbf{u}) \in L^\infty_{loc}(\Omega)^{N\times N}$*,*
   - *(b) Si* $N = 2$*, alors* $D(\mathbf{u})$ *est continu sur* Ω*,*
   - *(c) il existe un ouvert* Ω^+ *tel que* $D(\mathbf{u}) \in C^{0,\lambda}(\Omega^+)^{N\times N}$ *pour* $\lambda \in]0,\mu[$ *et sur lequel* $D(\mathbf{u}) \neq 0$ *; de plus,* $D(\mathbf{u}) = 0$ *p.p. sur* $\Omega\backslash\Omega^+$*.*

La méthode de démonstration consiste à établir la régularité du terme d'inertie, puis à considérer le second membre : $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - (\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ Il est alors possible de conclure, en appliquant les théorèmes connus dans le cas où l'inertie est négligée. La régularité du terme d'inertie est établie dans le lemme :

LEMME **B.0.1**
1. *Si* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$*, alors* $(\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \in L^{2,N-2+2\alpha}_{loc}(\Omega)^N$*, pour tout* $\alpha \in]0;2-N/2[$*,*
2. *Si* $\mathbf{f} \in L^{2,N-2}(\Omega)^N$*, alors* $(\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \in L^{2,N-2+2\alpha}_{loc}(\Omega)^N$*, pour tout* $\alpha \in]0;1[$*.*

Les auteurs disent avoir échoué à obtenir des résultats analogues dans le cas du modèle d'Herschel-Bulkley, sauf dans certains cas rhéo-fluidifiants.

Annexe C

Régularisation du modèle de Bingham

La plupart des auteurs de travaux de simulations numériques sur les fluides à seuils n'utilisent pas ce que nous appelons ici des *modèles avec un vrai seuil*[1] , comme par exemple les modèles de Bingham et d'Herschel-Bulkley. En effet, pour des raisons pratiques de mise en œuvre, des modèles de loi de comportement transformant l'effet de seuil en un phénomène régulier sont utilisés. Étant introduites comme des lois de comportement, nous considérons ces régularisations comme des modèles à part entière et nous les nommons *modèles bivisqueux.*[2].

Par ailleurs, l'idée de «variante régulière» des modèles avec un vrai seuil était déjà connue depuis les travaux de [23]. Dans ces travaux, c'est le problème variationnel dont l'inconnue est la vitesse qui est modifié[3]. Cette modification est alors un outil commode pour effectuer des démonstrations d'analyse mathématique. La régularisation n'y est pas introduite comme une loi de comportement bien qu'il soit possible d'en écrire une. Nous parlerons alors de *modèles régularisants*[4].

1. Nous parlons de vrai seuil lorsque la loi de comportement exprime exactement le seuil via un critère de plasticité de type Von Mises.

2. Cette dénomination est utilisée dans quelques articles de la littérature pour désigner certains modèles régularisant le seuil. Le terme «bivisqueux» vient simplement du fait que, dans la loi de comportement, le terme représentant l'effet de seuil (ici régularisé !) peut être considéré comme un second terme visqueux, de viscosité non-linéaire et régulière

3. L'inéquation variationnelle en u, est transformée en équation variationnelle, plus facile à manipuler. De plus, la fonctionnelle d'énergie associée est alors Gâteaux-différentiable.

4. Les modèles bivisqueux pourrait être aussi appelés régularisant car, précisément, ils régularisent la loi de comportement des modèles avec vrai seuil. Cependant, nous choisissons de faire une distinction entre deux classes de modèles ; les uns étant introduits comme des modèles mécaniques, les autres comme l'expression d'une technique mathématique. Au delà de l'aspect pratique (concrètement, c'est souvent lui qui domine dans le choix du modèle), la préférence d'un modèle bivisqueux à un modèle à vrai seuil renvoie à une discussion sur l'existence du seuil et à sa représentation mathématique. L'utilisation d'un

Bien qu'étant utilisés le plus souvent pour des travaux théoriques, les modèles régularisants peuvent également être utilisés pour des travaux numériques. Cependant, il s'avère que les modèles les plus populaires dans la littérature numériques sont les modèles bivisqueux, introduits par [8] et [54]. Curieusement, il n'existe pas, du moins à notre connaissance, de vérification au sujet de ces modèles concernant l'existence et l'unicité de la solution régularisée. De plus, la qualité de l'approximation est souvent décrite *a priori* de manière empirique et, *a posteriori* à l'aide de quelques tests numériques.

Dans la suite, nous allons décrire, dans un cadre unifié, l'ensemble de ces différents modèles. La régularisation (quelle que soit la classe de modèle) fait toujours intervenir un paramètre que nous noterons ε. La vitesse associée sera toujours notée u_ε. Nous commencerons par rappeler les résultats mathématiques de [35] au sujet des modèles régularisants. Puis, nous présenterons les principaux modèles bivisqueux en faisant les vérifications élémentaires suivantes :

- existence d'une solution bivisqueuse $\mathbf{u}_\varepsilon$,
- unicité de cette solution,
- estimation de la convergence de $\mathbf{u}_\varepsilon$ vers $\mathbf{u}$.

Rappels sur les modèles régularisants de [35]

On considère, pour $t \geq 0$, les fonctions convexes de classe C^1 :

$$\Phi_{1\varepsilon}(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$$

$$\Phi_{2\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{\pi}\left\{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2\varepsilon}\right)\right\} & si \quad t \leq \varepsilon \\ t - \varepsilon\left(1\frac{2}{\pi}\right) & si \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

La fonctionnelle j est remplacée par une fonctionnelle différentiable :

$$j_{l\,\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \Phi_{l\,\varepsilon}(\|D(\mathbf{v})\|)\,dx \tag{C.1}$$

et on pose :

$$J_0(\mathbf{v}) = \int_\Omega \|D(\mathbf{v})\|^2\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x$$

modèle régularisant présuppose au contraire le choix d'un modèle avec vrai seuil, que l'on traite de manière approchée, via la technique des modèles régularisants.

On définit alors le problème régularisé $(P_{l\varepsilon})$ consistant à minimiser la fonctionnelle $J = J_0 + Bi\, j_{l\,\varepsilon}$.

THÉORÈME **C.0.6** *([35], proposition 6.1. et théorème 6.1., page 114)*

Les problèmes approchés $(P_{l\varepsilon})$ admettent chacun une unique solution $\mathbf{u}_\varepsilon^l \in V$ caractérisée par :

$$(D(\mathbf{u}_\varepsilon^l), D(\mathbf{v})) + Bi < j'_{l\,\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon^l), \mathbf{v} >= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \ , \ \forall \mathbf{v} \in V$$

ainsi que :

$$(D(\mathbf{u}_\varepsilon^l), D(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon^l)) + Bi \left(j_{l\,\varepsilon}(\mathbf{v}) - j_{l\,\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon^l) \right) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon^l) \ , \ \forall \mathbf{v} \in V$$

De plus, la régularisation est justifiée par l'estimation :

$$|\mathbf{u}_\varepsilon^l - \mathbf{u}|_{1,2;\Omega} \leq C_l \sqrt{\varepsilon}$$

Les résultats initialement énoncés dans [35] concernent le problème de Poiseuille en section quelconque, mais la démonstration convient encore dans le cas général. En effet, celle-ci repose d'une part sur les propriétés suivantes de J :

- convexité,
- continuité,
- différentiabilité,
- $\lim_{|\mathbf{v}|_{1,2;\Omega} \longrightarrow +\infty} J(\mathbf{v}) = +\infty$

qui garantissent l'existence et l'unicité, ainsi que l'équivalence des deux formulations variationnelles. D'autre part, l'estimation de la convergence de $\mathbf{u}_\varepsilon^l$ vers $\mathbf{u}$ est obtenue grâce à la relation :

$$|\mathbf{u}_\varepsilon^l - \mathbf{u}|_{1,2;\Omega} \leq Bi \left\{ (j_{l\,\varepsilon}(\mathbf{u}) - j(\mathbf{u})) + \left(j(\mathbf{u}_\varepsilon^l) - j_{l\,\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon^l) \right) \right\}$$

avec $j(\mathbf{v}) = |D(\mathbf{v})|_{0,1;\Omega}$. Cette relation s'établit dans le cas général comme dans le cas de Poiseuille. On utilise ensuite une propriété de $\Phi_{l\,\varepsilon}$:

$$|t - \Phi_{l\,\varepsilon}(t)| \leq c_l\, \varepsilon$$

Dans les modèles bivisqueux, nous essayerons, à chaque fois que c'est possible, de retrouver les arguments de cette démonstration.

Les auteurs précisent que l'estimation du théorème (C.0.6) n'est probablement pas optimale. Ils donnent dans le cas unidimensionnel où $f = 1$ et pour $l = 1$ une estimation $H^1(0;1)$ plus précise ainsi qu'une estimation $L^\infty(0;1)$.

THÉORÈME **C.0.7** *([35], Théorème 6.2, page 116)*

En écoulement non-bloqué, on a :

$$\|u_\varepsilon^1 - u\|_{L\infty(0;1)} \leq c.\varepsilon$$

$$\|u_\varepsilon^1 - u\|_{H_0^1(0;1)} \leq c.\varepsilon\sqrt{|\ln(\varepsilon)|}$$

Les auteurs font de la preuve un exercice de calcul. Ils conjecturent dans le cas de Poiseuille, en section quelconque, une convergence H^1 en $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$.

Vérifications élémentaires sur les modèles bivisqueux

Dans la suite, les modèles bivisqueux seront d'abord écrits tels qu'introduits dans la littérature, puis formulés à l'aide du paramètre ε, sous une forme adimensionnelle.

Modèle bivisqueux de Beverly et Tanner [8]

La loi de comportement bivisqueuse est introduite dans [8] sous la forme :

$$\sigma = \begin{cases} 2\,\eta_r\, D(\mathbf{u}) & \text{si } \|D(\mathbf{u})\| \leq \gamma_c \\ \\ 2\,\eta\, D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \dfrac{D(\mathbf{u})}{\|D(\mathbf{u})\|} & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.2}$$

Les zones rigides y sont remplacées par des zones très visqueuses, où la viscosité vaut η_r. Le paramètre γ_c permet de délimiter ces zones. Une fois adimensionné, cette loi s'écrit :

$$\sigma = \begin{cases} 2\,\overline{\eta}\, D(\mathbf{u}) & \text{si } \|D(\mathbf{u})| \leq \varepsilon \\ \\ 2\, D(\mathbf{u}) + Bi \dfrac{D(\mathbf{u})}{\|D(\mathbf{u})\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec les deux paramètres sans dimension :

- la «viscosité plastique» sans dimension [5] : $\overline{\eta} = \frac{\eta_r}{\eta}$,
- le seuil (sans dimension) des faibles déformations : $\varepsilon = \frac{\gamma_c\, L}{U}$, U et L étant respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques.

5. «viscosité plastique» est le nom donné à η_r par Tanner et al. dans leurs articles

Afin de garantir la continuité de $\|\sigma\|$ à la traversée de l'interface entre les zones rigides et les zones déformées, on ajoute à cette relation la condition suivante :

$$\overline{\eta} = 1 + \frac{Bi}{2\varepsilon}$$

ceci nous permet d'éliminer $\overline{\eta}$ de la relation constitutive sans dimension. Nous écrivons alors la loi bivisqueuse sous la forme :

$$\sigma = 2D(\mathbf{u}) + Bi \times \begin{cases} \dfrac{D(\mathbf{u})}{\varepsilon} & \text{si } \|D(\mathbf{u})\| \leq \varepsilon \\ \dfrac{D(\mathbf{u})}{\|D(\mathbf{u})\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour une telle loi, on obtient facilement la formulation variationnelle :

$$(D(\mathbf{u}_{3\varepsilon}), D(\mathbf{v})) + Bi(\Phi'_{3\varepsilon}(\|D(\mathbf{u}_{3\varepsilon})\|)D(\mathbf{u}_{3\varepsilon}), D(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \ \ , \forall \mathbf{v} \in V \tag{C.3}$$

où l'on a posé :

$$\Phi_{3\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} & si \quad t \leq \varepsilon \\ t & si \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

On constate que la fonctionnelle Gâteaux-différentiable $j_{3\varepsilon}$ associée à $\Phi_{3\varepsilon}$ par la relation (C.1) remplit parfaitement les conditions requises dans la démonstration de (C.0.6) pour obtenir l'existence, l'unicité et la convergence, donc :

Proposition **C.0.1** *Les résultats du théorème (C.0.6) s'appliquent au problème de minimisation ($P_{3\varepsilon}$) associé à la fonction $\Phi_{3\varepsilon}$. Les formulations variationnelles ainsi obtenues coïncident avec la formulation variationnelle (C.3) du modèle bivisqueux (C.2).*

Modèle de Papanastasiou, [54]

Le modèle bivisqueux de Papanastasiou a été introduit par [54] sous la forme :

$$\sigma = 2\,\eta\, D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \frac{1 - e^{-m|D(\mathbf{u})|}}{\|D(\mathbf{u})\|} D(\mathbf{u}) \tag{C.4}$$

L'exposant m est destiné (du moins en théorie) à tendre vers 0. Nous noterons de préférence $\varepsilon = \frac{1}{m}$, par soucis d'homogénéité des notations. La loi sans dimension s'écrit alors :

$$\sigma = 2D(\mathbf{u}) + Bi \left(1 - e^{-\frac{\|D(\mathbf{u})\|}{\varepsilon}}\right) \frac{D(\mathbf{u})}{\|D(\mathbf{u})\|}$$

La formulation variationnelle associée est donc :

$$(D(\mathbf{u}_{3\,\varepsilon}), D(\mathbf{v})) + Bi(\Phi'_{4\,\varepsilon}(\|D(\mathbf{u}_{4\,\varepsilon})\|)D(\mathbf{u}_{4\,\varepsilon}), D(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \ \ , \forall\, \mathbf{v} \in V \tag{C.5}$$

où l'on a posé :

$$\Phi_{4\,\varepsilon}(t) = |t| + \varepsilon\, e^{-t/\varepsilon}$$

On peut définir encore une fois une fonctionnelle Gâteaux-différentiable $j_{4\,\varepsilon}$ par (C.1) (pour $l = 4$). Les conditions requises dans la démonstration de (C.0.6) pour obtenir l'existence, l'unicité et la convergence sont encore une fois satisfaites par cette fonctionnelle. On peut donc encore énoncer :

PROPOSITION **C.0.2** *Les résultats du théorème (C.0.6) s'appliquent au problème de minimisation* $(P_{4\,\varepsilon})$ *associé à la fonction* $\Phi_{4\,\varepsilon}$*. Les formulations variationnelles ainsi obtenues coïncident avec la formulation variationnelle (C.5) du modèle bivisqueux (C.4).*

Annexe D

Construction d'un maillage adapté du domaine circulaire

Cette annexe donne de manière détaillée la construction d'un maillage adapté pour le problème de Poiseuille circulaire avec condition d'adhérence à la paroi. Les triangles de ce maillage sont droits. Pour reprendre les notations de la section II.3.3, on construit donc ici $\widetilde{\Omega_h}$. Rappelons que les propriétés de la triangulation $\mathcal{T}_h$ à construire sont :

(i) $\mathcal{T}_h$ est régulière, de pas h,

(ii) la sous-triangulation de $\mathcal{T}_h$ constituée des triangles qui rencontrent la frontière Γ_0 des zones rigides (et dont la réunion est notée[1] ω_h) est quasi-uniforme de pas h_0,

(iii) Le nombre d'éléments de $\mathcal{T}_h$ est en $\mathcal{O}(1/h_0 + 1/h^2)$.

Dans cette construction, la principale difficulté est de montrer que les triangles ne s'applatissent pas quand h tends vers 0 : leur qualité reste bornée (propriété (i)). Il nous a paru plus simple de construire un maillage de pas proportionnel à h, ce qui ne change pas les indispensables propriétés (ii) et (iii).

Cette construction consiste en quatre étapes. Dans chacune des étapes, on construit une partie de la triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω. Les étapes sont les suivantes :

1. Construction de la triangulation définissant ω_h.
2. Construction d'une triangulation régulière de transition entre ω_h et une triangulation quasi-uniforme de pas h voisine de la frontière de Ω. La réunion des triangles ainsi construits est une partie de Ω notée ω_e.
3. Construction des triangles de $\mathcal{T}_h$ qui rencontrent le bouchon rigide et qui ne rencontrent pas l'intérieur de ω_h. Rappelons que la réunion de ces triangles est notée

[1] les notations sont celles du chapitre II.3

ω_0.

4. Construction d'une triangulation quasi-uniforme de pas h voisine de la frontière de Ω.

En fait ω_h sera constitué des deux premières couches de triangles dans la construction de ω_e. A chaque étape, on donne, pour la sous-triangulation concernée :

- le principe de construction,
- la longueur des arrêtes des triangles,
- un encadrement de la qualité des triangles,
- quelques ordres de grandeurs indispensables pour vérifier que la triangulation de Ω que l'on construit répond bien aux exigences précédemment rappelées (par exemples, on pourra donner le nombre d'éléments en fonction de h).

Rappelons que la qualité d'un triangle K est définie par :

$$q_K = \frac{h_K}{\rho_K}$$

où ρ_K est la rondeur de K c'est-à-dire le diamètre du cercle inscrit dans K. Le nombre h_K est le diamètre de K, soit en fait la longueur de la plus grande arête.

Si un triangle K a ses arêtes de longueurs a, b, c, on désigne ce triangle par (a, b, c) (on fait volontairement la confusion entre le nom d'une arête et le nom de la variable qui désigne sa longueur).

Tous les triangles construits dans ce maillage sont isocèles. Ceci simplifie le calcul de ρ_K qui vaut de manière générale le double du rapport de la surface au périmètre. Pour un triangle $K = (a, a, b)$, on obtient :

$$\rho_K = b\frac{(a^2 - b^2/4)^{1/2}}{2a+b} = \frac{b}{2}\left(\frac{a - b/2}{a + b/2}\right)^{1/2}$$

Détaillons à présent les quatre étapes de la construction.

1. On sait que la frontière du bouchon est un cercle C de rayon r_c.
   Nous allons considérer que des segments de longueurs h_0 sont disposés consécutivement sur C, autrement dit nous considérons un maillage uniforme de C par des segments de longueur h_0. Chaque segment est la corde d'un arc d'angle α_0.
   Comme en fait il ne loge pas forcément un nombre entier de tels segments sur C, nous simplifions le problème en considérant le cercle C_0 qui est la réunion d'arcs consécutifs de longueur de corde h_0. Dans la suite, cette simplification nous conduit à utiliser r_0 et C_0 au lieu de r_c et C.

Le sous-domaine ω_h est alors constitué des deux premières couches de triangles dans la construction suivante de ω_e.

2. La construction de la zone de transition ω_e, reliant ω_h à une zone maillée de manière quasi-uniforme avec un pas h, est schématisée sur la figure Fig. D.1.a. On procède par récurrence à partir de C_0 de centre O de rayon r_0, maillé avec un pas h_0.

   - Le principe de construction est le suivant (pour $i \geq 0$) :
     - •• On dispose un maillage uniforme d'un cercle C_i de rayon r_i et de centre O par des segments de longueur h_i.
     - •• On construit une première couche de triangles isocèles K tels que K possède d'une part une arête appartenant au maillage de C_i et, d'autre part, une arête de longueur h_i sur un rayon de C_i. Ces triangles (h_i, h_i, a_i) ont chacun un sommet qui n'est pas sur C_i. Ces sommets sont sur un cercle de C_{i+1} de rayon $r_{i+1} = r_i + h_i$.
     - •• On construit une seconde couche de triangles isocèles K tels qu'une arête de K s'obtienne en reliant deux sommets consécutifs placés sur C_{i+1}. On note alors h_{i+1} la longueur de ces arêtes. On obtient alors des triangles (a_i, a_i, h_{i+1}).
     - •• On définit l'entier n par $h_n < h < \theta_n h_n$. On stoppe le processus de construction lorsque $i = n$. On obtient alors un maillage du cercle C_n, par des arêtes de longueur en $\mathcal{O}(h)$.

     Pour $i = 0$, on obtient ainsi, avec les trois premières étapes de ce principe, tous les triangles qui constituent ω_h.
   - On peut relier h_i et r_i par l'intermédiaire de l'angle α_i, défini par la relation :

     $$h_i = 2\, r_i\, \sin(\alpha_i/2)$$

     On définit le taux d'allongement par $h_{i+1} = \theta_i\, h_i$. Il est explicitement relié à l'angle α_i :

     $$h_i + r_i = r_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{2\,\sin(\alpha_i)} = \theta_i\, \frac{h_i}{2\,\sin(\alpha_i)}$$

     d'où :

     $$\theta_i = \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i/2)} + 2\sin(\alpha_i)$$

     Remarquons que $2 < \theta_i < 2 + \sqrt{2}$ lorsque $0 < \alpha_i < \pi/2$.
     On peut calculer les quantités η_i (hauteur du triangle (a_i, a_i, h_{i+1})) et a_i en fonction de h_i, θ_i et α_i :

     $$\tan(\alpha_i) = \frac{h_{i+1}/2}{r_i + \eta_i} \quad \Longrightarrow \quad \eta_i = \frac{h_i}{2}\left(\frac{\theta_i}{\tan(\alpha_i)} - \frac{1}{\sin(\alpha_i/2)}\right)$$

en utilisant l'expression de θ_i, cela donne la formule suivante :

$$\eta_i = h_i \left(\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i/2)\right)$$

Puis :

$$a_i = \sqrt{\eta_i^2 + \frac{h_{i+1}^2}{4}} = \frac{h_i}{2}\sqrt{4\left(\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i/2)\right)^2 + \theta_i^2}$$

- La qualité des triangles (h_i, h_i, a_i) et (a_i, a_i, h_{i+1}) est bornée indépendemment de h_0 et h, comme le montrent les calculs qui suivent.
  - Triangle (h_i, h_i, a_i) :
    Le diamètre h_K et la rondeur ρ_K de ce triangle sont définis par :

    $$h_K = \max\{h_i, a_i\} \text{ et } \rho_K = \frac{a_i}{2}\left(\frac{h_i - a_i/2}{h_i + a_i/2}\right)^{1/2}$$

    Remarquons alors que a_i/h_i croit strictement sur $]0;\pi/2[$ de $\sqrt{2}$ vers $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, on en déduit que $h_K = a_i$. La qualité q_K vérifie, pour $\alpha_i \in]0;\pi/2[$:

    $$q_K = 2\left(\frac{h_i + a_i/2}{h_i - a_i/2}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{1 + a_i/2h_i}{1 - a_i/2h_i}\right)^{1/2}$$

    puis finalement :

    $$2\left(\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^{1/2} > q_K > 2\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{1/2}$$

  - Triangle (a_i, a_i, h_{i+1}) :

    $$h_K = \max\{a_i, h_{i+1}\} \text{ et } \rho_K = \frac{h_{i+1}}{2}\left(\frac{(a_i - h_{i+1}/2)}{a_i + h_{i+1}/2}\right)^{1/2}$$

    Puisque $\sqrt{2+\sqrt{2}} > a_i/h_i > \sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2} > \theta_i > 2$, on a $h_{i+1}/a_i = \theta_i\, h_i/a_i > 2/\sqrt{2+\sqrt{2}} > 1$, on en déduit que $h_K = h_{i+1}$ et on peut exprimer puis encadrer la qualité :

    $$q_K = 2\left(\frac{a_i + h_{i+1}/2}{a_i - h_{i+1}/2}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{1 + \frac{\theta_i\, h_i}{2\, a_i}}{1 - \frac{\theta_i\, h_i}{2\, a_i}}\right)^{1/2}$$

    $$2\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^{1/2} > q_K > 2\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right)^{1/2}$$

- Le nombre d'éléments N_e de ces n couches externes est donné par :

$$N_e = \sum_{i=0}^{n} \frac{3\pi}{\alpha_i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{3\pi}{2^i\,\alpha_0} = \frac{6\pi}{\alpha_0}(1-2^{-n}) \leq \frac{6\pi}{sin(\alpha_0)} = \frac{6\pi}{sin(\alpha_0)} = \frac{12\pi(r_0+h_0)}{\theta_1\,h_0}$$

Comme $\theta_1 \in]2; 2+\sqrt{2}[$ (pour $\alpha_0 \in]0;\pi/2[$), on voit que :

$$N_e = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$$

- L'épaisseur $e = r_n - r_0$ du sous-maillage ainsi construit vaut :

$$e = r_0\left(\frac{\sin(\alpha_0/2)}{\sin(\alpha_n/2)}\Pi_{0\leq i\leq n}\theta_i - 1\right)$$

C'est aussi la somme des h_i, pour i allant de 0 à n. C'est en effectuant cette somme pour différentes valeurs de r_0 que nous avons pu vérifier (numériquement) que l'épaisseur e est proportionnelle à h et donc tend vers 0 lorsque h tends vers 0, avec $h_0 = h^2$ (voir figure Fig. D.3). Ceci garantit que, pour h assez petit, ω_e est bien inclus dans Ω.

3. On reprend la construction de ω_e mais en progressant vers le centre de ω_0. Les définitions r_i, h_i, a_i, θ_i et η_i sont maintenues.
La figure Fig. D.1.b montre le principe de construction.
La construction est arrêtée lorsque l'angle α_i devient trop grand. Plus précisément, la dernière couche est caractérisée par l'entier n tel que :

$$\frac{\alpha_c}{2} = \frac{\pi}{16} < \alpha_n < \alpha_c = \frac{\pi}{8}$$

on joint alors les sommets de C_n à l'origine, ce qui construit un nombre de triangles compris entre 16 et 32 et dont la qualité est nécessairement encadrée par des constantes positives. Ce choix de α_c est guidé par les calculs qui suivent.

- Nous avons toujours :

$$h_i = 2\,r_i\,\sin(\alpha_i/2)$$

Mais cette fois-ci, la valeur de θ_i est modifiée :

$$\theta_i = \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i/2)} - 2\,\sin(\alpha_i)$$

Une telle valeur de θ_i est supérieure (strictement) à 1 lorsque $\alpha_i < \alpha_c$. On peut prendre $\alpha_c = \pi/8$. L'expression de η_i n'est plus la même :

$$\tan(\alpha_i) = \frac{h_{i+1}/2}{r_i - \eta_i} \Longrightarrow \eta_i = \frac{h_i}{2}\left(\frac{1}{\sin(\alpha_i/2)} - \frac{\theta_i}{\tan(\alpha_i)}\right)$$

Puis, vu l'expression de θ_i, on trouve :

$$\eta_i = h_i \left(\cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i/2)\right)$$

Enfin, on calcule la longueur a_i :

$$a_i = \sqrt{\eta_i^2 + \frac{h_{i+1}^2}{4}} = \frac{h_i}{2}\sqrt{4(\cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i/2))^2 + \theta_i^2}$$

- Vérifions la régularité des triangles.
  - •• Triangle (h_i, h_i, a_i) :

$$h_K = \max\{h_i, a_i\} \quad \text{et} \quad \rho_K = \left(\frac{a_i}{2}\frac{h_i - a_i/2}{h_i + a_i/2}\right)^{1/2}$$

On peut vérifier que le rapport a_i/h_i décroît sur $]0;\pi/3[$ de $\sqrt{2}$ à 1. On en déduit donc que $h_K = a_i$ et, de plus, on peut encadrer la qualité :

$$2\left(\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}\right)^{1/2} > q_K = 2\left(\frac{1+\frac{a_i}{2\,h_i}}{1-\frac{a_i}{2\,h_i}}\right)^{1/2} > 2\sqrt{3}$$

  - •• Triangle (h_{i+1}, a_i, a_i) :

$$h_K = \max\{h_{i+1}, a_i\} \quad \text{et} \quad \rho_K = \frac{h_{i+1}}{2}\left(\frac{a_i - h_{i+1}/2}{a_i + h_{i+1}/2}\right)^{1/2}$$

On utilise alors le fait que, pour $\alpha_i \in]0;\pi/3[$, $a_i/h_i \in]\sqrt{2};1[$ et que, pour $\alpha_i \in]0;\pi/8[$, $\theta_i \in]1;2[$. Ceci implique que sur ce dernier intervalle, $a_i/h_{i+1} \in]1/2;\sqrt{2}[$. En fait, on peut voir que a_i/h_{i+1} est décroissante (par rapport à α_i), donc, en calculant la valeur pour $\alpha_i = 0$, on trouve $a_i/h_{i+1} \in]\sqrt{2}/2;\sqrt{2}[$.
Comme on le voit, il n'est pas possible de fixer définitivement h_K, à moins de choisir α_c plus petit que $\pi/8$. On va plutôt faire deux calculs.
Lorsque $h_k = h_{i+1}$, on obtient :

$$2\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{1/2} > q_K = 2\left(\frac{\frac{2\,a_i}{h_{i+1}}+1}{\frac{2\,a_i}{h_{i+1}}-1}\right)^{1/2} > 2\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right)^{1/2}$$

Lorsque $h_k = a_i$, on obtient :

$$2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{1/2} > q_K = 2\frac{a_i}{h_{i+1}}\left(\frac{\frac{2\,a_i}{h_{i+1}}+1}{\frac{2\,a_i}{h_{i+1}}-1}\right)^{1/2} > \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right)^{1/2}$$

- Par le même calcul que pour ω_e, on trouve un coût N_i vérifiant :

$$N_i = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_0}\right)$$

- L'épaisseur de ω_i est toujours inférieure à r_0 par construction.

4. On achève la construction du maillage en ajoutant à ce qui précède un maillage quasi-uniforme de pas proportionnel à h qui permet de «remplir» le domaine Ω.
   On procède à nouveau de proche en proche, à partir de la $n^{\text{ième}}$ couche de ω_e.
   Pour simplifier, nous posons pour la suite $\alpha = \alpha_n/2$.

   - Décrivons formellement le procédé de construction schématisé sur la figure Fig. D.2.
     On construit la $(i+1)^{\text{ième}}$ couche à partir de la $i^{\text{ième}}$ de la manière suivante :
     - •• On dispose d'un nombre fixé d'arètes (égal à $2\pi/\alpha_n$) disposées sur un cercle que nous notons à nouveau C_i (pour $i = 0$, c'est le cercle que nous appelions C_n précédemment). Chacun de ces segments est la corde d'un arc de longueur α.
     - •• Soit un des segment de longueur H_i. Le rayon passant par le milieux de ce segment coupe un cercle C_{i+1} de rayon R_{i+1}. Ce point d'intersection est le sommet d'un triangle dont un des côtés est notre segment de longueur H_i. Nous noterons (a_i, a_i, H_i) le triangle isocèle ainsi construit.
     - •• Les sommets des triangles (a_i, a_i, H_i) qui sont situés sur C_{i+1} peuvent être reliés pour former des segments consécutifs de longueur H_{i+1}. On définit ainsi des triangles (a_i, a_i, H_{i+1}). Il sera commode d'introduire un taux d'accroissement $\theta = H_{i+1}/H_i$.
     - •• On se donne une règle de construction en imposant que $a_i = H_{i+1}$. Ceci permet de fixer θ et donc aussi H_{i+1}, R_{i+1} et a_i en fonction de H_i et θ.
     - •• On stoppe la construction à la $(n-1)^{\text{ième}}$ couche si n est tel que $\theta R_{n-1} \leq R < \theta^2 R_{n-1}$. Dans ce cas, on met en place une dernière couche en modifiant légèrement le principe de la construction précédente. La modification consiste à remplacer C_n par $\partial\Omega$. La règle de construction $a_i = H_{i+1}$ n'a évidemment plus lieu (à moins que $\theta R_n = R$). Par commodité, on notera $\widehat{\theta}$ le nombre tel que : $R = \widehat{\theta} R_{n-1}$, on remarque alors que $\theta \leq \widehat{\theta} < \theta^2$.
   - Nous pouvons calculer les différentes grandeurs introduites dans la description du procédé de construction.
     On a encore :

$$H_i = 2\, R_i \sin(\alpha)$$

     puisque $H_{i+1} = \theta H_i$, on a de même $R_{i+1} = \theta R_i$. La hauteur η_i du triangle $(a_i, a_i, \theta H_i)$ est donnée par :

$$\frac{\theta H_i/2}{R_i + \eta_i} = \tan(\alpha_i) \iff \eta_i = \frac{H_i}{2}\left(\frac{\theta}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)$$

On voit que $\eta_i > 0$ si $\theta > 1/\cos(\alpha)$ (pour $\alpha < \pi/2$). C'est une condition à prendre en considération lors du calcul de θ. De plus, la longueur a_i est donnée par :

$$a_i = \sqrt{\eta_i^2 + \frac{\theta^2 H_i^2}{4}} = \frac{H_i}{2}\left(\frac{\theta}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)$$

enfin la règle de construction $a_i = \theta H_i$ implique que :

$$3\theta^2 = \left(\frac{\theta}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)^2$$

ce qui donne tous calculs effectués :

$$\theta = \frac{1}{\cos(\alpha) - \sqrt{3}\sin(\alpha)}$$

La fonction $\alpha \mapsto \theta(\alpha)$ croît strictement de 1 vers $+\infty$ sur l'intervalle $]0;\pi/6[$ et est négative sur $]\pi/6;+\infty[$. Ceci suggère un choix de α disons inférieur à $\pi/12$ ce qui s'interprète comme une condition du type «h est assez petit». en outre, on peut vérifier que $\eta_i > 0$ puisque $\theta > 1/\cos(\alpha)$.

- Le triangle (a_i, a_i, H_{i+1}) est équilatéral par construction (c'est la règle que l'on s'est fixée). Observons la qualité du triangle isocèle (a_i, a_i, H_i).

$$h_K = \max\{a_i, H_i\} = \max\{H_{i+1}, H_i\} = H_{i+1}$$

et :

$$\rho_K = \frac{H_i}{2}\left(\frac{a_i - H_i/2}{a_i + H_i/2}\right)^{1/2} = \frac{H_i}{2}\left(\frac{H_{i+1} - H_i/2}{H_{i+1} + H_i/2}\right)^{1/2} = \frac{H_i}{2}\left(\frac{\theta - 1/2}{\theta + 1/2}\right)^{1/2}$$

on peut donc encadrer facilement la qualité en considérant que $\alpha \in]0;\pi/12[$. En fait, on peut constater que la qualité est croissante sur cet intervalle de valeurs de α.

$$4\sqrt{5} > q_K = 2\,\theta\left(\frac{\theta + 1/2}{\theta - 1/2}\right)^{1/2} > 2\sqrt{3}$$

Pour la borne inférieure, on fait $\alpha = 0$, pour la borne supérieure, on utilise l'encadrement $1 < \theta < 2$.

- Contrôlons la qualité des triangles de la dernière ($n^{\text{ième}}$) couche. Posons :

$$a(\phi) = \frac{h_{n-1}}{2}\left\{\phi^2 + \left(\frac{\phi}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)^2\right\}^{1/2}$$

On peut remarquer que $\phi \mapsto a(\phi)$ est une fonction croissante et que $a(\phi) > \phi h_{n-1}$ si, et seulement si, $\phi > \theta$. Sachant que $\widehat{\theta} \in]\theta;\theta^2[$, on en déduit l'encadrement :

$$a(\theta^2) > a(\widehat{\theta}) > \widehat{\theta} h_{n-1}$$

puis, en notant que $a_n = a(\widehat{\theta})$:

$$\frac{\theta^2}{2}\left\{1+\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\theta^2}{\tan(\alpha)}-\frac{1}{\sin(\alpha)}\right)^2\right\}^{1/2} > \frac{a_n}{h_{n-1}} > \widehat{\theta}$$

or, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\tan(\alpha)}-\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) = \frac{\theta-1}{\tan(\alpha)}+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\tan(\alpha)}-\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) = \frac{\theta-1}{\tan(\alpha)}+\sqrt{3}$$

La dernière égalité provient de la définition de θ. Il apparaît par un calcul simple que le terme $\dfrac{\theta-1}{\tan(\alpha)}$ tends vers $\sqrt{3}$ lorsque α tends vers 0. On en déduit que a_n/h_{n-1} est majoré par une quantité qui tends vers $\frac{\sqrt{13}}{2}$. On utilisera le fait que, pour α (et donc h) assez petit, on a :

$$\sqrt{13} > \frac{a_n}{h_{n-1}} > \widehat{\theta} > 1$$

ce qui va simplifier l'encadrement de la qualité.

•• Triangle (a_n, a_n, h_{n-1}) :

$$h_K = \max\{a_n, h_{n-1}\} = a_n \text{ et } \rho_K = \frac{h_{n-1}}{2}\left(\frac{a_n - h_{n-1}/2}{a_n + h_{n-1}/2}\right)^{1/2}$$

la détermination de h_K provient de l'encadrement de a_n/h_{n-1}. Celui-ci fournit de plus :

$$2\sqrt{13}\sqrt{1+2\sqrt{13}} > q_K = 2\frac{a_n}{h_{n-1}}\left(\frac{a_n/h_{n-1}+1/2}{a_n/h_{n-1}-1/2}\right)^{1/2} > \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{13}-1}}$$

•• Triangle $(a_n, a_n, \widehat{\theta} h_{n-1})$:

$$h_K = \max\{a_n, \widehat{\theta} h_{n-1}\} = a_n \text{ et } \rho_K = \frac{\widehat{\theta} h_{n-1}}{2}\left(\frac{a_n/h_{n-1} - \widehat{\theta}/2}{a_n/h_{n-1} + \widehat{\theta}/2}\right)^{1/2}$$

A nouveau, l'encadrement de a_n/h_{n-1} est utile et fournit :

$$2\sqrt{13}\sqrt{1+2\sqrt{13}} > q_K = \frac{2\,a_n}{\widehat{\theta} h_{n-1}}\left(\frac{a_n/h_{n-1}+\widehat{\theta}/2}{a_n/h_{n-1}-\widehat{\theta}/2}\right)^{1/2} > \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{13}-1}}$$

- Le nombre d'éléments de chaque couche est constant et égal à :

$$N_i = \frac{2\pi}{\alpha} < \frac{2\pi}{\sin(\alpha)} = \frac{4\pi\, R_0}{H_0} < \frac{4\,\pi\, R\,\widetilde{\theta}}{h}$$

Comme θ^n est borné par $R_n/R_0 \leq 1/r_0$, H_n est borné par H_0/r_0. De plus, nous savons, dáprès la construction de ω_e que $H_0 = h_n \in]h/\theta_n; h[\subset]h/(2+\sqrt{2}); h[$. Ainsi, en appelant h_u le pas du maillage construit dans cette étape, nous obtenons que $h_u \in]H_0; H_n[\subset]h/(2+\sqrt{2}); h/r_0[$. Ceci permet de conclure que ce sous-maillage est quasi-uniforme, de pas proportionnel à h, et donc, le nombre d'éléments est en $\mathcal{O}(h^{-2})$, ce qui était souhaité.

Remarque **D.0.1** *Nous avons simplifié la construction en faisant une hypothèse liant h_0 et r_c. En fait ces deux quantités sont indépendantes.*
Dans la pratique, le cercle à partir duquel se construit ω_h peut être pris comme étant le plus grand cercle C_0 de rayon $r_0 < r_c$ qui soit réunion d'arcs consécutifs de longueur de corde égale à h_0.
La frontière des zones rigides (le cercle C) est alors contenue dans une ou deux couches d'éléments de ω_e On entend ici par «couche» la réunion des triangles qui maillent la couronne définie par deux cercles C_j et C_{j+1}.
On peut alors considérer que la réunion de ces $j^{ième}$ et (éventuellement) $(j+1)^{ième}$ couches constitue ω_h. Pour cela, il faut toutefois s'assurer que la valeur de j est bornée indépendamment de h_0 car le maillage de ω_h doit être quasi-uniforme par rapport à h_0.
Nous avons vérifié ce point précis par des calculs numériques pour plusieurs valeurs de r_c et de h (avec $h_0 = h^2$) et trouvons que $r_1 > r_c > r_0$.

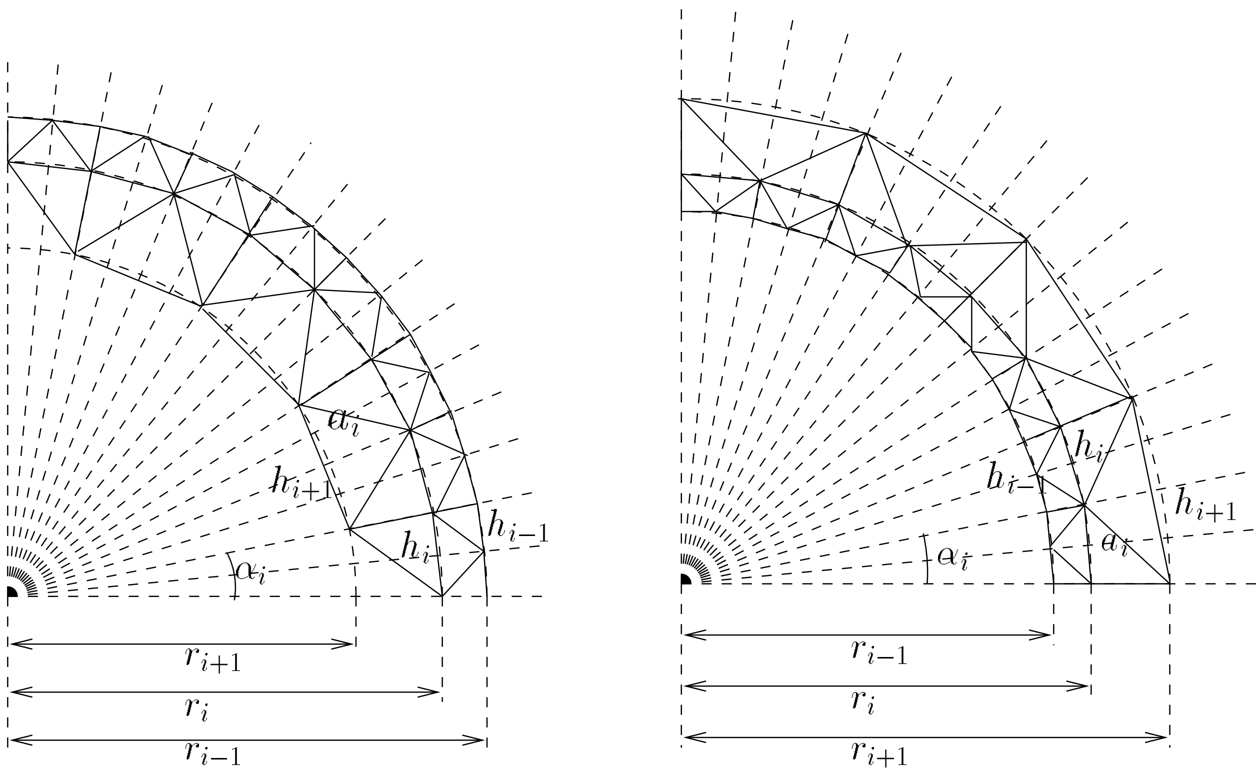


FIG. D.1 – *Construction des triangles constituant les deux sous-domaines ω_0 (à gauche) et ω_e (à droite) du domaine circulaire Ω.*

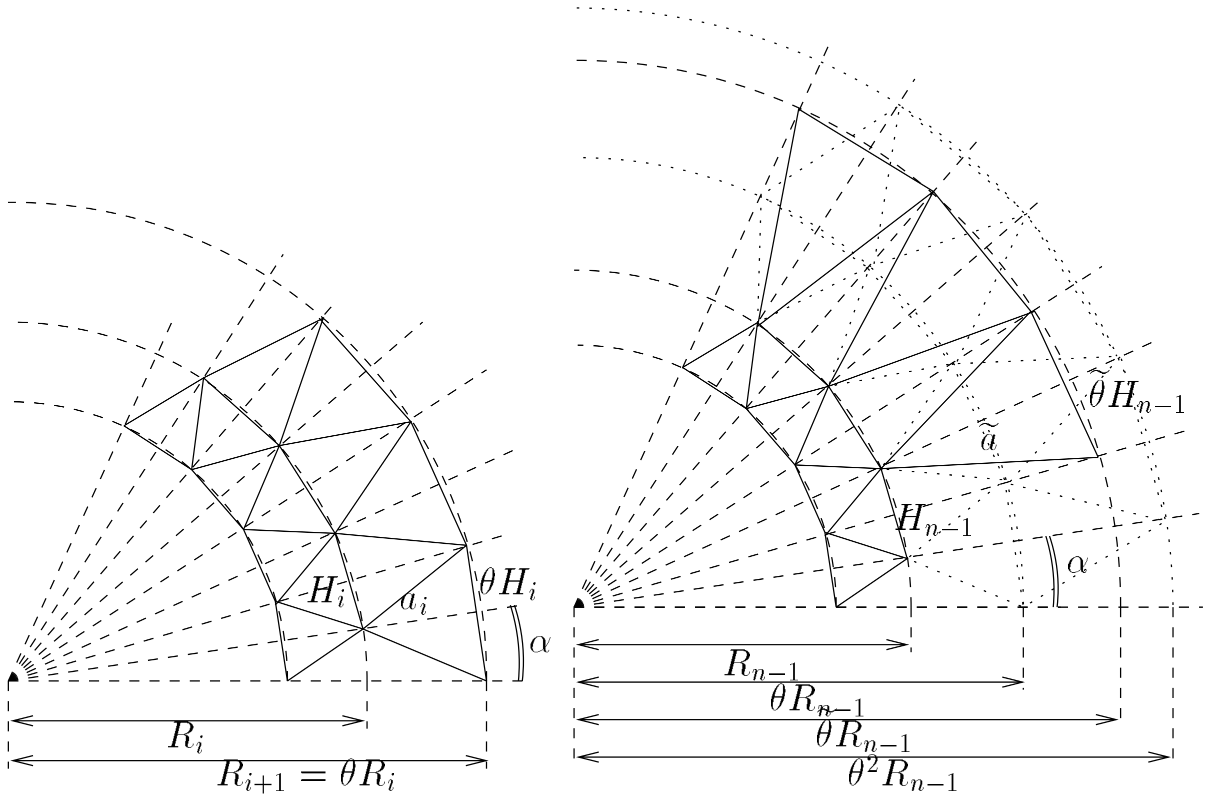


FIG. D.2 – *Maillage quasi-uniforme entre le sous-domaine ω_e et la frontière $\partial\Omega$ de Ω. A droite : construction de la dernière couche, au bord de Ω.*

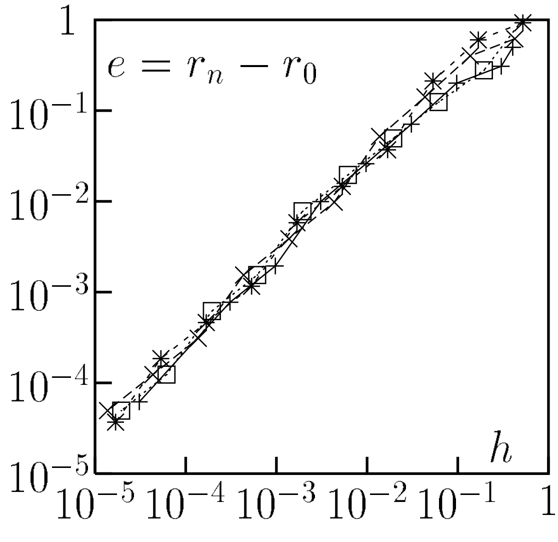


FIG. D.3 – *Épaisseur du domaine de transition ω_e en fonction du pas h du maillage $\mathcal{T}_h$ de Ω, avec le pas minimum $h_0 = h^2$ et pour les rayons $r_0 \in \{1/10; 2/10; 3/10; 4/10\}$ qui définissent la frontière du bouchon rigide.*