Introduction

Certains fluides ont la propriété de s'écouler comme des liquides, tout en opposant une résistance telle qu'ils ne semblent pas s'écouler du tout sous l'effet de petits efforts, d'amplitude finie, appliqués par des appareillages de mesure, par la pesanteur, ou bien encore par la capillarité. Ces matériaux sont désignés sous le nom de **fluides à seuil**. Le seuil de contrainte apparaît comme un effort à vaincre pour provoquer l'écoulement du matériau [DP87].

Ce seuil de contrainte est une propriété rhéologique qui caractérise de nombreux matériaux, rencontrés aussi bien dans des problèmes d'environnement (avalanches, coulées de boues, ...) que dans l'industrie (argile des tuiles et des briques, pâtes à biscuits, ...)

Nous nous intéressons ici à l'écoulement de tels fluides dans des conduites de section constante. Le cas d'une section circulaire a déjà fait l'objet de nombreuses études, tant expérimentales que numériques. En particulier, ces études ont fait apparaître une zone centrale où l'écoulement n'est pas cisaillé, appelée **zone d'écoulement bouchon**. Cependant, les écoulements dans des conduites de sections non circulaires sont encore très mal connus. Ainsi, bien que constatée expérimentalement, la présence de fluide au repos dans les angles d'une conduite cylindrique de section carrée a été peu étudiée. Ces zones de fluide non cisaillé sont appelées **zones mortes**, par opposition à la *zone bouchon* qui, elle, est en translation solide.

Le but de cette étude est de retrouver numériquement ces *zones mortes*. Pour ce faire, nous utilisons un algorithme mis au point par Nicolas Roquet [Roq97] qui s'applique au modèle physique que nous envisageons. La programmation utilise une bibliothèque de classes destinée aux calculs d'algèbre linéaire, développée par Nicolas Roquet et Pierre Saramito au sein du Laboratoire de Rhéologie [RS97]. De plus, afin d'affiner les résultats tout en conservant des temps de calculs raisonnables, nous avons utilisé un **mailleur adaptatif** [Hec97].

Une première série de calculs, menée pour le cas d'une section circulaire, permet de valider le modèle par rapport à la solution analytique et d'étudier l'influence de différents paramètres qui interviennent dans les algorithmes de résolution. La seconde série de calculs fournit des résultats sur l'existence et l'évolution des zones non cisaillées dans une conduite de section carrée. Ces résultats sont enfin confrontés à ceux obtenus expérimentalement par Sandrine Daugan au Laboratoire de Rhéologie [Dau97].

Table des matières

Chapitre 1

Mise en forme du problème numérique

Cette première partie présente les équations de base du problème et les simplifications retenues, puis ces équations sont mises sous forme adimensionnelle. Nous présentons ensuite un algorithme de résolution du problème, qui est mis sous forme matricielle.

1.1 Modélisation d'un écoulement de Bingham

Nous étudions un écoulement établi de fluide visco-plastique dans une conduite cylindrique de section Ω, sous l'effet d'une chute de pression. Introduisons un système d'axes orthonormés $Oxyz$ tel que les génératrices de la conduite soient parallèles à l'axe (Oz).

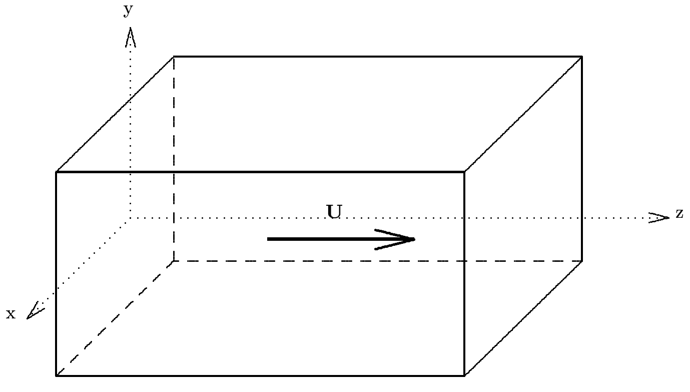


Figure 1.1: Ecoulement en conduite cylindrique

Un fluide de Bingham est un fluide rigide visco-plastique, c'est-à-dire un milieu continu particulier. Il obéit en tant que tel aux lois générales de la mécanique des milieux continus et à des lois de comportement particulières [DL72].

1.1.1 Equations de champ

- La **conservation de la masse** s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1.1}$$

Soit u la composante axiale de la vitesse : $\mathbf{u} = [0, 0, u]$. En considérant un fluide isochore, la conservation de la masse se réduit à $\partial u / \partial z = 0$, qui est automatiquement vérifié, l'écoulement étant supposé établi dans la section Ω.

- L'équation locale de **conservation de la quantité de mouvement** peut s'écrire :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{div}(\sigma_{\mathbf{tot}}) \tag{1.2}$$

où $\sigma_{tot} = -p\mathbf{I} + \sigma$ représente le tenseur des contraintes de Cauchy et p la pression.

Les hypothèses retenues pour notre modèle sont les suivantes :

Nous nous plaçons en régime permanent : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$

Nous considérons un mouvement lent, qui permet de négliger le terme d'inertie $(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$

La force de pression exercée est supposée constante : $\mathbf{div}(p\mathbf{I}) = \nabla p = [0, 0, -f]$, où f est la chute de pression linéique.

Sous ces hypothèses, l'équation (1.2) se réduit à l'expression suivante :

$$\mathbf{d}iv\ \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1.1.2 Conditions aux limites

Le fluide est supposé adhérer aux parois :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.4}$$

1.1.3 Loi de comportement

Nous avons adopté une loi de comportement de type Bingham, qui fait intervenir une contrainte seuil σ_0 [Bin22, DL72] :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ \frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{|\sigma| - \sigma_0}{|\sigma|}\right)\sigma & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.5}$$

où $|\sigma|$ est la norme matricielle : $|\sigma| = \sqrt{(\sigma : \sigma)/2}$
Nous constatons en particulier que, au-delà du seuil, la contrainte est proportionnelle à $\mathbf{D}(\mathbf{u})$.
Or dans le cas de l'écoulement établi dans la section Ω :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

De même, le tenseur des contraintes σ ne possède que deux composantes non nulles, qui seront notées σ_1 et σ_2 :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\sigma_1 = \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ et $\sigma_2 = \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

En particulier la norme de la contrainte s'écrit : $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
Et l'équation (1.3) se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = f \tag{1.6}$$

1.1.4 Adimensionnement

Soit L^* une longueur caractéristique de la section Ω (rayo du cercle i ou demi-côté du carré). Choisissons $U^* = (L^*)^2.f/\eta_0$ comme vitesse caractéristique et $\sigma^* = L^* f$ comme contrainte caractéristique. Le nombre de Bingham est alors défini par $Bi = \sigma_0/\sigma^*$, soit encore :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{L f}$$

Opérons le changement de variables et d'inconnues suivant :

$$\begin{aligned} x' &= x/L^* \\ y' &= y/L^* \\ \sigma' &= \sigma/\sigma^* \\ u' &= u/U^* \end{aligned}$$

Dans la suite, et lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, nous ommetrons les $'$ pour désigner les varaibles et grandeurs sans dimension. En particulier, nous obtenons de (1.4)-(1.6) le problème sans dimension :

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } \sigma_1,\ \sigma_2 \textit{ et } u \textit{ définis dans } \Omega \textit{ et vérifiant:} \\ \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 1 \text{ dans } \Omega \\ D(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < Bi \\ \frac{|\sigma| - Bi}{2|\sigma|}\sigma & \text{sinon} \end{cases} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.7}$$

1.2 Algorithme d'Uzawa

Afin de résoudre numériquement le problème (1.7), nous avons utilisé une méthode de lagrangien augmenté, l'algorithme d'Uzawa mis au point par Nicolas Roquet [Roq97]. Dans la suite, la notation := désigne un calcul explicite du membre de droite.

1.2.1 Initialisation $(n = 1)$

Nous nous donnons arbitrairement les grandeurs suivantes :

$$\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, u^{(0)}$$

1.2.2 Itération

Calcul de $\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}$

$$\beta_1^{(n)} := \sigma_1^{(n)} + \tfrac{r}{2}\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x}$$

$$\beta_2^{(n)} := \sigma_2^{(n)} + \tfrac{r}{2}\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial y}$$

$$\text{Puis, pour presque tout } x \,\epsilon\Omega : \left| \begin{array}{lll} \alpha(x) & := & \sqrt{(\beta_1^{(n)})^2 + (\beta_2^{(n)})^2} \\ \gamma_i^{(n)}(x) & := & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & & \text{si } \alpha < Bi \\ \frac{\alpha(x) - Bi}{\alpha(x)\,(1+r)}\,\beta_i^{(n)}(x) & i = 1,2 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Résolution de u

Nous notons g le terme défini par l'expression suivante :

$$g := \frac{1}{r}[1 - r(\frac{\partial \gamma_1^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2^{(n)}}{\partial y}) + (\frac{\partial \sigma_1^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2^{(n)}}{\partial y})]$$

Le système à résoudre pour obtenir u est alors :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u & = g & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Calcul de $\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}$

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(n+1)} &:= \sigma_1^{(n)} + r(\frac{1}{2}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \gamma_1^{(n)}) \\ \sigma_2^{(n+1)} &:= \sigma_2^{(n)} + r(\frac{1}{2}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} - \gamma_2^{(n)}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.2.3 Propriétés de convergence

Dans [Roq97], on montre que cet algorithme converge, les variables $\sigma^{(n)}$, $u^{(n)}$ et $\gamma^{(n)}$ convergent respectivement vers les grandeurs σ, u et $D(u)$. Le test d'arrêt retenu portera soit sur $\sigma^{(n)}$, soit sur $\gamma^{(n)}$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &|\frac{\sigma^{(n+1)} - \sigma^{(n)}}{\Delta t}| &< \ \varepsilon \quad \text{avec } \Delta t = r \\ &\text{ou} & \\ &|\gamma - D(u)| &< \ \varepsilon \end{aligned}$$

1.3 Discrétisation

Afin de pouvoir utiliser le programme pour différentes géométries du domaine Ω, nous avons retenu une méthode de résolution par éléments finis [?]. On partitionne alors Ω en sous-domaines et on cherche dans chacun d'eux les solutions approchées du problème. La solution approchée complète est constituée de la réunion de ces solutions élémentaires. Le principe général de la méthode consiste à écrire la formulation variationnelle du problème, puis à discrétiser en s'appuyant sur le découpage élémentaire du domaine.

1.3.1 Formule d'intégration de Green

Dans le repère (x_1, x_2), considèrons un domaine Ω délimité par son contour $\partial\Omega$, et notons n_{x_1}, n_{x_2} les composantes de la normale unitaire sortante à Ω sur $\partial\Omega$. Alors nous pouvons écrire [Pou88] :

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uvn_{x_i}\, ds \qquad i = 1, 2$$

1.3.2 Formulation variationnelle

Intégration des formules (1.8) et (1.10)

A partir de la relation

$$\beta_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)} + \frac{r}{2}\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x}$$

on multiplie par une fonction ξ de carré sommable et on intègre sur Ω :

$$\forall \xi \in L^2(\Omega) \qquad \int_\Omega \beta_1 \xi \, dx = \int_\Omega \sigma_1 \xi \, dx + \frac{r}{2}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\xi \, dx \tag{1.11}$$

La même démarche s'applique aux formules (1.10).

Intégration des formules (1.9)

La forme faible du problème étant celle posée en (1.9), on multiplie par v et on somme sur Ω :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega g v \, dx$$

En utilisant la relation de Green, nous pouvons écrire :

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

Les fonctions tests v étant choisies parmi un ensemble de fonctions nulles sur la frontière du domaine, le terme de bord de cette dernière relation est nul. La formulation variationnelle du problème est alors la suivante :

$$\textit{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ tels que} \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega g \, v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.12}$$

1.3.3 Approximations

Le domaine Ω est approché par un maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$, et nous cherchons une approximation de la solution par une fonction affine en x et y dans chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Une telle fonction est définie par ses valeurs aux sommets P_i du maillage.

Nous noterons NE le nombre d'éléments du maillage et NSI son nombre de sommets intérieurs, c'est-à-dire les sommets de $\mathcal{T}_h$ non situés sur $\partial\Omega$. V_h désignera l'ensemble des fonctions continues, linéaires par triangle et nulles sur les bords du domaine. Nous noterons (ϕ_i) les fonctions de V_h valant 1 au sommet P_i et nulles ailleurs. Ces fonctions forment une base de V_h :

$$\forall u_h \in V_h \qquad u_h = \sum_{i=1}^{NSI} u_{h,i}\phi_i$$

T_h désignera l'ensemble des fonctions constantes par triangle. Nous noterons $\xi_K = 1_K$ la fonction valant 1 en tout point du triangle K et nulle ailleurs. L'ensemble de ces fonctions constitue la base canonique de T_h.

Approximation de (1.11)

Approchons β par β_h et choisissons pour les fonctions-tests ξ_h les indicateurs $\xi_k = 1_k$. En notant $mes(K)$ l'aire du triangle K et $\beta_{1,K}$ la valeur de $\beta_{1,h}$ sur l'élément K, nous obtenons d'une part :

$$\int_\Omega \beta_{1,h}\xi_h\,dx = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_\Omega \beta_{1,h}\xi_K\,dx = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\beta_{1,K}\,mes(K)$$

Des relations semblables s'appliquent à β_2, σ_1 et σ_2.
Et d'autre part, en approchant u par u_h et en le décomposant sur la base (ϕ_i) :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial x}\xi_h\,dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{NSI} u_{h,i}\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\xi_h\,dx = \sum_{i=1}^{NSI} u_{h,i}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\xi_K\,dx = \sum_{i=1}^{NSI} u_{h,i}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\,dx$$

Des relations semblables décrivent l'approximation de σ_1 et σ_2.

Approximation de (1.12)

Le problème approché s'écrit :

$$\textit{Trouver } u_h \in V_h \textit{ tels que} \qquad \int_\Omega \nabla u_h.\nabla v_h\,dx = \int_\Omega g_h v_h\,dx \qquad \forall v_h \in V_h$$

Nous pouvons parcourir l'ensemble V_h à l'aide de la base (ϕ_i) :

$$\int_\Omega \nabla u_h.\nabla \phi_i\,dx = \int_\Omega g_h\phi_i\,dx \qquad \forall i \in \{1,..,NSI\}$$

- D'une part :

  $$\int_\Omega g_h\phi_i\,dx = \int_\Omega \frac{1}{r}f_h\phi_i\,dx - \int_\Omega (\frac{\partial\gamma_{1,h}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{2,h}}{\partial y})\phi_i\,dx + \frac{1}{r}\int_\Omega (\frac{\partial\sigma_{1,h}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{2,h}}{\partial y})\phi_i\,dx$$

  Or, par décomposition de f_h sur la base (ϕ_i) :

  $$\int_\Omega f_h\phi_i\,dx = \sum_{n=1}^{NSI} f_n(\int_\Omega \phi_n\phi_i\,dx)$$

  En utilisant la relation de Green et en remarquant que le terme de bord est nul car les ϕ_i sont nulles à la frontière, il vient:

  $$\int_\Omega \frac{\partial\gamma_{1,h}}{\partial x}\phi_i\,dx = -\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\gamma_{1,K}(\int_K \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\,dx)$$

  Des relations identiques sont obtenues pour les termes $\partial\gamma_{2,h}/\partial y$, $\partial\sigma_{1,h}/\partial x$ et $\partial\sigma_{2,h}/\partial y$.

- D'autre part, toujours en décomposant sur la base (ϕ_i) :

$$\int_\Omega \nabla u_h . \nabla \phi_i \, dx = \sum_{j=1}^{NSI} u_j \int_\Omega \nabla \phi_j . \nabla \phi_i \, dx$$

1.4 Forme Matricielle

La dernière phase consiste à écrire les résultats précédents sous forme matricielle. C'est en effet cette forme qui sera utilisée pour la programmation.

1.4.1 Notations

Les vecteurs utilisés précédemment seront assimilés à des matrices-colonne:

Σ_1, Σ_2, Γ_1, Γ_2: vecteurs de dimension NE.

U: vecteur des vitesses, de dimension NSI.

Par ailleurs, nous introduisons les matrices suivantes :

S: matrice diagonale des aires des éléments du maillage, de dimension (NE*NE).

M: matrice diagonale des volumes des cellules centrées sur les sommets, de dimension (NSI*NSI).

B_1, B_2: matrices des dérivés des vecteurs de base, de dimensions (NE*NSI). En identifiant un triangle K de $\mathcal{T}_h$ à l'indice $k \in \{1, .., NE\}$, les éléments de ces matrices sont par définition : $B_1(k,i) = \int_k \frac{\partial v_i}{\partial x} \, dx$ et $B_2(k,i) = \int_k \frac{\partial v_i}{\partial y} \, dx$

A: les éléments de cette matrice de dimensions (NSI*NSI) sont définis par : $A(i,j) = \int_\Omega \nabla v_j . \nabla v_i \, dx$

Ces matrices ne sont fonctions que des paramètres géométriques du maillage et peuvent donc être calculées dès le début du programme.

1.4.2 Algorithme matriciel

Nous pouvons maintenant résumer l'algorithme sous sa forme matricielle de la manière suivante :

Calcul de Γ_1, Γ_2

```
$\beta_1 := \Sigma_1 + \frac{r}{2}S^{-1}.B_1.U$
$\beta_2 := \Sigma_2 + \frac{r}{2}S^{-1}.B_2.U$
Pour i=1 à NE:
    $\alpha := \sqrt{(\beta_1(i))^2 + (\beta_2(i))^2}$
    si $\alpha < Bi$ alors $\Gamma_1(i) := \Gamma_2(i) := 0$
    sinon
        $\Psi := (1 - \frac{Bi}{\alpha})\frac{1}{2+r}$
        $\Gamma_1(i) := \beta_1(i)\Psi$
        $\Gamma_2(i) := \beta_2(i)\Psi$
```

Résolution de U

$$g := \frac{1}{r}M.f + B_1^t.\Gamma_1 + B_2^t.\Gamma_2 - \frac{1}{r}B_1^t.\Sigma_1 - \frac{1}{r}B_2^t.\Sigma_2$$

Le système à résoudre est alors :

$$A.U = g$$

La matrice A est symétrique, définie positive et à diagonale strictement dominante [LT93], ce qui autorise une résolution par une méthode directe (décomposition de Cholesky) ou par une méthode itérative (du type Gauss-Seidel).

Calcul de Σ_1, Σ_2

$$\Sigma_1 := \Sigma_1 - r\Gamma_1 + \frac{r}{2}S^{-1}.B_1.U$$

$$\Sigma_2 := \Sigma_2 - r\Gamma_2 + \frac{r}{2}S^{-1}.B_2.U$$

1.4.3 Calcul des coefficients des matrices A, B_1, B_2, S et M

Matrice S des aires des éléments

Pour chaque élément K, on note $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$ les sommets du triangle K. Alors

$$S(K) = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)]$$

Matrice M des aires des cellules

La valeur de $M(i,j) = \int_\Omega v_i.v_j \, dx$ dépend des positions respectives des sommets P_i et P_j.

- Si P_i et P_j n'ont pas d'arête commune, alors $v_i.v_j = 0$ et donc $M(i,j) = 0$.
- Si i=j, nous passons par une formule de quadrature pour approximer le résultat :

$$\begin{aligned}
M(i,j) &= \int_\Omega (v_i)^2\,dx = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_k (v_i)^2\,dx && (1.13)\\
&\approx \sum_{k\in\mathcal{T}_h} \frac{S(k)}{3} \sum_{P_r\in K} (v_i(P_r))^2 && (1.14)\\
&\approx \sum \frac{S(k)}{3} \quad \text{pour } k\in\mathcal{T}_h \text{ et } k\ni S_i && (1.15)\\
& && (1.16)
\end{aligned}$$

- Si les sommets P_i et P_j sont reliés par une arête, le calcul laisse apparaître le produit $v_i.v_j$ qui est nul en tout sommet; donc dans ce cas $M(i,j) = 0$

Matrices B_1 et B_2

Ces 2 matrices sont définies par : $B_1(k,i) = \int_k \frac{\partial v_i}{\partial x}\,dx$ et $B_2(k,i) = \int_k \frac{\partial v_i}{\partial y}\,dx$. Les fonctions de base $v_{i,k}$ sont obtenues par interpolations linéaires sur les facettes des triangles, de sorte que:

$$v_{i,k}(x,y) = a.x + b.y + c$$

$$v_{i,k}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) \text{ est un sommet différent du sommet } (x_i,y_i) \\ 1 \text{ si } (x,y) = (x_i,y_i) \end{cases}$$

L'assemblage des matrices se fera à partir des matrices élémentaires calculées sur chaque triangle :

$$B_1 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} B_{1,K}$$

Considérons alors les trois sommets $(1,2,3)$ du triangle K. Nous sommes ramenés au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients a et b ont alors pour expression (BB étant la matrice 3*3 précédente) :

$$a = \frac{y_2 - y_3}{\text{dét}\, BB} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{x_3 - x_2}{\text{dét}\, BB}$$

Or l'aire de ce triangle est donnée par : $S(k) = 2.detBB$; donc ce calcul donne les coefficients des 2 matrices-ligne 1*3 :

$$B_{1,K}(1) = \frac{y_2 - y_3}{2} \qquad \text{et} \qquad B_{2,K}(1) = \frac{x_3 - x_2}{2}$$

On obtient les valeurs aux 2 autres sommets par permutation circulaire.

Matrice A

La valeur de $A(I,J) = \int_\Omega \nabla\phi_I.\nabla\phi_J\,dx$ dépend des positions respectives des sommets S_I et S_J.

- Si P_I et P_J n'ont pas d'arête en commun, alors $\phi_I.\phi_J = 0$ et donc $A(I,J) = 0$.
- Si I=J, la relation s'écrit :

  $$A(I,J) = \int_\Omega |\nabla\phi_I|^2\,dx = \sum_{k\in\mathcal{T}_h} \int_k |\nabla\phi_I|^2\,dx$$

  Or $\nabla\phi_I$ est constant par élément et ne dépend que des coordonnées des sommets, d'où :

  $$A(I,J) = \sum_k S(k).(\nabla\phi_I)_K^2 \text{ pour } k \in \mathcal{T}_h \text{ et } K \ni P_I$$

- Si les sommets P_i et P_J sont reliés par une arête, nous obtenons par le même type de calcul :

  $$A(I,J) = \sum_k S(k).(\nabla\phi_I)_K.(\nabla\phi_J)_K \text{ sur les deux éléments adjacents au segment.}$$

En pratique, le remplissage de la matrice A se fera à l'aide de matrices élémentaires :

$$A = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} A_K$$

Pour un élément K donné, la matrice A_K est une matrice 3*3 dont les coefficients se calculent par la formule suivante (i, j sont ici des indices locaux) :

$$A_K(i,j) = \frac{1}{S(k)}[B_{1,K}(i) * B_{1,K}(j) + B_{2,K}(i) * B_{2,K}(j)]$$

De façon matricielle, ceci peut encore s'écrire :

$$A_K = \frac{1}{S(K)}(B_{1,K}^t B_{1,K} + B_{2,K}^t B_{2,K})$$

Chapitre 2

Validation sur le cas circulaire

Le programme développé précédemment permet la résolution du problème pour n'importe quelle géométrie de la section de la conduite cylindrique. Ainsi, bien que le but de l'étude concerne une section carrée, nous allons nous intéresser dans un premier temps au cas d'une section circulaire. En effet, celle-ci présente l'avantage d'être bien connue grâce à de nombreux travaux effectués sur ce sujet. En particulier, nous disposons dans ce cas de la solution analytique. Ceci nous permet donc de valider notre programme, et d'évaluer l'influences des paramètres qui le compose (valeur de r, finesse du maillage, ...)

2.1 Résultat analytique

Dans le cas d'un écoulement établi en conduite cylindrique de section circulaire, nous pouvons déterminer analytiquement la forme de la solution, et plus particulièrement l'évolution de la zone *bouchon* avec le nombre de Bingham. Nous suivons pour cela l'étude présentée par N.D. Kouamela [Kou91].

La symétrie de révolution qui apparaît dans ce cas permet de simplifier la loi de comportement du fluide en faisant intervenir des grandeurs qui ne dépendent que de la distance r à l'axe du cylindre. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{cases} \sigma - \sigma_s = K\,\dot{\gamma} & \text{si } \sigma > \sigma_s \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'une façon générale, un écoulement permanent et établi en conduite est solution de l'équation :

$$\frac{dp}{dz} = \eta \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)\right] + \frac{d\eta}{dr}\frac{du}{dr} = C^{ste} = -G$$

où u est la vitesse locale à la distance r de l'axe de la conduite et η la viscosité apparente.

Si σ_w est la contrainte à la paroi, on a $G = 2\sigma_w/R$ ou encore $\sigma_w = R\,\Delta P/2L$, R et L étant respectivement les rayon et longueur de la conduite. A une distance r de l'axe, la contrainte est $\sigma = r\,\Delta P/2L$. Le débit est donné par $dQ = 2\pi\,r\,u\,dr$. On pose $\gamma = -du/dr$.

$$Q = \int_0^R r^2 \left(-\frac{du}{dr}\right) dr$$

En faisant le changement de variable r en σ, on obtient :

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\sigma_w^3} \int_0^{\sigma_w} \sigma^2\, f(\sigma)\, d\sigma$$

Connaissant l'expression formelle de la fonction $f(\sigma)$, on obtient, après intégration, une relation entre Q et σ_w, c'est-à-dire une relation entre la perte de pression motrice et le débit volumique.

Pour un fluide de Bingham, en posant $a = \sigma_s/\sigma_w$, on obtient :

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{(1-a)^2}{2}\frac{\sigma_s}{K}\omega \quad \text{avec} \quad \omega = 1 - 2\left[\frac{(1-a)^2}{4} + \frac{a(1-a)}{3}\right]$$

La vitesse locale, dans le sens de l'écoulement, vaut à la distance r de l'axe de la conduite, pour $\sigma > \sigma_s$:

$$u(r) = \frac{R\,\sigma_w}{2K}(1-a)^2\left[1 - \left(\frac{\frac{r}{R} - a}{1-a}\right)^2\right]$$

Au voisinage de l'axe de la conduite, lorsque σ est inférieur ou égale à σ_s, le fluide n'est plus cisaillé ($du/dr = 0$) et se déplace en bloc, en écoulement *bouchon*. Le rayon r_0 du *bouchon* ainsi formé est fourni par la relation : $\sigma_s/\sigma_w = r_0/R = a$ et sa vitesse, qui est en fait la vitesse maximale, est :

$$u_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_w}{K}(1-a)^2$$

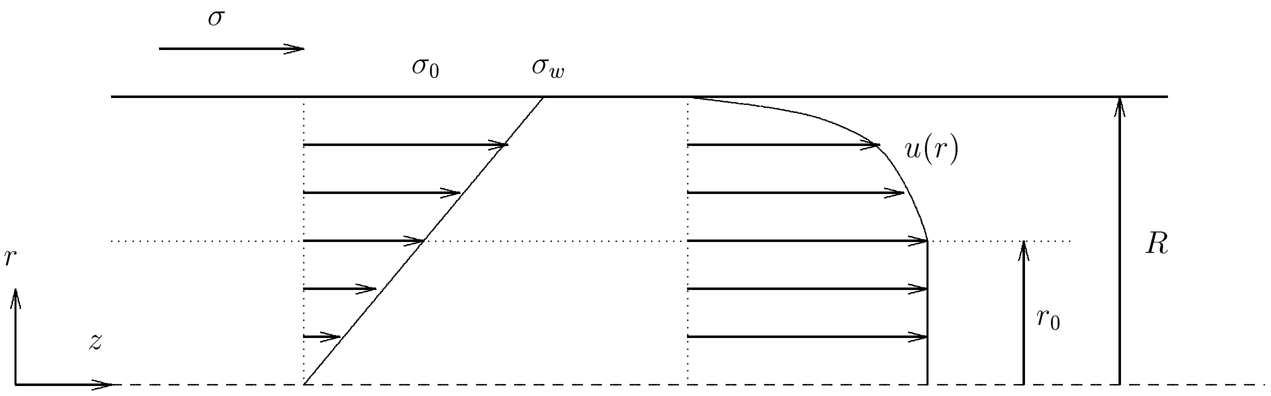
La forme adimensionnelle de ces résultats est alors la suivante :

$$u(r) = \frac{1}{2}(1-Bi)^2\left[1 - \left(\frac{r - Bi}{1-Bi}\right)^2\right]$$

en reprenant les notations introduites au chapître 1.

2.2 Influence des différents paramètres

La résolution du problème par la méthode numérique retenue laisse apparaître trois variables dont les valeurs influent sur le comportement de l'algorithme. D'une part, le nombre adimensionnel de Bingham Bi est le seul paramètre physique que nous pouvons faire varier. Mais il joue aussi un rôle numérique, car la difficulté de résolution du problème croît



avec la non-linéarité. D'autre part, la discrétisation utilisée engendre des imprécisions proportionnelles à la taille des éléments du maillage. Enfin, l'algorithme d'Uzawa utilisé pour résoudre le problème introduit un paramètre, r, dont la valeur joue un rôle pour la vitesse de convergence de l'algorithme.

2.2.1 Recherche du paramètre d'augmentation optimal

Nous avons observé que le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence varie de manière significative selon la valeur de r. Afin d'étudier le comportement de l'algorithme itératif, nous avons représenté deux types de courbes.

- Sur la figure 2.1, nous observons l'évolution du résidu

  $$r^i = \frac{\left(|\sigma_1^{i+1} - \sigma_1^i| + |\sigma_2^{i+1} - \sigma_2^i|\right)}{r^0}$$

  au cours des itérations, pour un maillage et un nombre de Bingham fixés. Nous remarquons que l'algorithme converge beaucoup plus vite pour une valeur particulière de r (située à environ $r = 20$ dans le cas de la figure). Pour les r plus petits ou plus grands, la vitesse de convergence est plus faible. Cette vitesse correspond à la pente asymptotique en valeur absolue de cette courbe.

- Cette vitesse asymptotique de convergence est représentée en fonction de r sur les figures 2.2 et 2.3. Ces courbes montrent que la valeur optimale de r dépend à la fois de h et de Bi ; dans le cas du maillage constant, elle semble se situer sur la courbe des vitesses de convergence en fonction de r pour $Bi = 0$; dans les deux cas, après un pic où la valeur est optimale, les courbes des vitesses de convergence en fonction de r font apparaître une asymptote indépendante de Bi ou de h.

Bien entendu, nous avons intérêt à utiliser, lors de nos résolutions, la valeur de r qui autorise la plus grande vitesse de convergence.

2.2.2 Ecarts à la solution analytique

Puisque nous connaissons la solution analytique de la vitesse d'après la théorie exposée précédemment, nous pouvons définir un écart á la solution analytique par $e = |u_{ex} - u_n|$, où u_n est le champ de vitesse résultant de la n-ième itération du calcul.

Influence du paramètre r

La figure 2.4 montre que, tous paramètres égaux par ailleurs, nous obtenons à la limite une précision indépendante de la valeur de r. Cette valeur influe uniquement sur le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de cette précision.

Influence de la finesse du maillage

La taille des éléments utilisés lors de la discrétisation du problème joue bien entendu un rôle important quant à la qualité de la solution obtenue. Ceci est mis en évidence sur la figure 2.5, où nous constatons que l'écart à la solution analytique décroît quand la finesse du maillage augmente (*NB : par construction, la finesse est liée à la taille des arêtes frontière*).

Conclusion sur la validité de l'algorithme

Avec un maillage de 3000 éléments ($h = 1/20$), nous obtenons une précision de l'ordre de 10^{-4}. Cette bonne correspondance entre le modèle théorique et nos résultats dans le cas de la section circulaire permet de valider le modèle et nous autorise à l'utiliser pour des cas plus complexes, tels que celui de la section carrée. Nous devons cependant remarquer que cette comparaison à la théorie ne nous a pas permis de valider l'efficacité de la méthode quant à la détection des zones mortes, puisque le cas circulaire ne fait intervenir qu'une zone bouchon centrale.

Avant de passer à l'application de l'algorithme pour la résolution d'écoulements en conduite de section non circulaire, nous allons présenter une méthode d'adaptation de maillages, qui, conjuguée à l'algorithme précédent, permettra d'améliorer la précision des solutions obtenues.

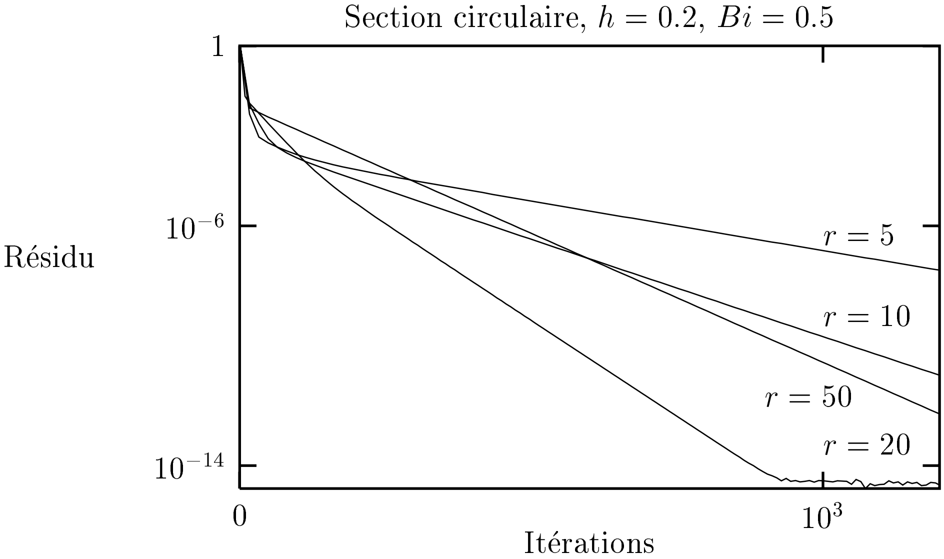


Figure 2.1: Evolution du résidu au cours des itérations

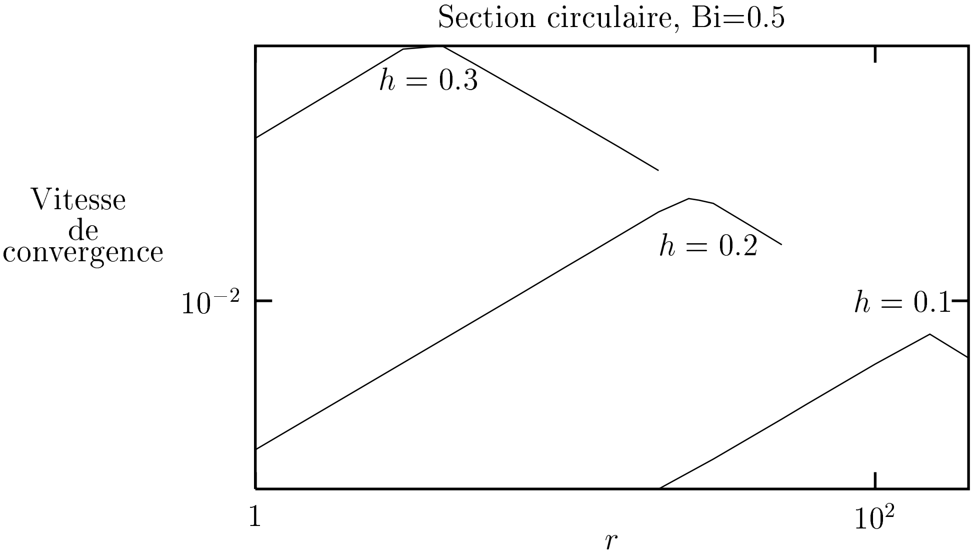


Figure 2.2: Evolution des vitesses de convergence avec r

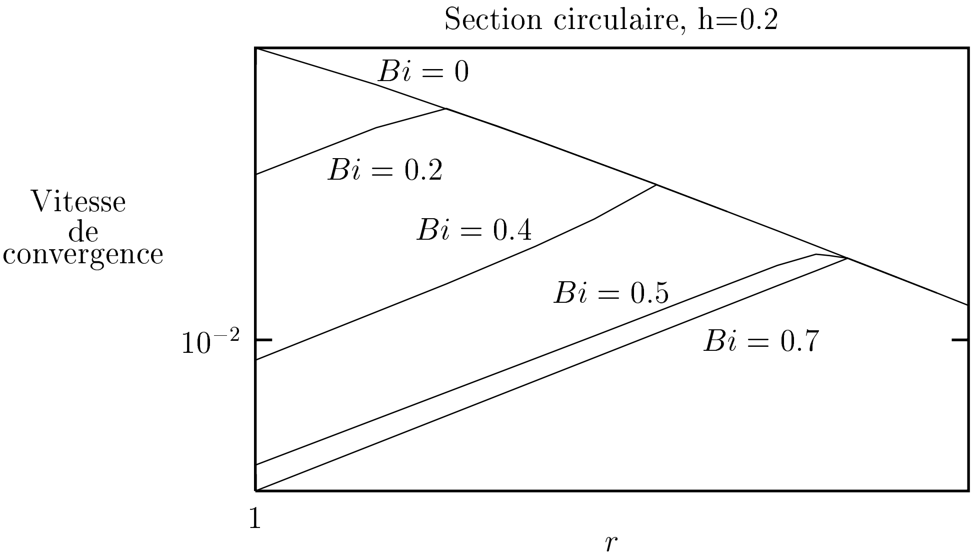


Figure 2.3: Evolution des vitesses de convergence avec r

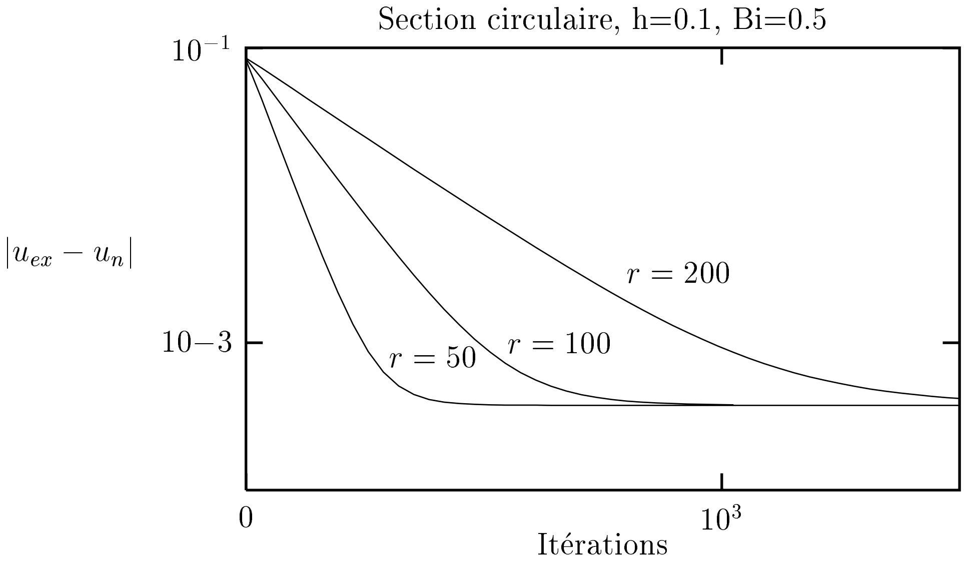


Figure 2.4: Evolution de l'écart à la solution analytique au cours des itérations

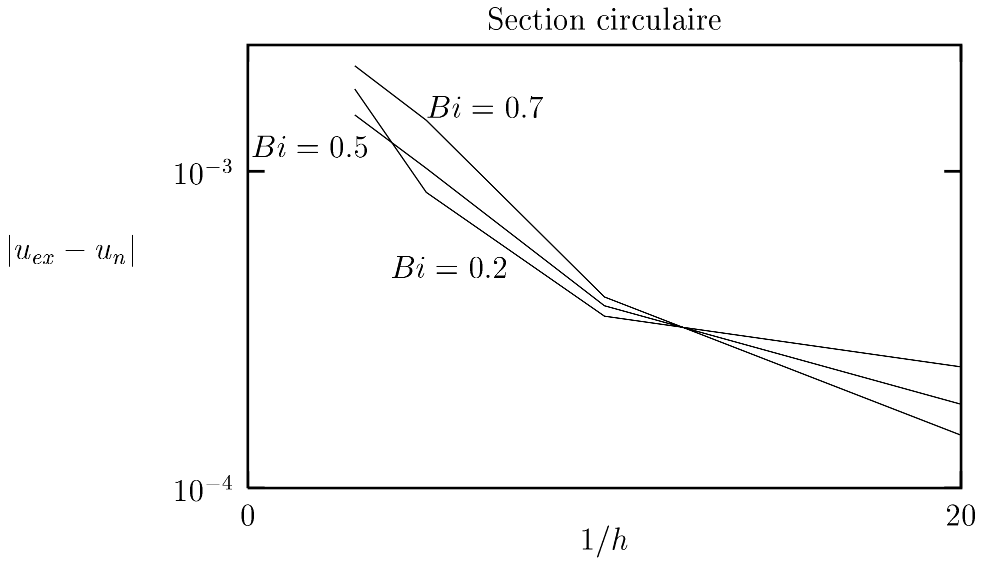


Figure 2.5: Evolution de l'écart à la solution analytique avec la finesse du maillage

Chapitre 3

Utilisation d'un mailleur adaptatif

La résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis nécessite dans un premier temps de mailler le domaine de calcul Ω. Or la précision de la solution obtenue au terme du calcul dépend étroitement du maillage utilisé pour la discrétisation du problème. C'est pourquoi on a recours à des techniques d'**adaptation de maillages** : au regard d'un premier calcul sur un maillage initial $\mathcal{T}_0$, soit on modifie ce maillage par des techniques de raffinement local ou de déplacement de points, soit on génère un nouveau maillage $\mathcal{T}_1$ mieux adapté au calcul effectué.

Dans l'une et l'autre de ces approches, le calcul initial sert classiquement à déterminer une taille locale *optimale* pour les éléments. Le maillage obtenu est alors isotrope (aucune direction n'est privilégiée). Cependant, il est possible de tirer du même maillage initial une information *directionnelle* afin de générer des éléments étirés dans une direction. Cette information est alors utilisée soit pour raffiner le maillage initial en privilégiant certaines directions, soit pour regénérer un **maillage anisotrope**. Cette approche est d'autant plus intéressante que l'on cherche à capter des phénomènes fins, comme par exemple, en dynamique des fluides, des couches limites, des chocs ou, dans notre cas, les limites des zones cisaillées.

Nous avons choisis de regénérer un maillage de Ω. Le générateur de maillages utilise un algorithme de type *Delaunay-Voronoi*, qui permet d'obtenir des maillages isotropes constitués de triangles proches de l'équilatéralité. Afin de construire des éléments étirés, on applique l'algorithme dans un espace déformé. La norme euclidienne y est remplacée par une *norme variant localement.* Ainsi, on détermine une métrique Riemannienne dans laquelle le maillage à construire est isotrope. Cette métrique est déterminée par un *calcul d'erreur a posteriori.* Différents estimateurs d'erreur peuvent être employés ; il s'agit de trouver un critère pour marquer les éléments qui doivent être raffinés. Le maillage adapté est construit dans une métrique qui répartit au mieux l'erreur directionnelle évaluée en chaque sommet.

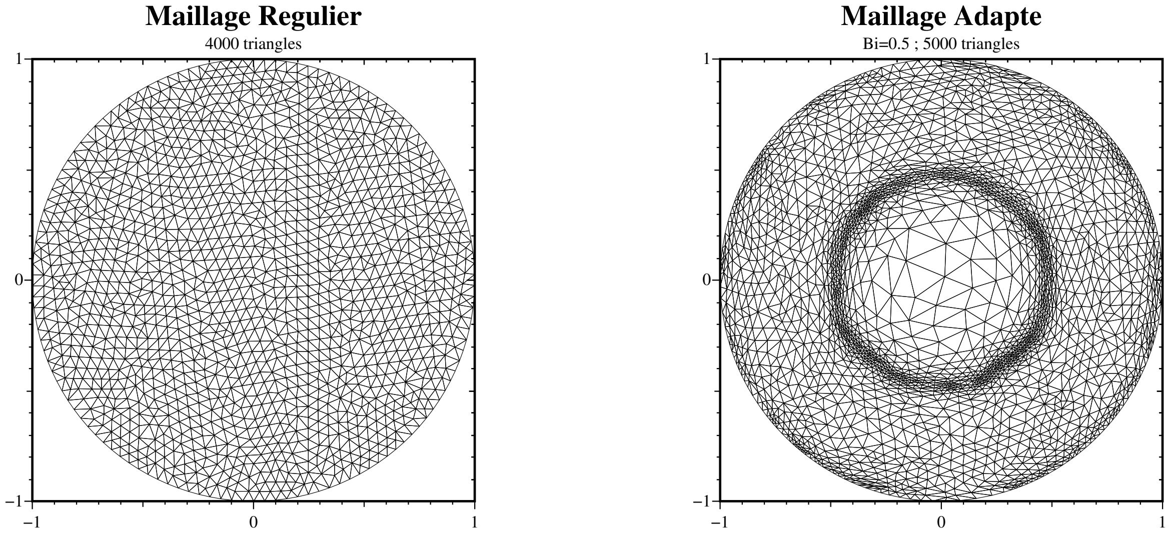


Figure 3.1: Maillages régulier et adapté d'un cercle

3.1 Génération de maillages

Les méthodes de génération de maillage 2D triangulaires et non structurés ne privilégient a priori aucune direction. Les algorithmes classiques d'avance de front ou ceux de type Delaunay-Voronoi créent des éléments d'angles proches de $\pi/3$, de façon à contrôler l'aplatissement des triangles. Nous présentons tout d'abord un tel générateur de maillages isotropes. Si l'on souhaite obtenir des maillages allongés, ces mailleurs doivent être modifiés ; nous retiendrons la méthode dans laquelle l'étirement des triangles est contrôlé par l'introduction d'une métrique locale. Le maillage est généré par un algorithme de type Delaunay, appliqué dans l'espace muni de cette métrique.

3.1.1 Un mailleur de type Delaunay isotrope

De manière usuelle, les méthodes de maillage de type Delaunay construisent le maillage du domaine étudié à partir de la seule connaissance de son contour et plus spécialement d'une discrétisation de ce dernier. Le maillage d'un domaine (fermé) de $\mathbb{R}^2$ est donc basé uniquement sur des connaissances à caractère géométrique (la discrétisation de la frontière), indépendamment du problème que l'on veut résoudre. La taille tout comme la densité des éléments du maillage obtenu sont liées localement à la discrétisation de la frontière. A priori, cette donnée est la seule qui puisse raisonnablement gouverner le maillage du domaine. On se propose de rappeler le schéma classique d'un tel mailleur partant de la donnée de l'ensemble des arêtes composant la discrétisation de la frontière du domaine.

Un algorithme de construction d'une triangulation de Delaunay est celui proposé par Lawson [?]. C'est un processus itératif d'insertion des points qui modifie localement le maillage pour conserver la propriété de la triangulation (*aucun sommet n'est à l'intérieur du cercle circonscrit à un élément*). Il peut s'écrire de la façon suivante :

A1) Initialisation.
T^3 est la triangulation de sommets s_1, s_2 et s_3 (un seul élément).

A2) Insertion des sommets.
T^k étant la triangulation de Delaunay de sommets $\{s_i, \; i = 1..k\}$, on y ajoute le sommet s_{k+1}. Si ce sommet est contenu dans un élément de T^k, cet élément est divisé en trois triangles ayant s_{k+1} comme sommet. Sinon, le nouveau sommet est extérieur au domaine de T^k, et on le relie à toutes les arêtes qui lui sont visibles. Dans les deux cas, les arêtes opposées au sommet s_{k+1} dans un élément forment la liste $A = \{a_1, \, a_2, ...\}$.

A3) Retournement d'arêtes.
Tant que $A \neq \emptyset$, on considère une arête $a_j \epsilon A$. On note t_{j1} et t_{j2} les éléments adjacents à a_j et q_j le minimum des angles de t_{j1} et t_{j2}. Si le quadrilatère $t_{j1} \cup t_j 2$ est convexe, son autre diagonale le divise en deux triangles t'_{j1} et t'_{j2}. Le minimum des angles de t'_{j1} et de t'_{j2} est noté q'_j. Si $q_j > q'_j$ alors a_j est rayé de la liste A et on passe à l'arête suivante. Sinon, les éléments t_{j1} et t_{j2} de la triangulation T^k sont remplacés par t'_{j1} et t'_{j2} et les quatre côtés du quadrilatère sont ajoutés à la liste des arêtes.

A4) Itération.
La triangulation T^{k+1} obtenue est de Delaunay pour l'ensemble de points $(s_1, \, ..., \, s_{k+1})$. Si $k + 1 = n_s$, c'est la triangulation recherchée. Sinon, il reste des sommets à inclure : faire $k := k + 1$ et aller en A2.

La triangulation de Delaunay apparaît comme la plus équiangulaire dans le sens qu'elle maximise le minimum des six angles intérieurs à chaque paire de triangles adjacents. L'algorithme de Lawson peut être utilisé tel quel dans les cas où le domaine à mailler est convexe et tous les sommets du maillage sont donnés. Si le domaine est non convexe, on commence par mailler l'enveloppe convexe avec l'algorithme précédent, puis on en déduit un maillage du domaine. Il est à noter qu l'existence d'un maillege de Delaunay n'est plus assurée dans ce cas.

Nous utilisons cet algorithme pour mailler un domaine quelconque $\Omega_h \in \mathbb{R}^2$. Les données sont la frontière, la longueur l_0 des arêtes frontière, l'aire maximale A_0 des éléments générés, et éventuellement des paramètres de régularisation.

B1) Discrétisation de la frontière.
On découpe la frontière en segments de longueur l_0. Les points de discrétisation constituent l'ensemble S. L'ensemble des arêtes frontière est mémorisé pour l'étape B3.

B2) Triangulation initiale joignant les points frontière.
On construit le maillage de Delaunay associé à S en utilisant l'algorithme A1-A4. Un premier maillage du domaine, ayant pour sommets les sommets frontière, est ainsi construit.

B3) Respect de la frontière.
Dans le cas d'un domaine non convexe, on force les arêtes frontière même si elles ne maximisent pas le critère d'optimisation q_j, et on supprime les triangles extérieurs au domaine. A partir de cette étape, le maillage en cours de construction est un recouvrement de Ω_h.

B4) Génération des points intérieurs.
La méthode la plus simple consiste à parcourir les éléments du maillage et à générer un point au centre de ceux dont l'aire dépasse la valeur A_0. Chaque point généré est inséré dans le maillage de la même façon que les points frontière précédement.

B5) Régularisation.
Cette étape falcutative permet de mieux positionner les points intérieurs. Chaque point est déplacé au centre de gravité de ses voisins. On parcourt l'ensemble des sommets plusieurs fois jusqu'à ce que le déplacement maximum soit suffisament petit. Ceci ne change pas la structure des mailles mais seulement les coordonnées des sommets. Le caractère *de Delaunay* est perdu, mais le maillage est plus régulier.

3.1.2 Prise en compte de l'anisotropie

Afin de construire des maillages étirés, on considère une déformation du plan suffisament régulière. Le maillage étiré $\mathcal{T}$ est construit de manière à être isotrope dans l'espace ainsi déformé. On suppose que la déformation est localement assimilable à une application linéaire de la forme :

$$u \mapsto \mathcal{N}\, u, \quad \forall u \epsilon \mathrm{I\!R}^2$$

$$\text{où} \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}, \quad \delta_1, \delta_2 > 0$$

Sur une portion du plan, la déformation de l'espace correspond au passage de la métrique euclidienne à la métrique définie par la norme M :

$$\|u\|_M^2 = u^t\, \mathcal{N}^t\, \mathcal{N}\, u$$

Une triangulation isotrope pour cette norme est étirée pour la norme euclidienne d'un facteur $1/\delta_1$ dans la direction d'angle α et d'un facteur $1/\delta_2$ dans la direction orthogonale.

On suppose connaître en tout point du domaine la matrice $\mathcal{N}$ de la déformation du plan. L'algorithme de génération de maillage B1-B5 est appliqué dans l'espace déformé. La métrique est prise en compte aux étapes suivantes :

- A l'étape B1.
  La frontière est discrétisée en segments de longueur l_0 pour la norme locale M.
- Aux étapes B2 et B4.
  Le critère géométrique q_j est mesuré sur le triangle t_j déformé par $\mathcal{N}$. t_j est donné par les coordonnées de ses trois sommets. Les longueurs des côtés a_j, b_j, c_j sont évaluées dans la métrique locale M.
- A l'étape B4.
  L'aire des triangles est évaluée dans la nouvelle métrique. C'est l'aire euclidienne multipliée par le jacobien de la déformation.

  $$\begin{aligned} aire_M(t_j) &= aire(t_j)\, det(\mathcal{N}) \\ &= \delta_1\, \delta_2\, aire(t_j) \end{aligned}$$

  Ainsi la densité des points varie en fonction du déterminant de $\mathcal{N}$ sur le domaine.

L'algorithme B1-B5 ainsi modifié génère un maillage dont la densité des points et l'étirement des éléments varient dans l'espace. La déformation du plan, donnée localement par la matrice $\mathcal{N}$ permet de contrôler l'un et l'autre.

3.2 Utilisation d'un mailleur adaptatif

Pour notre étude, nous avons utilisé le générateur de maillages anisotropes développé à l'INRIA de Roquencourt par Frédéric Hecht : le logiciel BAMG [Hec97]. Celui-ci est conçu selon le modèle résumé au 3.1. Par ailleurs, il autorise de gouverner la construction d'un maillage adapté à partir de la simple donnée d'une solution sur un maillage précédant. Ceci rend transparente l'étape de calcul de la métrique.

3.2.1 Boucle d'adaptation

Comme expliqué précédemment, l'adaptation du maillage est un processus itératif, qui comprend les trois étapes suivantes :

1. **Résolution du problème.**
   Partant d'un maillage $\mathcal{T}_i$, on résoud le problème considéré grâce à l'algorithme du lagrangien augmenté. Ceci nous fournit une solution vitesse-contraintes qui s'appuie sur ce maillage.

2. **Calcul du champ-clef.**
   A partir de la solution précédente, on forme un champ qui met en valeur les zones intéressantes de l'écoulement.

3. **Regénération d'un maillage.**
   On utilise enfin le champ-clef pour gouverner la création d'un nouveau maillage.

3.2.2 Choix de la solution servant à définir la métrique

L'intérêt de l'étude est de délimiter les zones d'écoulement cisaillé. Pour cette raison, nous avons cherché à imposer les critères suivants lors des regénérations de maillages :

- **Finesse du maillage dans les zones cisaillées.**
  La faible épaisseur des zones cisaillées dans le cas des grands nombres de Bingham exige un resserrement important au niveau de ces zones, afin de bien saisir leur comportement. Ceci est valable aussi bien entre les zones bouchon et mortes qu'entre le bouchon et la paroi.

- **Elargissement du maillage dans les zones non cisaillées.**
  Que ce soit dans la zone bouchon centrale ou dans les zones mortes angulaires, les variations de vitesses sont nulles. Par conséquent, il n'est pas utile de disposer d'un grand nombre d'éléments dans ces régions.

- **Resserrement du maillage autour des zones non cisaillées.**
  Afin d'obtenir des résultats quantitatifs précis sur les tailles des zones bouchons et des zones mortes, il est nécessaire d'avoir des triangles fins à ces endroits ; puisque nous disposons d'un mailleur anisotrope, il est de plus intéressant d'obtenir des éléments allongés qui s'appuient sur ces contours.

Pour aboutir à un champ-clef comportant ces caractéristiques, nous avons considéré deux grandeurs. D'une part, pour mettre en évidence les zones cisaillées, nous avons utilisé la fonction de dissipation :

$$E = \sigma : D$$

D'autre part, pour accentuer les contours des zones non cisaillées, nous avons utitilisé la fonction-test suivante :

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } \phi = |\sigma| - Bi$$

Le champ-clef retenu est une combinaison linéaire de ces deux fonctions. En adimensionnant E par sa valeur maximale, nous avons obtenu des résultats intéressant en retenant un coefficient α compris entre 0.1 et 1 :

$$E + \alpha\psi$$

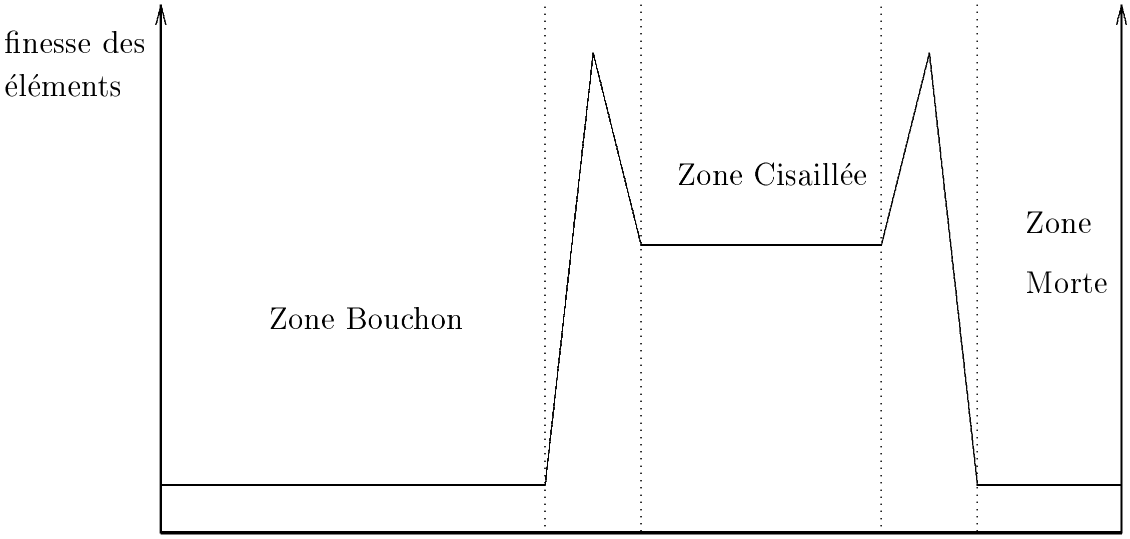


Figure 3.2: Redimensionnement des éléments

Chapitre 4

Aplication au cas d'une section carrée

Les méthodes exposées précédemment (algorithme d'Uzawa et génération de maillages auto-adaptatifs) ont été utilisées pour résoudre l'écoulement de fluide visco-plastique répondant à une loi de type Bingham au travers d'une conduite de section carrée. Le but de cette étude était de caractériser l'existence des zones mortes et d'en déduire leur évolution. Les résultats obtenus ont ensuite pu être comparés à ceux obtenus expérimentalement.

4.1 Mise en évidence des zones non cisaillées

Partant d'un maillage grossier régulier, nous procédons à une série de boucles de résolution-adaptation. Pour des raisons de temps de calcul, l'arrêt de cette boucle était fixé arbitrairement au vue des résultats qualitatifs obtenus. En effet, nous atteignons rapidement (en 3 ou 4 itérations) un grand nombre d'éléments aux limites des zones non cisaillées.

Le mailleur semble se comporter correctement : nous obtenons un raffinement des triangles dans les zones frontières (limites de zones mortes et de zone bouchon), un élargissement du maillage dans les zones non cisaillées, ainsi qu'un resserrement le long des parois (zone de fort cisaillement).

Les figures 4.2 représentent les isovitesses dans une section, pour des nombres de Bingham croissants. Partant d'un profil de type Poiseuille ($Bi = 0$), nous observons l'apparition et la propagation de la zone centrale d'écoulement bouchon et des zones mortes angulaires.

4.2 Précision obtenue sur la limite des zones mortes

Nous disposions a priori de deux méthodes pour définir les limites des zones mortes. La plus naturelle consiste à rechercher les zones où le gradient de vitesses s'annule. L'inconvénient de cette méthode est lié à l'appréciation de la valeur nulle : à partir de quelle valeur peut-on considérer que le zéro est atteint ? 10^{-15}, qui correspond à la précision de la machine, ou 10^{-7}, qui correspond à la précision obtenue sur les résidus ? Un autre critère permet de contourner ce problème : si nous étudions les valeurs de $|\sigma| - Bi$, nous voyons qu'elles changent de signe précisement à la limite des zones cisaillées. Le test consiste alors à connaître le signe de cette quantité. Ceci est d'autant plus facile à obtenir que $|\sigma|$ prend des valeurs assez différentes de Bi, aussi bien par excès que par défaut. C'est pourquoi nous avons retenu ce critère dans nos calculs. Il a en particulier servi pour gouverner le mailleur lors de ses auto-adaptations successives.

Malheureusement, nous nous sommes aperçu en obtenant les résultats que la zone où la quantité $|\sigma| - Bi$ s'annule correspond à un plateau de valeurs proches de 0 (cf. figure 4.1).

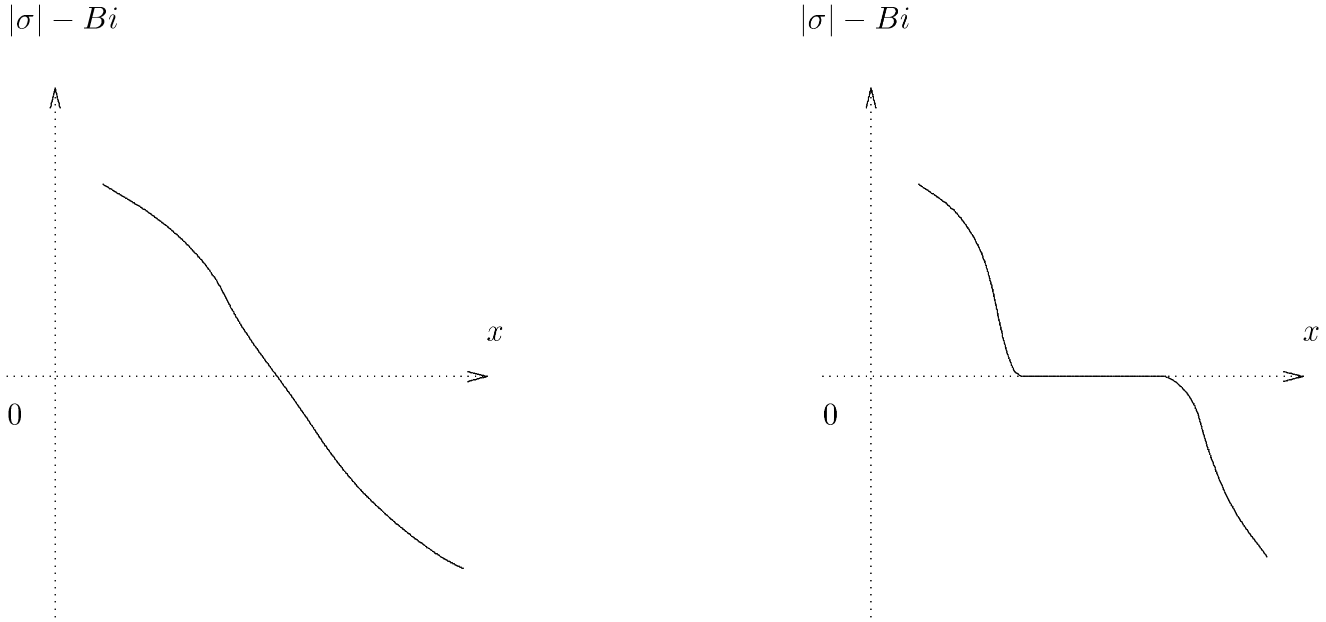
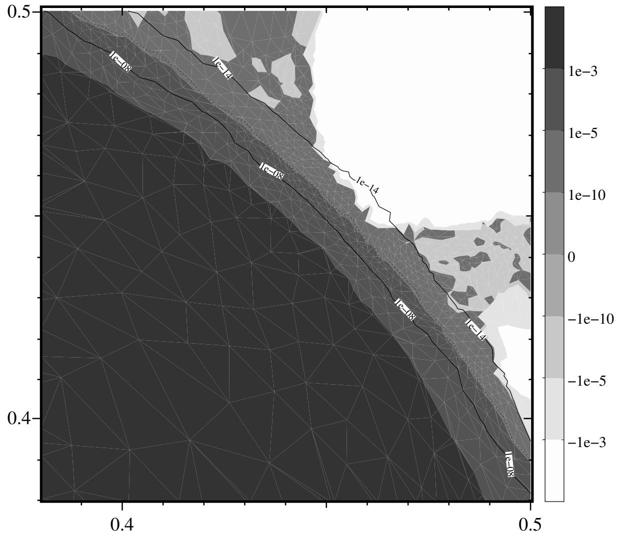


Figure 4.1: Comportement de $|\sigma| - Bi$ en zéro

En fait, ce plateau délimite une zone cisaillée convexe et tangente au parois d'une zone morte concave. Le comportement entre ces deux zones reste indéterminé à la précision obtenue. Cependant, nous pouvons comparer avec les résultats fournis par le premier critère, portant sur l'annulation du gradient de vitesse. Sur les figures 4.3, nous avons superposé les limites des zones cisaillées données par les deux méthodes. Nous observons que les limites indiquées pour les zones d'écoulement bouchon sont identiques. Par contre, en ce qui concerne les zones mortes des angles, nous observons le problème de définition occasionné par la condition sur les contraintes. Nous présentons, figure 4.2, un agrandissement d'une telle région.

Cette comparaison fait apparaître une correspondance entre les limites convexes obtenues par les deux méthodes, alors que la zone non cisaillée donnée par le critère portant sur $|\sigma| - Bi$ n'est pas définie simplement. Nous verrons de plus que les formes obtenues expérimentalement correspondent aux frontières convexes. Il semble alors pertinent, au vue



de ces résultats, de retenir comme limite de zone morte une courbe convexe comprise entre les isovaleurs 10^{-8} et 10^{-14}.

4.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux

4.3.1 Correspondance Bingham-Débit

4.3.2 Comparaison des profils de vitesse

Figure 4.2: Isovitesses dans les sections

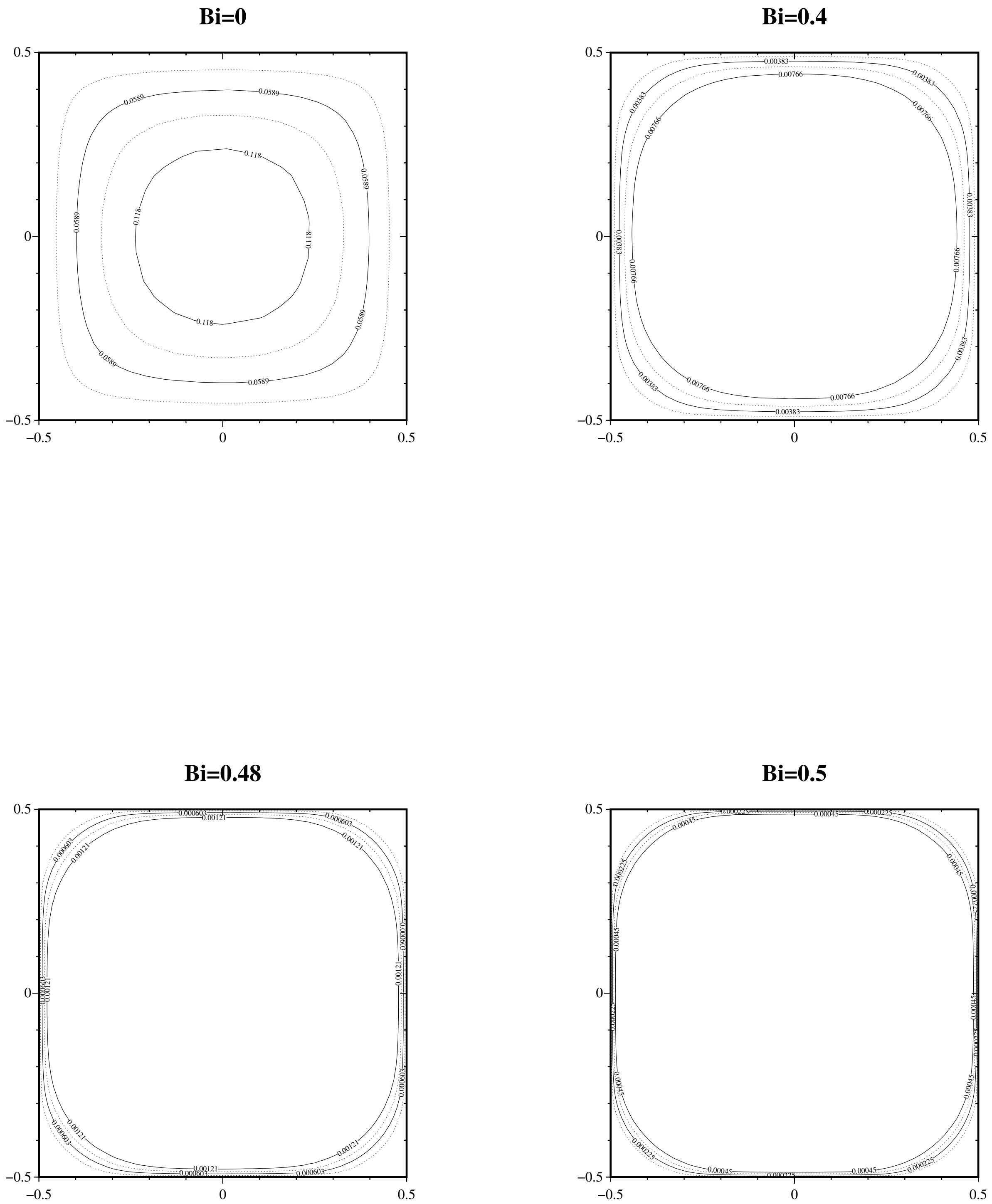


Figure 4.3: Limites de zones cisaillées données par les deux méthodes

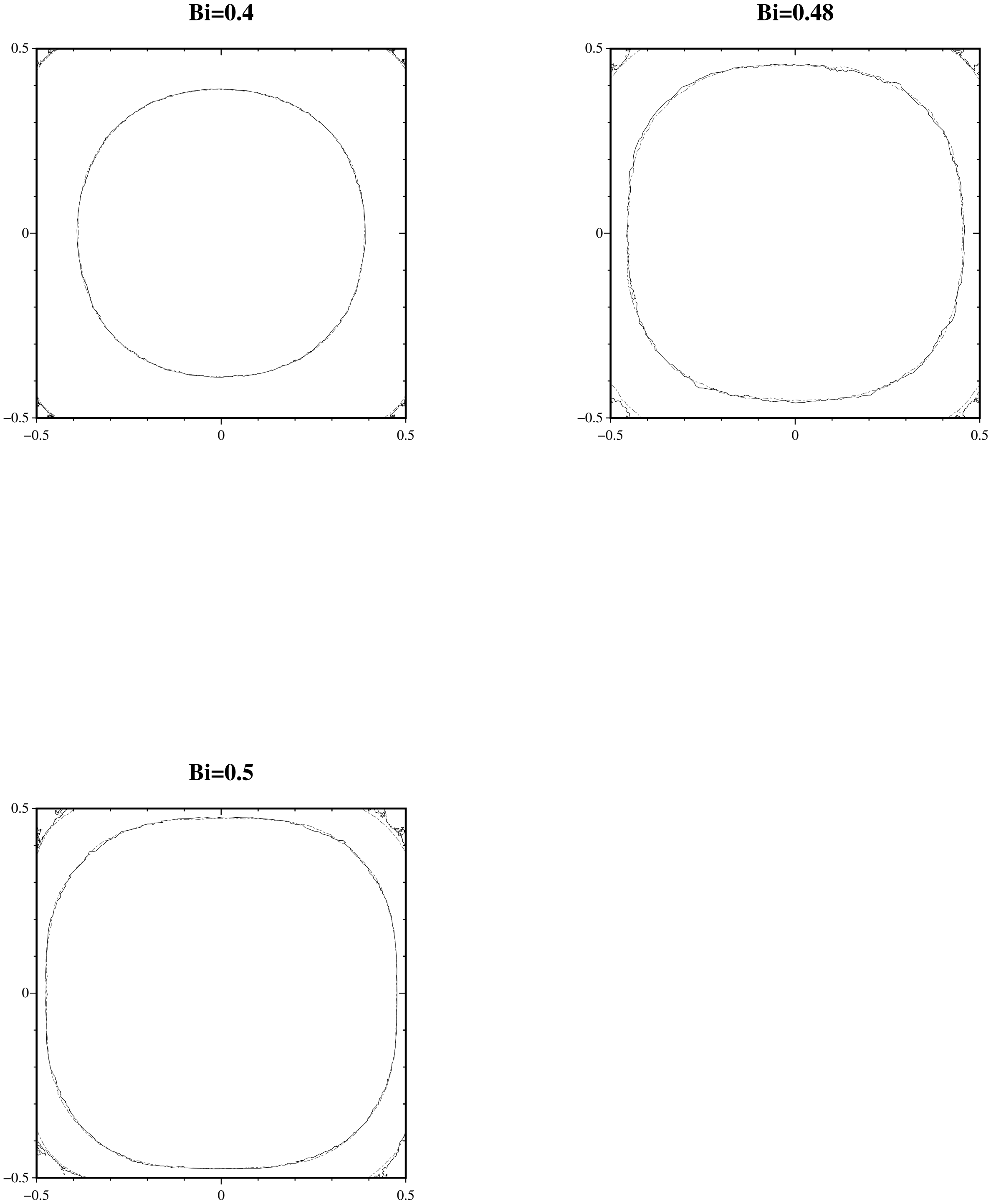
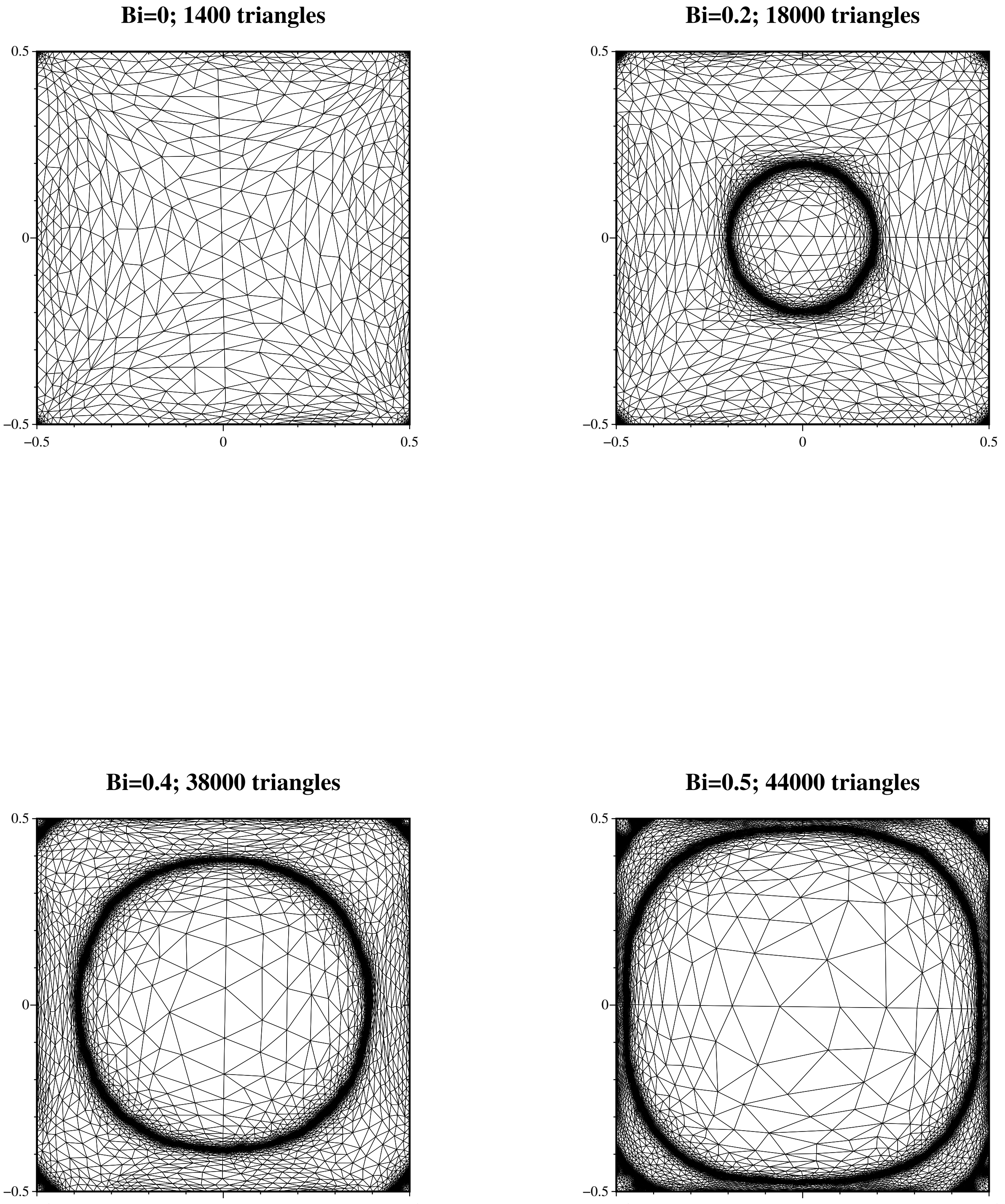


Figure 4.4: Maillages finaux pour différents Bi



Bi=0; 1400 triangles

Bi=0.2; 18000 triangles

Bi=0.4; 38000 triangles

Bi=0.5; 44000 triangles

Annexe A

Programmes réalisés

A.1 Programmes et bibliothèques utilisés

A.1.1 La bibliothèque *Rheolef*

A.1.2 Le mailleur *B.A.M.G*

A.2 Programmes réalisés

A.2.1 Le programme *poiseuille.c*

A.2.2 Le programme *adaptation*

Liste des figures

Bibliographie

[Bin22] E.C. Bingham. *Fluidity and Plasticity.* Mc Graw-Hill, New-York, 1922.

[Dau97] S. Daugan. *Mise en évidence expérimentale de zones mortes dans un fluide à seuil en écoulement établi et singulier.* ENSHMG - Laboratoire de Rhéologie, 1997.

[DL72] G. Duvaut et J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[DP87] P. Doremus et J.M. Piau. *Comptes-rendus du 22^e colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie.* 1987.

[Hec97] F. Hecht. *Bidimensional anisotropic mesh generator.* INRIA, 1997.

[Kou91] N.D. Kouamela. *Etude expérimentale des écoulements en charge de fluides à seuil.* Mémoire de Thèse, INPG, 1991.

[LT93] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur (2 Tomes).* Masson, 1993.

[Pou88] A. Le Pourhiet. *Résolution numérique de équations aux dérivées partielles.* Cepadues Editions, 1988.

[Roq97] N. Roquet. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de Lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles.* Université d'Orsay Paris-Sud, Prébublication 97-21, 1997.

[RS97] N. Roquet et P. Saramito. *RheolEf.* Laboratoire de Rhéologie, 1997.