Estimations d'erreur *a priori* de la méthode de Lagrange–Galerkin pour les équations de type Kazhikhov–Smagulov

Jocelyn Étienne [b,a] Pierre Saramito [a]

[a] *LMC-IMAG, BP 53, 38041 Grenoble cedex*

[b] *Adresse actuelle: BP Institute for Multiphase Flow, Madingley Road, Cambridge CB3 0EZ, Grande-Bretagne*

Abstract

Kazhikhov–Smagulov type systems are a subclass of non-homogeneous, incompressible Navier–Stokes equations where density is subject to diffusion, as in mixtures of gases of different densities. An algorithm is devised for these systems, the time discretization being based on a backward-Euler scheme together with the method of characteristics, and a mixed density-velocity-pressure (P_k, P_k, P_{k-1}) finite element method is used for the space discretization in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Under the constraint that $k > d - 1$ and $\Delta t = Ch^r$, with $r \in]d, 2k + 2 - d[$, we give optimal error bounds $O(\Delta t + h^k)$ for the time step Δt and the mesh size h.

Résumé

Les systèmes de type Kazhikhov–Smagulov correspondent aux équations de Navier–Stokes non-homogènes et incompressibles lorsque la densité obéit à une loi de diffusion, comme dans les mélanges de gaz de densités différentes. Nous proposons un algorithme pour ces systèmes qui s'appuie sur la discrétisation en temps par un schéma d'Euler rétrograde de la méthode des caractéristiques, et sur une méthode d'élements finis mixtes (P_k, P_k, P_{k-1}) pour la discrétisation en espace dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, des densités-vitesses-pressions. Sous la contrainte $k > d - 1$ et $\Delta t = Ch^r$, avec $r \in]d, 2k + 2 - d[$, nous donnons une estimation d'erreur optimale $O(\Delta t + h^k)$ pour le pas de temps Δt et le pas de maillage h.

Email addresses: `jocelyn@bpi.cam.ac.uk` (Jocelyn Étienne), `pierre.saramito@imag.fr` (Pierre Saramito).

Abridged English version – Let us consider a flow of two miscible, incompressible Newtonian fluids. The density of each of these fluids will be supposed constant, and denoted respectively ρ_d and ρ_l, $\rho_d > \rho_l > 0$. In this Note, we address the case when no assumption is made on the order of magnitude of the density contrast $\alpha = (\rho_d - \rho_l)/\rho_l$. This departs from the common framework of $\alpha \ll 1$, and allows to apply the results of this work to gas-mixtures and suspension flows of industrial and environmental relevance [1]. Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, and $T > 0$. Let ρ, $\boldsymbol{u}$ and p denote respectively the density, velocity and pressure of the mixture. The NAVIER-STOKES equations express the conservation of mass and momentum in the mixture:

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{1}$$

$$\rho \mathrm{D}_t \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}\cdot[2\mu(\rho) D(\boldsymbol{u})] + \boldsymbol{\nabla}\left[p + \frac{2}{3}\mu(\rho)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right] = \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{2}$$

where $\mu(\rho)$ is the viscosity, which can depend on density, and $\mathrm{D}_t\varphi = (\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\varphi$.

Denoting Φ the volume fraction of the denser fluid, the density of the mixture can be written $\rho = \rho_d\Phi + \rho_l(1-\Phi)$, and (1) guarantees that $\Phi \in [0,1]$ if it holds at time $t = 0$. Because of the mass diffusion between the miscible fluids, one has $\mathrm{D}_t\Phi \neq 0$. The closure of the system is thus brought by a constitutive law expressing this mass diffusion [2,3], known as Fick's law:

$$\mathrm{D}_t\Phi - (1+\alpha\Phi)\nabla\cdot(F(\Phi)\boldsymbol{\nabla}\Phi) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\times]0,T[. \tag{3}$$

Note that this implies $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = -\alpha\nabla\cdot(F(\Phi)\boldsymbol{\nabla}\Phi)$, which in general is not zero, so that in spite of the incompressibility of each fluid separately, the mixture does not have a zero-divergence velocity. Initial and boundary conditions in ρ and $\boldsymbol{u}$ complement the system, which is said to be of KAZHIKHOV–SMAGULOV type [4]. Let $\tilde{\mu}(\Phi) = \mu(\rho_l(1+\alpha\Phi))$. The weak formulation of the problem is given in terms of the multilinear forms:

$$a(\Phi;\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2\left(\tilde{\mu}(\Phi)D(\boldsymbol{u}),\, D(\boldsymbol{v})\right) - \frac{2}{3}\left(\tilde{\mu}(\Phi)\nabla\cdot\boldsymbol{u},\, \nabla\cdot\boldsymbol{v}\right), \qquad \forall(\Phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in L^\infty(\Omega)\times\left(H^1(\Omega)^d\right)^2 \tag{4}$$

$$b(\boldsymbol{v}, q) = -\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\, q\right), \qquad \forall(\boldsymbol{v}, q) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega), \tag{5}$$

the problem being to find $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^d)$, $p \in L^\infty(0,T;L_0^2(\Omega))$, i.e., the subspace of $L^2(\Omega)$ functions of zero mean, and $\Phi \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, such that,

$$((1+\alpha\Phi)\mathrm{D}_t\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) + a(\Phi;\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d, \tag{6a}$$

$$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha\Phi}\mathrm{D}_t\Phi + \nabla\cdot\boldsymbol{u},\, q\right) = 0, \qquad \forall q \in L^2(\Omega), \tag{6b}$$

$$(\mathrm{D}_t\Phi,\, \psi) + (F(\Phi)\boldsymbol{\nabla}\Phi,\, \boldsymbol{\nabla}\psi) + (\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{u},\, \psi) = 0, \qquad \forall\psi \in H^1(\Omega), \tag{6c}$$

$$\text{with } \boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0,\ \Phi(\cdot, 0) = \Phi_0. \tag{6d}$$

In this Note we propose algorithm (7) to solve system (6) in a Lagrange finite element space of degree k for $\boldsymbol{u}$ and Φ, and show in **Théorème 1** that, under usual regularity (8) and discretisation hypotheses, optimal error estimates (9) hold for the discrete solution. Moreover, it is shown that the image of the approximation of Φ can be brought arbitrarily close to $[0,1]$. The proof involves similar techniques as the analysis of the Lagrange–Galerkin method for homogeneous Navier–Stokes equations in [5], with several additional difficulties that this Note describes.

1. Présentation du problème – Nous considérons dans cette Note l'écoulement de deux fluides newtoniens incompressibles et miscibles, ρ_d et ρ_l étant leurs densités respectives, supposées constantes, $\rho_d > \rho_l > 0$. Aucune hypothèse n'est faite sur l'ordre de grandeur du coefficient $\alpha = (\rho_d - \rho_l)/\rho_l$. Soit Ω

un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $T > 0$ et notons ρ la densité du mélange, $\boldsymbol{u}$ sa vitesse et p la pression. Les équations de NAVIER-STOKES (1,2) expriment la conservation du mouvement et de la masse du mélange. En notant Φ la fraction volumique du fluide le plus dense, la densité du mélange s'écrit $\rho = \rho_d\Phi + \rho_l(1 - \Phi)$, et la fermeture du système est alors apportée par une loi de comportement exprimant la diffusion de masse entre les deux fluides [2,3], dite loi de FICK (3). Remarquons que (1) et (3) impliquent $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = -\alpha\nabla\cdot(F(\Phi)\boldsymbol{\nabla}\Phi)$, qui n'est en général pas nul : en dépit de l'incompressibilité de chaque fluide, la vitesse du mélange n'est pas à divergence nulle. Le système (2-3) est complété par des conditions initiales et aux limites pour ρ et $\boldsymbol{u}$, et appartient à la classe des systèmes de KAZHIKHOV–SMAGULOV [4]. Il est identique à celui obtenu en faisant tendre le nombre de MACH vers zéro dans les équations des fluides compressibles [6,7,8], voir [9] pour une justification de l'obtention d'un tel modèle dans le cas des gaz parfaits. Pour certaines conditions aux limites, l'existence de solutions faibles globales pour faible diffusivité α est montrée dans [10], de solutions globales proches de l'équilibre dans [8] et de solutions faibles globales dans [11].

2. Approximation et algorithme découplé de résolution – Soit $M \in \mathbb{N}$. Nous introduisons la subdivision de $[0, T]$ en posant $t_m = m\Delta t$, $0 \le m \le M$ avec $\Delta t = T/M$. Soit $(\mathscr{T}_h)_{h>0}$ une famille quasi-uniforme de triangulation. Pour tout $l \ge 1$, l'espace d'éléments fini de degré l est définit par : $H_{l,h} = \{\varphi_h \in C(\bar{\Omega});\ \varphi_{h|K} \in P_k, \forall K \in \mathscr{T}_h\}$. Pour tout $k \ge 2$, nous introduisons les espaces $T_h = H_{k,h}$, $V_h = H^d_{k,h}$, $Q_h = H_{k-1,h}$. Notons que le couple (V_h, Q_h) vérifie la condition de Babuška-Brezzi [12]. Pour $k = 1$, nous pouvons choisir pour (V_h, Q_h) la discrétisation stabilisée du type P_1 bulle – P_1 [12], et $T_h = Q_h$. L'approximation du problème (7) consiste à construire la séquence $(\Phi^m_h, \chi^m_h, \boldsymbol{u}^m_h, p^m_h) \in T_h \times T_h \times V_h \times Q_h$, $0 \le m \le M$ définie par l'algorithme suivant :

Initialisation : Pour $m = 0$,
Soient Φ^0_h et χ^0_h projections de Φ_0 et $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0$ sur T_h et $T_h \cap L^2_0(\Omega)$, respectivement.
Soit $\boldsymbol{u}^0_h$ projection de $\boldsymbol{u}_0$ sur $\{\boldsymbol{v}_h \in V_h,\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}_h = \chi^0_h\}$.
Récurrence : Pour $0 \le m \le M-1$, connaissant Φ^m_h, χ^m_h et $\boldsymbol{u}^m_h$,

– **Étape 1 :** Calculer la caractéristique approchée $\boldsymbol{X}^m_h$ par

$$\boldsymbol{X}^m_h(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - \Delta t\, \boldsymbol{u}^m_h(\boldsymbol{x}). \tag{7a}$$

– **Étape 2 :** Trouver $\Phi^{m+1}_h \in T_h$ satisfaisant, pour tout $\psi_h \in T_h$,

$$\left(\frac{\Phi^{m+1}_h - \Phi^m_h \circ \boldsymbol{X}^m_h}{\Delta t},\ \psi_h\right) + \left(F(\Phi^m_h)\boldsymbol{\nabla}\Phi^{m+1}_h,\ \boldsymbol{\nabla}\psi_h\right) = -\left(\chi^m_h\Phi^m_h,\ \psi_h\right). \tag{7b}$$

– **Étape 3 :** Calculer explicitement $\Gamma^{m+1}_h \in T_h$,

$$\Gamma^{m+1}_h := \frac{\alpha}{1 + \alpha\Phi^{m+1}_h} \times \frac{\Phi^{m+1}_h - \Phi^m_h \circ \boldsymbol{X}^m_h}{\Delta t} \tag{7c}$$

– **Étape 4 :** Calculer explicitement χ^{m+1}_h par projection sur $L^2_0(\Omega)$:

$$\chi^{m+1}_h := \Gamma^{m+1}_h - \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)}\left(\int_\Omega \Gamma^{m+1}_h\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathbb{1}. \tag{7d}$$

– **Étape 5 :** Trouver $\boldsymbol{u}^{m+1}_h \in V_h$ et $p^{m+1}_h \in Q_h \cap L^2_0(\Omega)$, tels que, pour tout $\boldsymbol{v}_h \in V_h$ et $q_h \in Q_h$:

$$\left((1 + \alpha\Phi^{m+1}_h)\frac{\boldsymbol{u}^{m+1}_h - \boldsymbol{u}^m_h \circ \boldsymbol{X}^m_h}{\Delta t},\ \boldsymbol{v}_h\right) + a(\Phi^{m+1}_h; \boldsymbol{u}^{m+1}_h,\ \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v}_h,\ p^{m+1}_h) = (\boldsymbol{f}(t_{m+1}),\ \boldsymbol{v}_h), \tag{7e}$$

$$b(\boldsymbol{u}^{m+1}_h,\ q_h) = (\chi^{m+1}_h,\ q_h). \tag{7f}$$

La projection (7d) est nécessaire pour l'existence d'une solution au problème de Stokes : en effet, Γ_h^{m+1} n'est pas nécessairement à moyenne nulle, du fait de l'erreur numérique, et n'appartient donc pas nécessairement à l'image de la divergence discrète. En insérant l'étape (7d) de projection dans $L_0^2(\Omega)$, l'existence et l'unicité de la solution de (7e,7f) peut ensuite être démontrée [13, p. 67].

3. Convergence de l'approximation – Pour tout espace de BANACH Y, muni de la norme $\|.\|_Y$, et pour $1 \leq p < \infty$, on introduit :

$$l^p(0,T;Y) = \left\{\varphi : (t_1,\ldots,t_N) \to Y;\ \|\varphi\|_{l^p(0,T;Y)} = \Big(\sum_{n=1}^{N} \|\varphi(t_i)\|_Y^p \Delta t\Big)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$l^\infty(0,T;Y) = \left\{\varphi : (t_1,\ldots,t_N) \to Y;\ \|\varphi\|_{l^\infty(0,T;Y)} = \max_{1\leq i\leq N} \|\varphi(t_i)\|_Y < \infty\right\}.$$

Nous noterons aussi $L^p(Y)$ et $C(Y)$ les espaces $L^p(O,T;Y)$ et $C([0,T];Y)$, respectivement. Supposons qu'il existe une unique solution globale au problème (6), vérifiant les conditions de régularité :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in L^\infty(H^{k+1}(\Omega)^d) \cap C(C^{0,1}(\overline{\Omega})^d \cap H_0^1(\Omega)^d), && \Phi \in L^\infty(H^{k+1}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)) \cap C(H^1(\Omega)),\\
&\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(H^{k+1}(\Omega)^d) \cap L^\infty(L^2(\Omega)), && \partial_t \Phi \in L^2(H^{k+1}(\Omega)) \cap L^\infty(H^1(\Omega)),\\
&\mathrm{D}_t \boldsymbol{u} \in L^\infty(L^\infty(\Omega)), && \mathrm{D}_t^2 \Phi \in L^\infty(L^2(\Omega)),\\
&\mathrm{D}_t^2 \boldsymbol{u} \in L^2(L^2(\Omega)), && p \in L^\infty(H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{8}$$

et que de plus $\nabla \cdot \boldsymbol{u}(t=0) \in H^{k+1}(\Omega)^d$. Si par ailleurs μ et F sont lipschitziennes et chacune minorée par une constante positive, et que de plus F a une dérivée lipschitzienne, on a alors le théorème :

Théorème 1 *Supposons $k > d-1$ (ou $k > d-2$ si F est constante) et $\Delta t = C_0 h^r$, avec $d < r < 2k+2-d$ (ou $(d-1)/2 < r < 2k+2-d$ si F est constante). Alors, pour tout ε positif, il existe h_0 positif tel que, pour $h < h_0$, l'algorithme (7) admette une unique solution $(\Phi_h, \chi_h, \boldsymbol{u}_h, p_h) \in \ell^\infty(T_h \times T_h \times V_h \times Q_h)$, et celle-ci vérifie pour une constante κ :*

$$\begin{aligned}
\|\Phi - \Phi_h\|_{\ell^\infty(0,T,H^1(\Omega))} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{\ell^\infty(0,T,H^1(\Omega))} + \|p - p_h\|_{\ell^2(L^2(\Omega))} &\leq \kappa(\Delta t + h^k),\\
\|\Phi - \Phi_h\|_{\ell^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{\ell^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{u} - \chi_h\|_{\ell^\infty(0,T,L^2(\Omega))} &\leq \kappa(\Delta t + h^{k+1}).
\end{aligned} \tag{9}$$

De plus, Φ_h vérifie : $-\varepsilon \leq \Phi_h^m(\boldsymbol{x}) \leq 1+\varepsilon,\quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\quad 0 \leq m \leq M$.

Remarque 1 Dans le cas où F n'est pas constante, la condition $\Delta t \leq C_0 h^d$ est restrictive, car ne permet pas de choisir de grands pas de temps : ceci a été vérifié dans les simulations numériques [1]. Les simulations indiquent de plus qu'un algorithme consistant à remplacer dans (7b) *le terme $F(\Phi_h^m)\boldsymbol{\nabla}\Phi_h^{m+1}$ par le terme $F(\Phi_h^{m+1})\boldsymbol{\nabla}\Phi_h^{m+1}$ permet de lever cette limitation dans la pratique. Le problème* (7b) *est alors non-linéaire et est résolu par une méthode de point fixe ou de Newton. L'analyse numérique de cette variante, et de la contrainte en pas de temps associé, sera étudiée dans un travail en préparation [14].*

Indications sur la démonstration – L'estimation donnant Φ_h^m arbitrairement proche de l'intervalle $[0,1]$ est indispensable à l'aboutissement de la preuve. Elle est basée sur les inégalités inverses [5]

$$\|\psi_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C_a h^{-d/p} \|\psi_h\|_{0,p,\Omega}, \quad \|\psi_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C_b h^{1-d/2} |\log h|^{1-1/d} \|\psi_h\|_{1,\Omega} \qquad \forall \psi_h \in W_h. \tag{10}$$

On prendra h_0 tel que $h_0^{1-d/2} |\log h_0|^{1-1/d} (h_0^k + \Delta t) = 1$.

On procède par récurrence sur n, en supposant que les bornes annoncées sont prouvées pour $(\Phi_h^m, \chi_h^m, \boldsymbol{u}_h^m)$, $0 \leq m \leq n$, et en montrant les estimations successivement pour Φ_h^{n+1}, χ_h^{n+1} et $\boldsymbol{u}_h^{n+1}$ avec la même constante κ, indépendante de n. Si une grande partie des difficultés rencontrées sont similaires à celles de la preuve de Süli [5], les termes non-linéaires nécessitent un traitement particulier.

Posons $\Phi^m = \pi_h \Phi(\cdot, t_m)$. Ainsi, pour estimer l'erreur $\epsilon_h^m = \Phi_h^m - \pi_h \Phi^m$ dans H^1, où π_h est l'interpolateur de Lagrange sur T_h, on applique le lemme de Gronwall discret à la suite $\left(\sqrt{F(\Phi_h^m)}\boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^m\right)_m$ entre $m = 1$ et $m = n$. La borne inférieure sur F permet ensuite d'obtenir une majoration $\|\Phi_h^n - \Phi^n\|_{1,\Omega} \leq \kappa(h^k + \Delta t)$.

Les caractéristiques continues sont définies pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ et $s \in [0, T]$ par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, s; t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, s; t), t), \quad \forall t \in]0, T[\text{ et la condition initiale } \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, s; s) = \boldsymbol{x}.$$

Posons $\boldsymbol{X}^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t_{m+1}, t_m)$. On montre que les caractéristiques approchées $\boldsymbol{X}_h^m$ définies par (7a) sont telles que pour tout $\psi \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1/2$,

$$\left(\frac{\epsilon_h^m \circ \boldsymbol{X}^m - \epsilon_h^m \circ \boldsymbol{X}_h^m}{\Delta t}, \psi\right) \quad \leq \quad C_d \left(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + K_{\Delta t,m}\, \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{0,q,\Omega} \|\boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^m\|_{0,p,\Omega}$$

où $K_{\Delta t,m} = C_1 \left(1 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{u}\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} \Delta t\right) \left\{\|\partial_t \boldsymbol{u}\|_{L^\infty(t_m,t_{m+1};L^\infty(\Omega))} + \|D_t \boldsymbol{u}\|_{L^\infty(t_m,t_{m+1};L^\infty(\Omega))}\right\}^2$. Il s'en suit, grâce à (10), une majoration utilisée pour borner $\left\|\epsilon_h^{m+1}\right\|_{0,\Omega}$:

$$\left|\left(\frac{\epsilon_h^m \circ \boldsymbol{X}^m - \epsilon_h^m \circ \boldsymbol{X}_h^m}{\Delta t}, \epsilon_h^{m+1}\right)\right| \leq C_c \left(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + K_{\Delta t,n}\, \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} h^{1-\frac{d}{2}} |\log h|^{1-\frac{1}{d}} \left\|\epsilon_h^{m+1}\right\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^m\|_{0,\Omega}$$

L'hypothèse de récurrence permet de borner $h^{1-d/2} |\log h|^{1-1/d} \|\boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^m\|_{0,\Omega}$ par 1 pour $h \leq h_0$. La majoration du même terme avec la fonction-test $\boldsymbol{\nabla}\left(\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m\right)/\Delta t$ est plus technique, et fait apparaître la contrainte $r > d - 2$ pour majorer $\|\epsilon_h^{m+1}\|_{1,\Omega}$. Lorsque F n'est pas constante, on utilise aussi que, pour $\beta > 0$ arbitraire :

$$\begin{aligned} A_1 = & \left|\left(\{F(\Phi^m) - F(\Phi_h^m)\} \boldsymbol{\nabla}\Phi^{m+1}, \boldsymbol{\nabla}\frac{\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m}{\Delta t}\right)\right| \\ \leq & \frac{1}{\beta} \|F'(\Phi^m)\boldsymbol{\nabla}\Phi^m - F'(\Phi_h^m)\boldsymbol{\nabla}\Phi_h^m\|_{0,\Omega}^2 \left\|\boldsymbol{\nabla}\Phi^{m+1}\right\|_{0,\infty,\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \|F(\Phi^m) - F(\Phi_h^m)\|_{0,\Omega}^2 \left\|\Delta\Phi^{m+1}\right\|_{0,\infty,\Omega}^2 \\ & + \beta \left\|\frac{\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m}{\Delta t}\right\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

dont le premier terme peut être majoré par $(1/\beta) \|\boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^m\|_{0,\Omega}^2 \left\|\boldsymbol{\nabla}\Phi^{m+1}\right\|_{0,\infty,\Omega}^2$ pour $h < h_0$, en utilisant l'hypothèse de récurrence sur Φ_h^m. Les termes faisant apparaître les bornes les plus restrictives sur r ont la même forme,

$$A_2 = \frac{1}{\Delta t} \left\|\left(\sqrt{F(\Phi_h^{m+1})} - \sqrt{F(\Phi_h^m)}\right) \boldsymbol{\nabla}\epsilon_h^{m+1}\right\|_{0,\Omega}^2, \; A_2' = \frac{1}{\Delta t} \left\|\left(\sqrt{1 + \alpha\Phi_h^{m+1}} - \sqrt{1 + \alpha\Phi_h^m}\right) \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_h^m\right\|_{0,\Omega}^2,$$

où $\boldsymbol{e}_h^m = \boldsymbol{u}_h^m - \pi_h^S \boldsymbol{u}(\cdot, t_{m+1})$, avec π_h^S un opérateur de projection de $H^1(\Omega)$ sur V_h, et imposent de donner une majoration en $o(\Delta t)$ de $\left\|\Phi_h^{m+1} - \Phi_h^m\right\|_{0,\infty,\Omega}^2$.

4. Conclusion – L'algorithme présenté ici a permis dans [1] de réaliser les premières simulations numériques d'écoulements dits d'échange pour de forts rapports de densité entre des fluides miscibles. Ces écoulements consitent à mettre en présence dans un canal deux fluides de densité différente, initialement séparés par une paroi verticale. Lorsqu'on supprime celle-ci, deux courants de fluides dense et léger se propagent respectivement aux parois inférieure et supérieure du canal, et atteignent des vitesses constantes, respectivement U_d et U_l. La Fig 1 compare observations expérimentales et résultats numériques pour $\mu(\rho)$ et $F(\Phi)$ prises constantes, et indique que le système de Kazhikhov-Smagulov est approprié pour modéliser ce type d'écoulements et que l'algorithme proposé ici permet d'en approcher la solution.

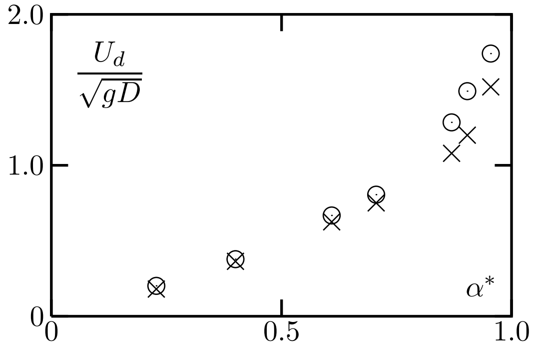

Fig. 1. Vitesses U_d et U_l des fronts dense et léger respectivement selon le paramètre de contraste de densité $\alpha^* = \sqrt{(\rho_d - \rho_l)/(\rho_d + \rho_l)}$. D est la demi-hauteur du canal, g l'accélération de la gravité. $\times$, observations expérimentales, $\circ$, simulations numériques.

Remerciements – Les auteurs souhaitent remercier très vivement Didier Bresch, avec qui de nombreuses discussions ont été déterminantes pour ce travail.

Références

[1] J. Étienne, E. J. Hopfinger, and P. Saramito. Numerical simulation of high density ratio lock-exchange flows. *Physics of Fluids*, 17(3), 2005.

[2] K. R. Rajagopal and L. Tao. *Mechanics of Mixtures*, volume 35 of *Series on advances in mathematics for applied sciences.* World scientific publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 1995.

[3] D. D. Joseph and Y. Y. Renardy. *Fundamentals of two-fluid dynamics. Part II : Lubricated Transport, Drops and Miscible Liquids.* Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer Verlag, New-York, etc, 1993.

[4] S. N. Antonsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[5] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equation. *Numer. Math.*, 53 :459–483, 1988.

[6] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space dimensions*, volume 53. Springer-Verlag, 1984.

[7] P. Embid. Well-posedness of the nonlinear equations for zero mach number combustion. *Comm. Partial Diff. Eqs.*, 12 :1227–1283, 1987.

[8] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics.* Lecture series in Mathematics and its applications. Oxford Science, 1996, 1998.

[9] T. Alazard. Low Mach number limit of the full Navier–Stokes equations. *submitted*, 2005.

[10] A. Kazhikhov and Sh. Smagulov. The correctness of boundary value problems in a diffusion problem of an homogeneous fluid. *Sov. Phys. Dokl.*, 22 :249–252, 1977.

[11] D. Bresch, E. H. Essoufi, and M. Sy. De nouveaux systèmes de type Kazhikhov–Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 335 :973–978, 2002.

[12] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite elements methods.* Springer-Verlag, New-York, 1991.

[13] J. Étienne. *Simulation numérique d'écoulements gravitaires à fortes différences de densité. Application aux avalanches.* PhD thesis, INP Grenoble, September 2004.

[14] J. Étienne and P. Saramito. A priori error estimates of the Lagrange–Galerkin method for Kazhikhov–Smagulov type systems. in preparation.