LABORATOIRE DE RHEOLOGIE
UJF/INPG/CNRS - UMR 5520
1301 Rue de la Piscine
B.P.53 - Domaine Universitaire
38041 GRENOBLE CEDEX 9 (FRANCE)
tél : 04-76-82-51-71 Fax : 04-76-82-51-64

Simulation numérique de la rupture de barrage pour des fluides à seuil

DESS d'Ingénierie Mathématique
Université de Savoie

par :
BELTCAGUY Gilles

directeur scientifique :
J.M. PIAU

maître de stage :
P. SARAMITO

Septembre 1998

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à monsieur J.M PIAU, professeur à l'I.N.P.G, directeur du Laboratoire de Rhéologie de Grenoble pour m'avoir autorisé à effectuer mon stage de D.E.S.S au sein du Laboratoire de Rhéologie dans le cadre d'un projet dont il est à l'origine. Il a imprimé à mes travaux, tout au long de ces 6 mois de stage, les directions les plus judicieuses me permettant d'aboutir aux résultats que nous présentons ici. Sans lui rien de ceci n'aurait existé.

J'exprime toute ma gratitude à monsieur P.SARAMITO qui a bien voulu assurer la direction de ce stage. Sa disponibilité, sa patience et ses conseils avisés ont constitués un atout précieux pour la bonne marche de ce travail. Je n'oublierai pas tout ce que j'ai eu la chance d'apprendre à son contact. L'expérience et les compétences que j'ai ainsi acquises me seront des plus utiles dans ma vie professionnelle.

Je m'adresse également à monsieur B.NSOM qui m'a permis de connaître l'existence de ce projet : sans son intervention je n'aurais jamais eu le plaisir d'aborder un sujet aussi passionnant. J'ajoute qu'il est resté depuis mon arrivée un interlocuteur privilégié vers qui j'ai toujours pu me tourner.

Une mention particulière pour monsieur K.DEBIANE, qui assurant la réalisation expérimentale de ce projet, a su m'éclairer de ses conseils et m'aider à faire le lien entre les modèles et les fluides réels.

Un grand merci au grand (maître) A.Mahmoud et au grand (très grand) A.Caillaux pour leurs nombreux conseils et astuces informatiques journalières.

Je ne peux citer sur cette seule page tous ceux qui, jour après jour, au détour d'un couloir, ont contribué à rendre mon séjour agréable, mais je ne saurais passer sous silence l'ambiance chaleureuse et internationale, que j'ai rencontrée auprès des membres du laboratoire.

Mon seul regret : ne pas avoir appris toute les langues entendues ...

Table des matières

Liste des figures

Liste des notations utilisées

h : hauteur du fluide

Od : Nombre d'Oldroyd

Fr : Nombre de Froude

Re : Nombre de Reynolds

φ_c : contribution des contraintes élongationnelles

n : paramètre du fluide de Hershel-Bulkley

m : $\dfrac{1}{n}$

Δt : pas de temps

n-decade-log : évolution logarithmique du temps, chaque décade $[10^p, 10^{p+1}]$ est divisée en n-decade-log intervalles de temps

Δx : pas d'espace

H : hauteur caractéristique

L : longueur caractéristique

ε : $\frac{H}{L}$

n-fix : nombre d'itérations point-fixe effextuées à chaque itération en temps

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre du programme européen "debris flows and risks", Research and Technological Developpment, Environment and Climate, Debris flow management and risk assesment in the Alpine Region, 1995-1998.

Considérons un barrage retenant une certaine quantité de fluide en amont et dépourvu d'obstacle en aval. Au temps initial le barrage se rompt et laisse se déverser le fluide qu'il contient.

Le travail présenté ici a pour objet d'étudier le problème lorsque les phénomènes visqueux sont prédominants devant l'effet de l'inertie. Il s'agit d'écoulements de type lave volcanique ou boues.

Le modèle théorique sur lequel nous nous appuyons ayant été développé par J.M. PIAU dans son article "Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclinated plane", et dont la particularité est de faire prendre en compte les contraintes d'élongation au sein du fluide.
Ce modèle s'appuie sur les équations de Navier-Stokes et de continuité associées à une condition de non glissement sur les parois du canal.

Les travaux précédemment effectués visant à réaliser une simulation numérique des écoulements consécutifs à une rupture de barrage portaient leur attention sur les fluides newtoniens. Nous étendons ici cette étude aux aux fluides à seuil de Hershel-Bulkley et Bingham.

En s'appuyant sur les travaux de J.M.PIAU, on aboutit (Annexe C) à l'expression d'une équation aux dérivées partielles régissant le phénomène pour des fluides de Hershel-Bulkley sur un canal incliné.
Le problème est ensuite mis en place pour le cas incliné (Annexe A) et horizontal (chapitre 1) : on trouvera dans ces deux parties le recours aux nombres adimensionnels, l'obtention des équations de type diffusion (cas horizontal), diffusion-convection (cas incliné) et la résolution (Eléments Finis - Différences Finies).

Les résultats numériques sont présentés dans le cas particulier d'un fluide de Bingham s'écoulant sur un canal horizontal (chapitre 2).
Dans un premier temps, nous étudions le comportement du modèle sans tenir compte des contraintes d'élongation. Dans l'optique de la prédiction des risques, nous avons mis en évidence des lois d'échelles utilisables avec une simple calculatrice : une loi donnant la posiotion d'arrêt du fluide pour de faibles contraintes seuil, ainsi qu'une autre donnant l'ordre de grandeur des temps d'arrêt.
Dans un second temps, on a cherché à déterminer l'influence des contraintes d'élongation sur le phénomène. Au travers des premiers résultats obtenus, on a alors constaté que ce facteur intervient de façon prédominante dans la forme que revêt l'écoulement.

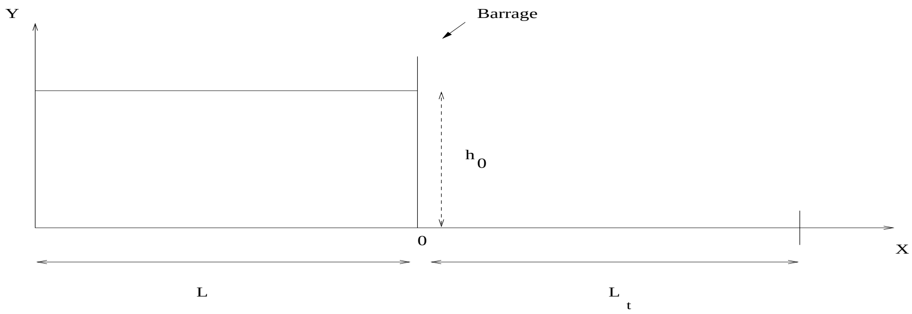
Chapitre 1

Canal horizontal

1.1 Présentation du problème

Considérons un réservoir contenant un fluide à seuil très visqueux au repos. Au temps initial t_0 le barrage ainsi constitué se rompt et provoque l'écoulement du fluide le long d'un canal.

On note L la longueur du réservoir et h_0 la hauteur initiale du fluide. On appelle L_t la longueur d'épanchement du fluide en aval du barrage.



1.2 Condition initiale et conditions aux limites

Nous reprenons ici les conditions limites choisies lors de l'étude de ce phénomène dans le cas d'un fluide visqueux newtonien(voir Rapport de Y.Cornet [2]).

- La condition initiale porte sur la distribution du fluide :

$$h(t=0,x) \quad = \quad \begin{cases} h_0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

- Conditions limites :
  - En aval du barrage : on considère un point L_t suffisamment éloigné du barrage (en fait du point de rupture du réservoir) tel que la solution (autrement dit, l'écoulement du fluide) ne dépende pas de celui-ci. Ainsi on peut prendre en aval du barrage une condition limite de type Dirichlet homogène :
    $y(t, x = L_t) = 0$
  - En amont : Cette condition limite provient directement des observations effectuées à partir des résultats expérimentaux. Elle exprime que la pente de la surface libre est quasiment nulle à cette extrémité.

Cette hypothèse est valide pour une longueur de réservoir suffisante, soit : $L \gg h_0$.
$\frac{\partial h}{\partial x}(t, x = -L) = 0 \ \ \forall t$

1.3 Equation et adimensionnement

On reprend l'expression de l'équation aux dérivées partielles (C.9) donnée en Annexe C.2.3 page 55 dans le cas particulier de $\alpha = 0$ (pente nulle)

On rappelle que $m = \frac{1}{n}$ où n est le coefficient d'Hershell-Bulkley.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} \quad + \quad & \frac{1}{m+2}\frac{1}{k^m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left|\frac{\Phi\tau_0}{h} - \rho g\right|^m \left| h - \frac{\tau_0}{\left(\frac{\Phi\tau_0}{h} - \rho g\right)\frac{\partial h}{\partial x}}\right|^{m+1}\right. \\ \times \quad & \left.\left(h + \frac{\tau_0}{(m+1)\left(\frac{\Phi\tau_0}{h} - \rho g\right)\frac{\partial h}{\partial x}}\right)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^m\right] = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les paramètres d'adimensionnement utilisés sont les suivants :

On considère L et H respectivement une longueur et une hauteur caractéristiques. On pose $\varepsilon \ = \ \frac{H}{L}$

$$\hat{x} \ = \ \frac{x}{L} \ \ ; \ \ \hat{h} \ = \ \frac{h}{H} \ \ ; \ \ \hat{\tau} \ = \ \frac{\tau_0}{\rho g H} \ \ ; \ \ \hat{t} \ = \ \frac{t}{t_0}$$

où $t_0 \ = \ 4(m+2)\left(\frac{L}{H}\right)^{m+1}(\frac{k}{\rho g H})^m$

D'autre part on pose $Od \ = \ \frac{\hat{\tau}}{\varepsilon}$ *et* $\varphi_c \ = \Phi\hat{\tau}$ deux grandeurs correspondant au seuil de contrainte et à une hauteur critique respectivement. Ce sont les deux seuls paramètres physiques du programme qui sont amenés à varier.

Ainsi il vient : (en omettant le signe ˆ pour alléger les notations)

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.2}$$

avec :

$$\eta(h) = h^2|h-\varphi_c|^m \left|1 - \frac{Od}{(h-\varphi_c)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|}\right|^{m+1} \left(1 + \frac{Od}{(m+1)(h-\varphi_c)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|}\right)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{m-1} \tag{1.3}$$

Le paragraphe suivant précise les choix de programmation effectués pour utiliser cette expression dans son domaine de validité.

La résolution de cette équation est assurée par un schéma de type Eléments Finis [1].

Remarques :

- si $Od = \varphi_c = 0$ *et* $m \neq 0$

  d'où l'on tire

$$\eta(h) = 4h^{m+2}\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{m-1} \tag{1.4}$$

  on obtient l'équation dans le cas newtonien généralisé

$$\frac{\partial h}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\left(h^{m+2}\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{m-1}\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.5}$$

- si $m = 1$, $\varphi_c = 0$ et $\tau_0 = 0$, on obtient

$$\eta(h) = 4h^3 \tag{1.6}$$

  ce qui nous ramène au cas newtonien [2] :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.7}$$

[1] Une autre méthode de résolution avait été pressentie, mais s'est avérée peu intéressante. Voir Annexe B page 42

[2] Voir [2] rapport de Y.Cornet équation 1.9 page 10

1.4 Situations contrôlées numériquement

Pour que, numériquement, $\eta(h)$ defini par (1.3) ait un sens pour tout point x, on a dégagé les cas suivants; cas pour lesquels on a considéré $\eta(h) = 0$

◇ *si* $h(x) \leq \varphi_c$ terme en cause: $|h-\varphi_c|^m$

Le fluide ne s'écoule pas en dessous d'une hauteur critique: c'est une propriété d'un fluide à seuil.

◇ *si* $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x} = 0$ terme en cause: $\dfrac{Od}{(h-\varphi_c)\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|}$

Si on a $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x} \to 0^-$ alors $\eta(h(x)) \simeq \left|\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}\right|^{-3}$
ce qui induit $\eta(h(x)) \to +\infty$

Cette "viscosité" infinie correspondant à un comportement asymptotique de l'écoulement de la partie amont du fluide pour les grands temps a été traduit dans la programmation par $\eta(h(x)) = 0$

◇ on considère le terme $\left|1-\dfrac{Od}{(h(x)-\varphi_c)\left|\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}\right|}\right|^{m+1}$

m n'étant pas une puissance entière, il s'avère impératif de conserver
$Od \leq (h(x)-\varphi_c)\left|\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}\right|$ et ce pour tout x

C'est pourquoi, lorsque l'on ne se situe pas dans ce cas, on a choisi de prendre $\eta(h) = 0$.

A noter que l'interprétation physique de cette situation $\left(Od \leq (h(x)-\varphi_c)\left|\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}\right|\right)$ reste à faire.

1.5 Formulation variationnelle

Reprenons l'équation 1.1 considérée page 11.

soit x $\in [-L, L_t]$

condition de Dirichlet homogène : $h(t, L_t) = 0$

condition de Neumann homogène : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(t, -L) = 0$

On introduit l'espace fonctionnel : $H^1_{N,0}(-L, L_t) = \Big\{\Psi \in H^1(-L, L_t); \Psi(L_t) = 0\Big\}$.

Multiplions l'équation 1.1 par une fonction test $\psi \in\ H^1_{N,0}(-L, L_t)$ et intégrons par partie.

Le problème s'écrit :

(P) : Trouver $h \in L^\infty(\delta; T; H^1_{N,0})$ tel que [3]:

$$\int_{-L}^{L_t} \frac{\partial h}{\partial t}\ \psi\ dx\ + \int_{-L}^{L_t} \eta(h) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx\ = 0.$$

$$h(t = 0, x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x < L_t \\ 1 & si \quad -L < x \leq 0 \end{cases}$$

pour tout $\delta > 0$ et $\psi \in H^1_{N,0}(-L, L_t)$

1.6 Discrétisation en temps

Pour aborder le problème de la non-linéarité de l'équation (1.2), nous avons choisi d'utiliser un schéma de discrétisation temporelle implicite.

On pose : $t^n = t^0 + n\Delta t$

avec $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ le pas de temps et t^0 l'instant initial

de même : $h^n = h(t^n, x)$

l'équation devient alors :

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \quad - \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta(h^{n+1})\frac{\partial h^{n+1}}{\partial x}\right] \quad = \quad 0$$

[3] La condition initiale étant discontinue à $t = 0$ (voir 1.2 page 10), on ne peut chercher $h \in L^\infty(0, T; H^1_{N,0})$

- $h^0 = h(t=0)$ donné
- pour $n \geq 1$, $h^{(n-1)}$ étant connu par récurrence, le problème est :

  $(P)^n_{\Delta t}$: trouver $h^n \in H^1_{N,0}(-L, L_t)$ tel que,

$$\int_{-L}^{L_t} \frac{h^n}{\Delta t}\ \psi\ dx\ + \int_{-L}^{L_t} \eta(h^n)\frac{\partial h^n}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx\ = \int_{-L}^{L_t} \frac{h^{n-1}}{\Delta t}\ \psi\ dx$$

  Ceci pour tout ψ dans $H^1_{N,0}(-L, L_t)$

1.7 Algorithme de résolution

L'algorithme utilisé est celui décrit par P.Saramito [8] dans son article "The Viscous dam break problem" et déjà utilisé dans le cas de fluides newtoniens.

Il inclut à la boucle de résolution une boucle interne de type point-fixe, afin de traiter le cas où les variations de $\eta(h)$ sont importantes entre deux pas de temps.

On reproduit ci-après l'algorithme en question.

- $n = 0$ $h^0 := h(t=0)$
- $n \geq 1$: h^{n-1} donné trouver $h^n \in H^1_{N,0}$ tel que :

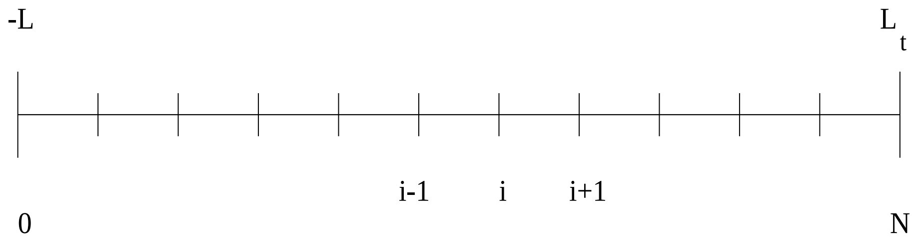
  * $k = 0$ $\xi^0 := h^{n-1}$
  * $1 \leq k \leq K$ ξ^{k-1} donné trouver $\xi^k \in H^1_{N,0}$ tel que :

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{-L}^{L_t} \xi^k \phi dx + \int_{-L}^{L_t} \eta(\xi^{k-1})\frac{\partial \xi^k}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = \frac{1}{\Delta t}\int_{-L}^{L_t} h^{n-1}\phi dx \quad \forall \phi \in H^1_{N,0}$$

  * $h^n := \xi^K$

1.8 Discrétisation en espace

Découpons l'intervalle d'étude $[-L, L_t]$ en N+1 points :



Considérons l'espace d'éléments finis (K, P, Σ) suivant :

- $K = [x_i, x_{i+1}] \in [-L, L_t]; i = 0 \dots N$ maillage du domaine
- $P = P_1$, espace des polynômes de degré 1
- Σ est constitué des polynômes de Lagrange de degré 1

On a utilisé deux formules de quadrature pour évaluer les intégrales numériques composant cette expression.

Le premier terme : $\displaystyle\int_{-L}^{L_t} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \phi dx$

a été calculé par la formule des trapèzes : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}[b - a]$

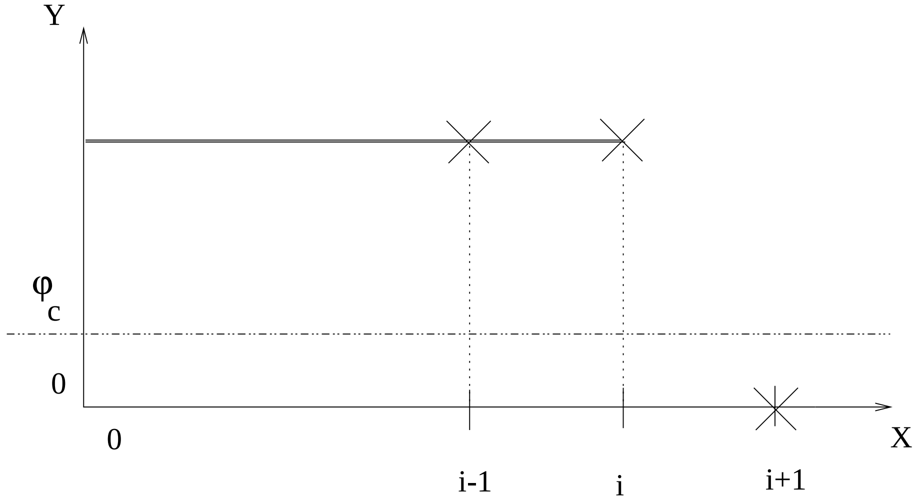
Le second terme : $\displaystyle\int_{-L}^{L_t} \eta(h^{n+1}) \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

a été calculé par la formule du point milieu : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})[b - a]$

l'utilisation de cette seconde formule a été rendue nécesaire par les choix numériques faits (voir 1.4 page 13)pour utiliser l'expression $\eta(h)$ dans son domaine de validité.

<u>En effet</u> :

considérons la situation décrite par le schéma suivant :
(où φ_c correspond à la hauteur critique d'écoulement)



On a $\eta(h_{i-1}) = 0 \; car \; \dfrac{\partial h_{i-1}}{\partial x} = 0$

et $\eta(h_{i+1}) = 0 \; car \; h_{i+1} < \varphi_c$

Ainsi le calcul avec la première formule donne : $\dfrac{\eta(h_{i+1}) + \eta(h_{i-1})}{2} = 0$

Alors que la seconde formule nous donne : $\eta(h_{i+\frac{1}{2}}) \neq 0$

Seule la seconde formule permet à l'algorithme d'évoluer, et donc au fluide de s'écouler.

1.9 Système matriciel obtenu

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & & & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & & & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_0^t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

avec :

- $a_{00} = \dfrac{x_1 - x_0}{2\Delta t} + \dfrac{\eta(x_{\frac{1}{2}})}{x_1 - x_0}$
- $a_{ii} = \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} + \dfrac{\eta(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_i - x_{i-1}} + \dfrac{\eta(x_{i+\frac{1}{2}})}{x_{i+1} - x_i}$ pour i = 1 à n-1
- $a_{ii-1} = -\dfrac{\eta(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_i - x_{i-1}}$
- $a_{ii+1} = -\dfrac{\eta(x_{i+\frac{1}{2}})}{x_{i+1} - x_i}$
- $a_{nn} = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{2\Delta t} + \dfrac{\eta(x_{n+\frac{1}{2}})}{x_{n+1} - x_n}$
- $b_0 = \dfrac{x_1 - x_0}{2\Delta t} h_0^t$
- $b_i = \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} h_i^t$ pour i = 1 à n-1
- $b_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{2\Delta t} h_n^t$

La matrice est symétrique : $\forall i = 1 \ldots n$, $a_{ii-1} = a_{i-1i}$

La matrice est à diagonale dominante : $\forall i = 1 \ldots n$, $|a_{ii}| \geq |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}|$

La matrice A est donc inversible, ce qui assure donc à chaque itération l'existence et l'unicité de la solution.

A chaque itération, on obtient un système linéaire de la forme $Ax = b$ à résoudre.
La matrice A étant tridiagonale et symétrique, la résolution est assurée par un algorithme de descente et de remontée de type Gauss-LU adapté à la forme particulière de la matrice utilisant un stockage compacté des données.

Chapitre 2

Exploitation des résultats

2.1 Paramètres de convergence

L'étude présentée ici s'inscrivant dans le prolongement direct des travaux précédemment effectués sur le sujet, les règles de convergence spatio-temporelles établies par Y.Cornet [2] s'appliquent; à ceci près qu'elles ne font plus intervenir la longueur L du réservoir, qui dans notre cas a été ramenée à 1 par adimensionnement.

Nous choisissons ici de mettre en évidence le rôle prépondérant du nombre d'itérations de type point-fixe effectué à chaque itération en temps (voir l'algorithme continu 1.7 page 15).

Pour cela nous avons considéré : $Od = 10^{-2}$, $\varphi_c = 0$ et $\Delta\, x = 10^{-3}$.

Les figures 1,2 et 3 montrent une convergence vers la solution numérique pour $\Delta\, t$ et $\Delta\, x$ fixés quand on accroît le nombre d'itérations en point fixe. Ceci étant une conséquence directe de l'algorithme continu présenté page.

La précision obtenue dans ce cas est de 10^{-2}, ce qui est en accord avec les chiffres présentés par Y.Cornet [2] page 17.

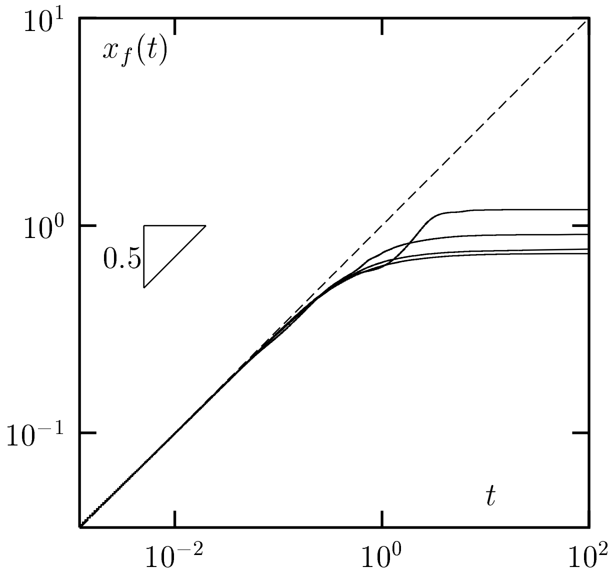


Figure 1: Influence du nombre d'itérations point-fixe (1, 10, 100, 1000 de haut en bas) sur l'abscisse du front pour $Od = 10^{-2}$ et $\varphi_c = 0$ avec $\Delta x = 10^{-3}$ et n-decade-log = 1000.

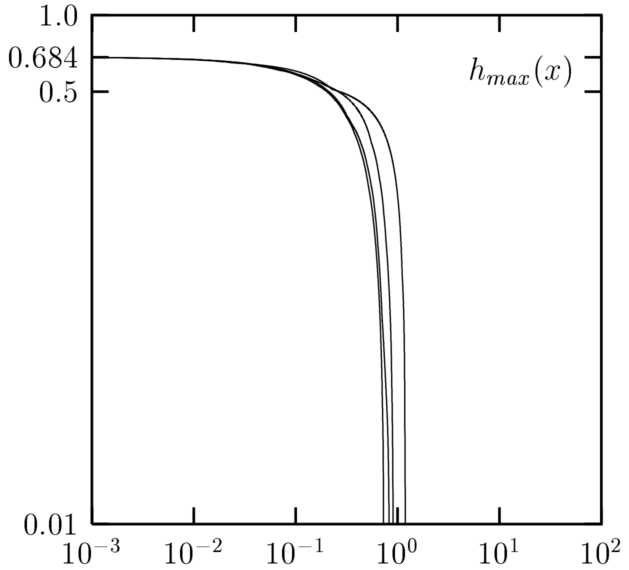


Figure 2: Influence du nombre d'itérations point-fixe (1, 10, 100, 1000 de droite à gauche) sur la hauteur maximum atteinte pour $Od = 10^{-2}$ et $\varphi_c = 0$ avec $\Delta x = 10^{-3}$ et n-decade-log = 1000.

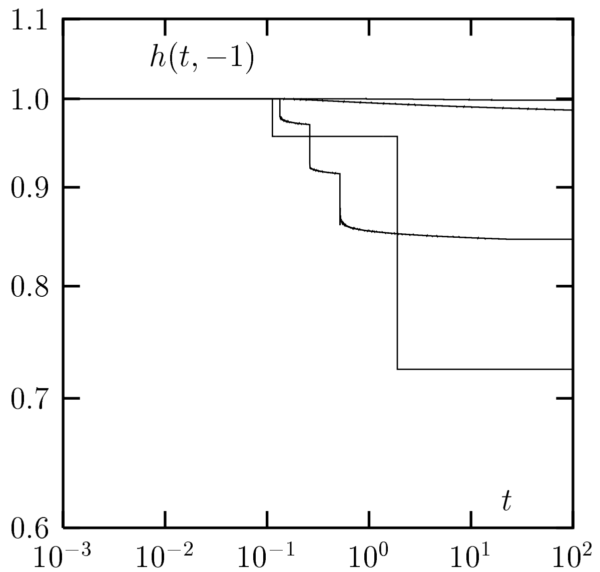


Figure 3: Influence du nombre d'itérations point-fixe (1, 10, 100, 1000 de bas en haut) sur la hauteur en amont du barrage pour $Od = 10^{-2}$ et $\varphi_c = 0$ avec $\Delta x = 10^{-3}$ et n-decade-log = 1000.

Par contre, le rôle de ces itérations point-fixe est le plus typiquement mis en valeur dans la figure suivante qui présente l'évolution de la hauteur maximum atteinte au cours de l'écoulement en aval du barrage en fonction de la discrétisation temporelle.

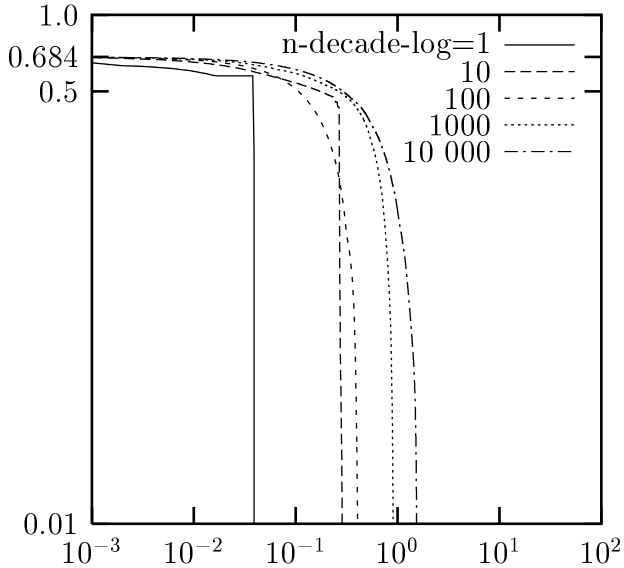


Figure 4: Influence de la discrétisation temporelle sur la hauteur maximum atteinte pour $Od = 10^{-2}$ et $\varphi_c = 0$ avec $\Delta x = 10^{-3}$ et n-fix = 10.

Alors qu'il avait été mis en évidence par Y.Cornet voir [2] page 17 que pour $\Delta\, t \;=\; 2\, 10^{-3}$ l'écart constaté par rapport à $\Delta\, t = 10^{-4}$ était de $4\, 10^{-4}$, si l'on n'effectue que 10 itérations point-fixe, l'erreur constatée par rapport à $\Delta\, t = 10^{-4}$ (on considère la décade 10^0 à 10^1) est de l'ordre de : $5\, 10^{-1}$.

Ceci montre que le nombre d'itérations point-fixe effectué à chaque itération en temps est un paramètre de convergence crucial pour ce problème hautement non-linéaire.

Par suite, les temps de calcul nécessaires pour atteindre une solution numérique sont multipliés par autant d'itérations point-fixe (le nombre utilisé dans la plupart des cas étant : 100).

2.2 Résultats

Les résultats présentés dans cette partie concernent un cas particulier des fluides de Hershel-Bulkley dont nous avons détaillé la mise en oeuvre informatique dans les précédents paragraphes.

Nous nous intéressons donc au cas où le coefficient d'Hershel-Bulkley (noté n) est égal à 1, ce qui correspond aux fluides de Bingham.

On rappelle que lors de la mise en place du problème, on a ramené l'ensemble des variables physiques de la situation à deux paramètres.

Ces deux paramètres, Od et φ_c correspondent respectivement à :

Od : une contrainte seuil ramenée aux caractéristiques géométriques du problème

φ_c : le produit de la contrainte seuil par le paramètre de forme introduit par J.M.PIAU voir (C.1.4) page 51 ce qui revient à considérer les contraintes d'élongation.

2.2.1 Contraintes d'élongation ignorées

Dans la première partie du travail d'exploitation des résultats, nous considérons que les contraintes d'élongation sont ignorées.

Nous nous sommes donc attachés à étudier le comportement du modèle en fonction du second paramètre : Od.

Considérons dans un premier temps l'allure générale que revêt l'écoulement du fluide après la rupture du barrage.

Les figures 5 et 6 représentent l'évolution de la surface libre autour de la position de rupture du barrage dans le cas newtonien, on constate sur celles-ci que les surfaces libres successives présentent un point de concours pour les temps très petits (< 0.2) voir figure 5. Ce point se situe à l'ordonnée 0.684 et a déjà été mis en évidence par P.Saramito voir [8].

Par contre, pour des temps plus élevés (figure 6), la surface libre s'affaisse nettement en-dessous de cette ordonnée particulière.

Considérons maintenant le cas d'un fluide à seuil (figures 7 et 8) : les courbes représentant les surfaces libres sont très proches.

Pour les temps très petits une étude plus précise montre que dans la situation présentée ici est même supperposable jusqu'a $t = 0.2$.

Au delà, le comportement reste identique, à ceci près que le front avance moins rapidement. En regardant attentivement les abscisses finales du front sur les figures 6 et 8, on constate effectivement une légère différence.

A ce stade, l'influence de la contrainte seuil ne semble toutefois pas, sur cet exemple prépondérante sur l'écoulement du fluide.

Considérons maintenant des temps beaucoup plus eĺevés : jusqu'à 10^8

Les deux figures 9 et 10 représentent l'évolution de la surface libre pour $Od = 0$ (figure 7) et $Od = 10^{-6}6$ (figure 8).

L'aspect notable le plus important est que le fluide à seuil s'arrête en un temps fini (les surfaces libres ultérieures à 10^6 sont supperposées à la dernière courbe représentée), tandis que le fluide newtonien, continue de s'écouler car nous nous situons dans un problème à surface libre,.

Ajoutons qu'une étude plus précise (ou une simple supperposition des figures) montre que le fluide newtonien s'écoule, et s'affaisse plus rapidement que le fluide à seuil.

Remarquons les paliers relevés aux temps 10^5 et 10^6 sur la figure 9, ils correspondent à une discrétisation temporelle insuffisante.

Nous avons par la suite fait varier le paramètre Od dans l'intervalle $[10^{-1}, 10^{-2}]$.
Il en résulte les courbes 11 et 12 qui montrent que lorsque Od tend vers une valeur nulle, on tend asymptotiquement vers le cas newtonien.

Considérons la courbe donnant la position du front en fonction de Od. On constate que pour des Od “suffisamment petits” ($\leq 10^{-3}$ sur notre exemple), on retrouve les deux régimes d'écoulement en pente $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ du cas newtonien. Un troixième “régime apparaissant” : l'arrêt.

La figure 13 représente l'évolution de l'abscisse d'arrêt en fonction d eOd pour $\varphi_c = 0$. On en a déduit une loi approchant cette abscisse en fonction du paramètre relatif au seuil : Od.

$$x_{arrêt}(Od) = \frac{1}{a\,Od^p + b\,Od^q} \tag{2.1}$$

Où p et q correspondent aux pentes des asymptotes de la courbe représentée figure 13.

Les résultats trouvés pour $Od \geq 10^{-2}$ sont encore sensibles aux paramètres numériques ($\Delta\, x$,n-fix,...) et sont donc susceptibles de contenir des erreurs, nous ne donnerons ici que l'expression de cette loi pour $Od \leq 10^{-3}$

$$x_{arrêt}(Od) = 0.21\, Od^{-\frac{1}{3}} \tag{2.2}$$

Associons-lui la loi trouvée par P.Saramito [8] donnant l'abscisse du front en fonction du temps pour les fluides newtoniens.

On peut ainsi en déduire une approximation du temps d'arrêt en fonction de Od.

Rappelons la loi trouvée par P.Saramito :

$$x_f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1.02\, t^{\frac{1}{2}} & si\ t < 0.208 \\ 1.89\, t^{\frac{1}{5}} - 1 & sinon \end{cases} \tag{2.3}$$

D'où la loi suivante (les temps considérés sur la figure 11 se situent dans le second régime d'écoulement)

$$t_{arrêt}(Od) \;=\; \left(\frac{1 + 0.21\, Od^{-\frac{1}{3}}}{1.89} \right)^5 \tag{2.4}$$

2.2.2 Contraintes d'élongation prises en compte

Dans un second temps, une fois le comportement de l'algorithme établi en fonction de l'influence du seuil (Od), cherchons à connaître la contribution des contraintes d'élongation.

Dans l'état actuel des calculs menés, on ne peut présenter ici que 2 figures correspondant au pendant des figures 5-6 et 7-8, avec $Od = 10^{-6}$ et $\varphi_c = 0.4$.

Une simple comparaison visuelle donne un idée de la contribution des contraintes élongationnelles qui semble donc a priori très importante.

Une étude est en cours pour compléter ces premiers résultats.

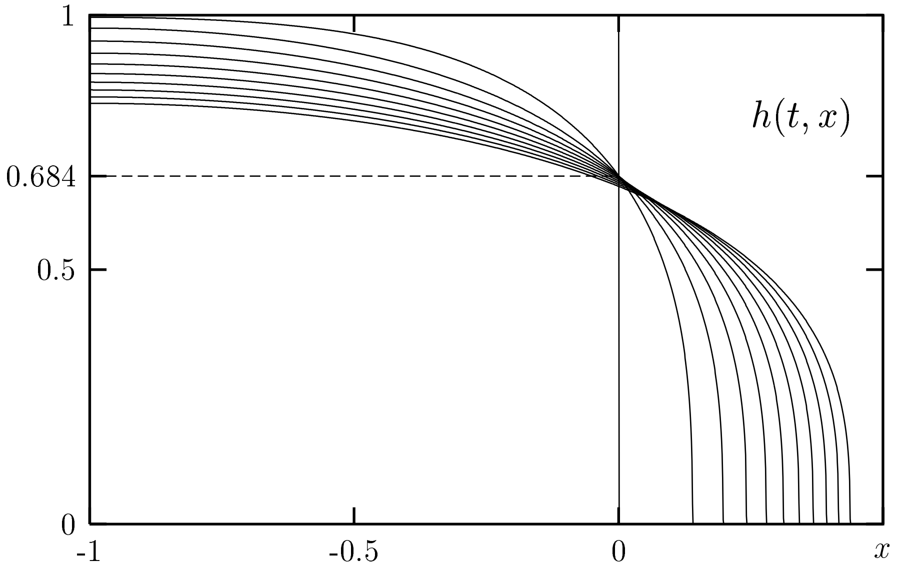


Figure 5: Surfaces libres autour de la position du barrage pour les petits temps (t= 0, 0.02, 0.04, ...,0.2, de gauche à doite), pour $Od = 0$ et $\varphi_c = 0$.

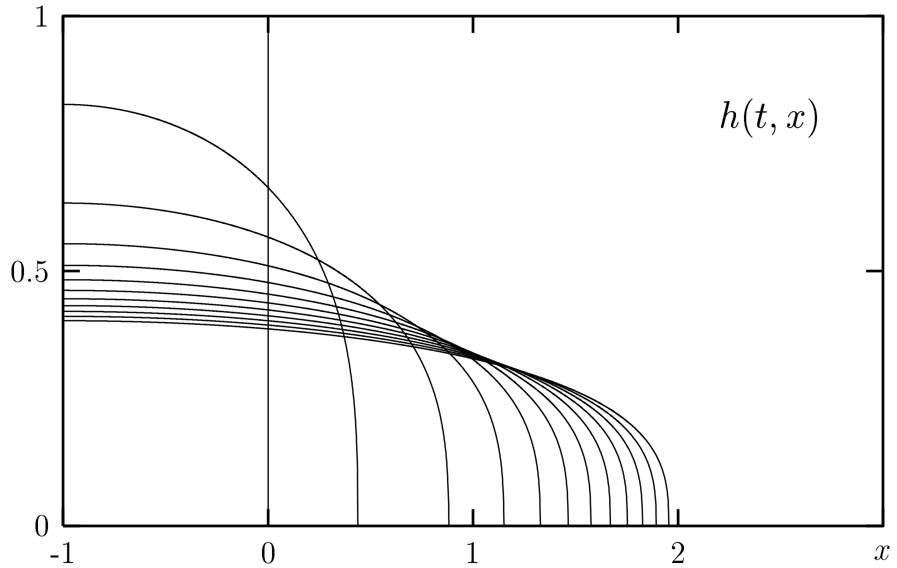


Figure 6: Surfaces libres pour les temps intermédiaires (t= 0, 0.2, 1, 2 ...,10, de gauche à doite), pour $Od = 0$ et $\varphi_c = 0$.

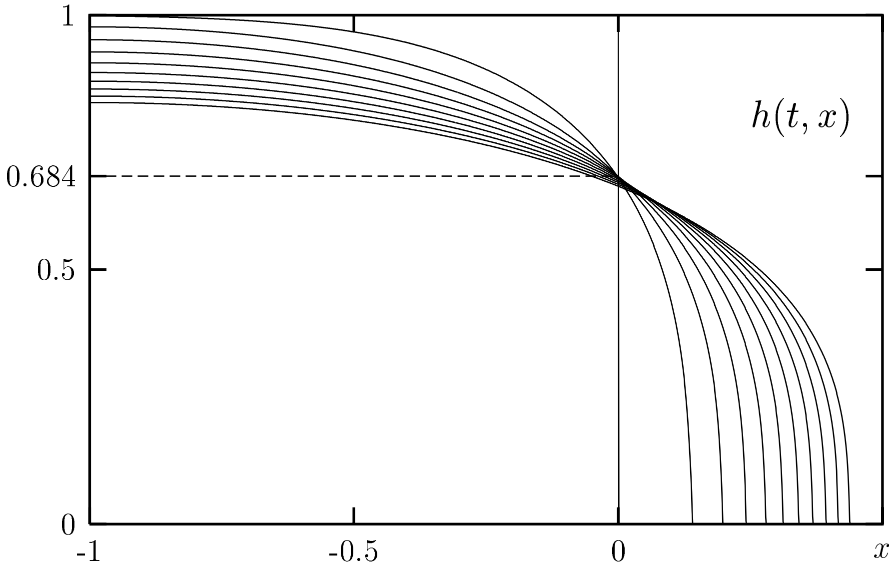


Figure 7: Surfaces libres autour de la position du barrage pour les petits temps (t= 0, 0.02, 0.04, ...,0.2, de gauche à doite), pour $Od = 10^{-6}$ et $\varphi_c = 0$.

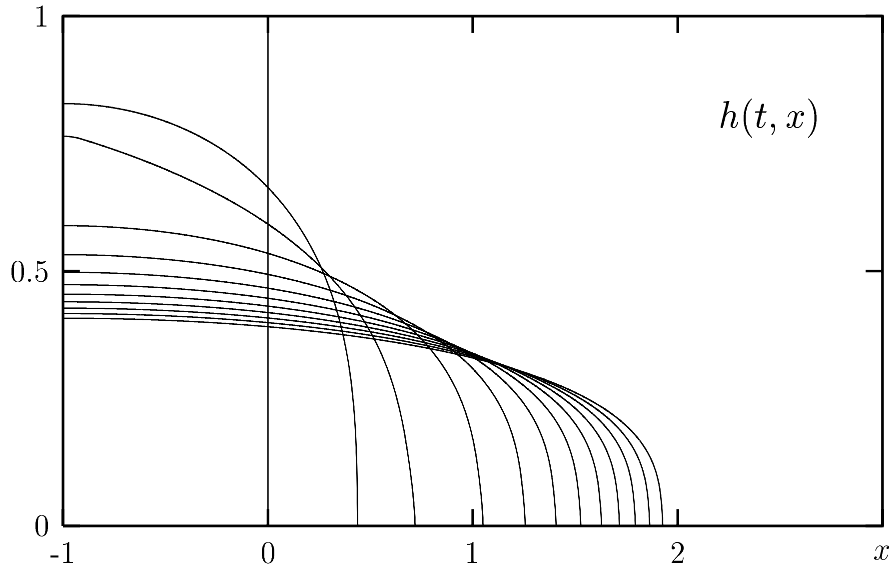


Figure 8: Surfaces libres pour les temps intermédiaires (t= 0, 0.2, 1, 2 ...,10, de gauche à doite), pour $Od = 10^{-6}$ et $\varphi_c = 0$.

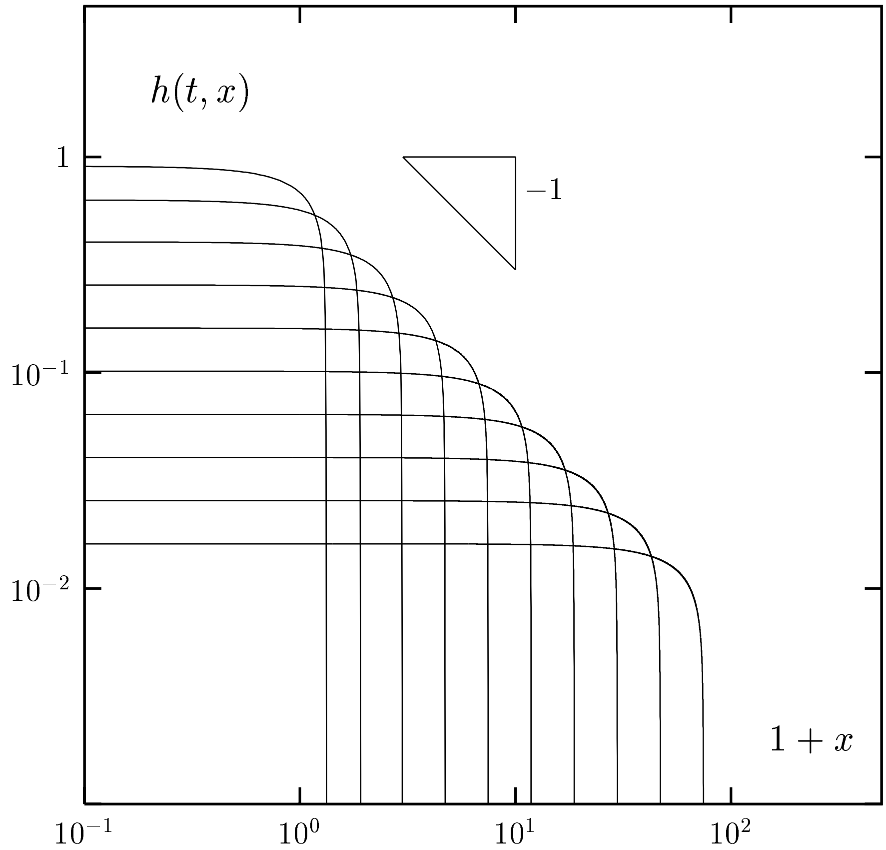


Figure 9: Surfaces libres pour les grands temps(t $= 10^{-1}$,10^0, 10^1, ..., 10^6, de gauche à doite), pour $Od = 0$ et $\varphi_c = 0$.

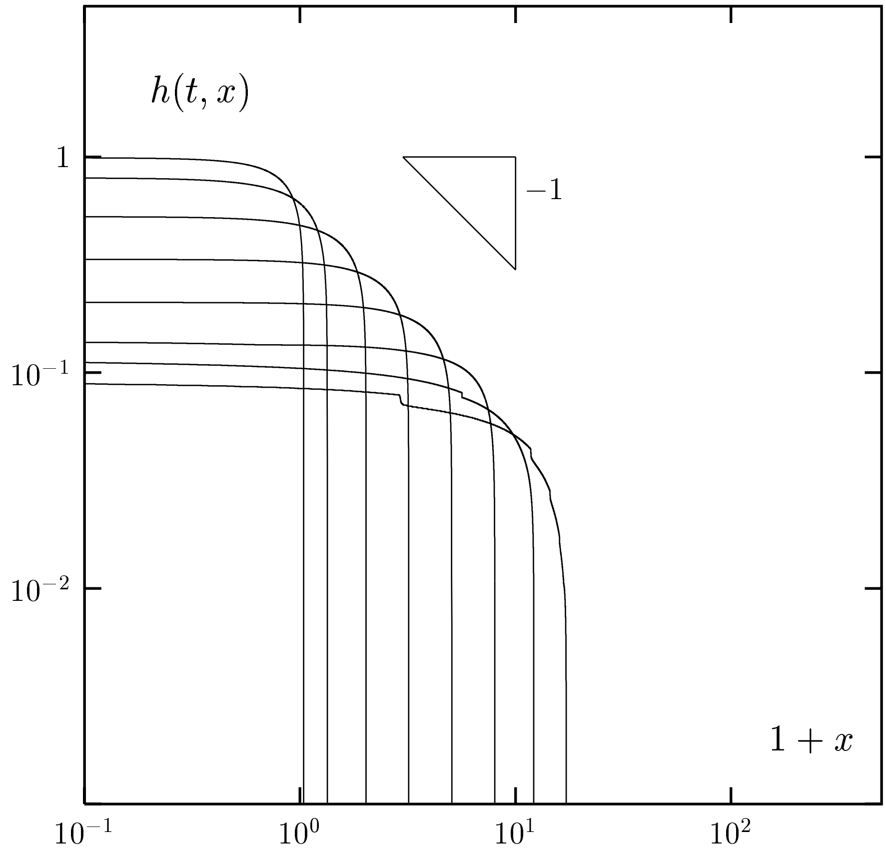


Figure 10: Surfaces libres pour les grands temps(t $= 10^{-1}$,10^{0}, 10^{1}, ..., 10^{6}, de gauche à doite), pour $Od = 10^{-6}$ et $\varphi_c = 0$.

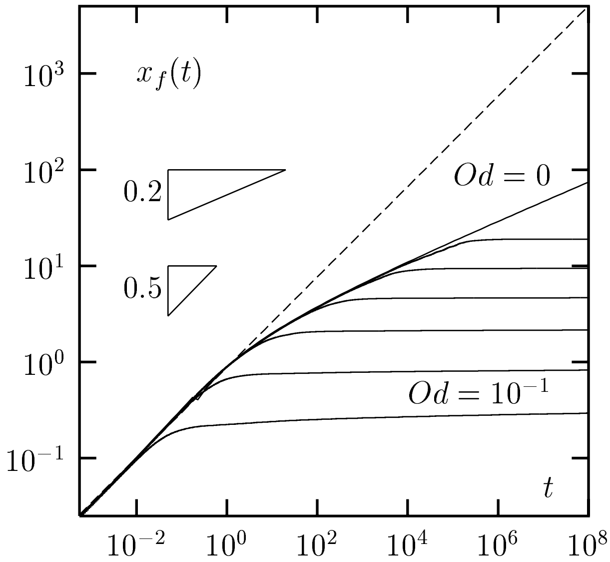


Figure 11: Position du front $Od = 10^{-1}$, $Od = 10^{-2}$, ...$Od = 10^{-6}$, $Od = 0$ de bas en haut, et $\varphi_c = 0$.

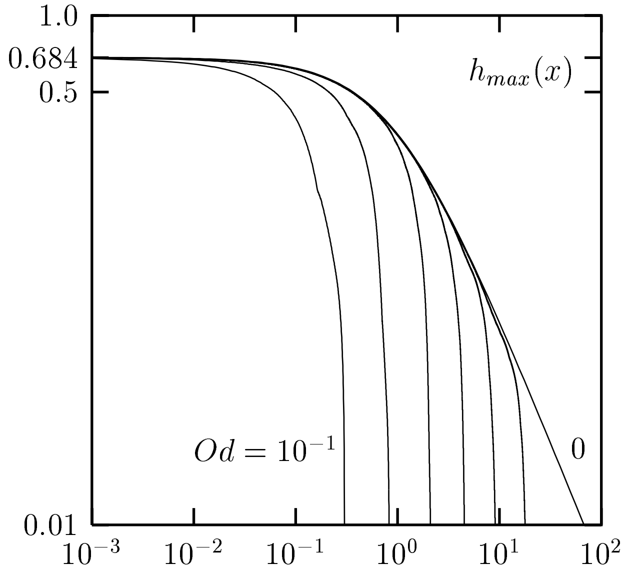


Figure 12: Hauteur maximum atteinte au cours de l'écoulement $Od = 10^{-1}$, $Od = 10^{-2}$, ...$Od = 10^{-6}$, $Od = 0$ de gauche à doite, et $\varphi_c = 0$.

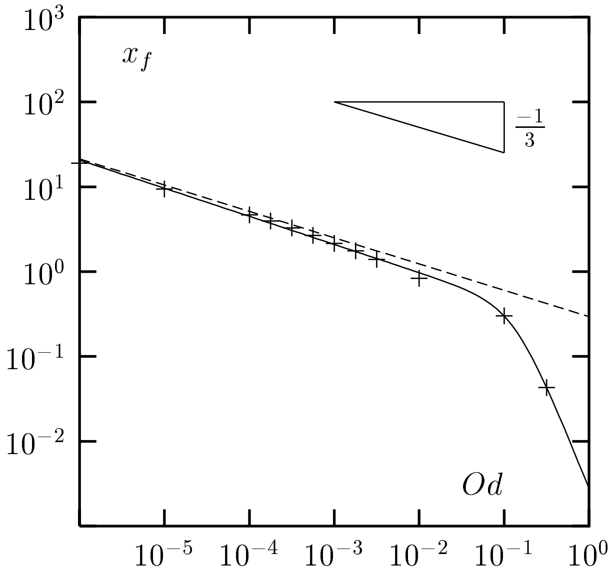


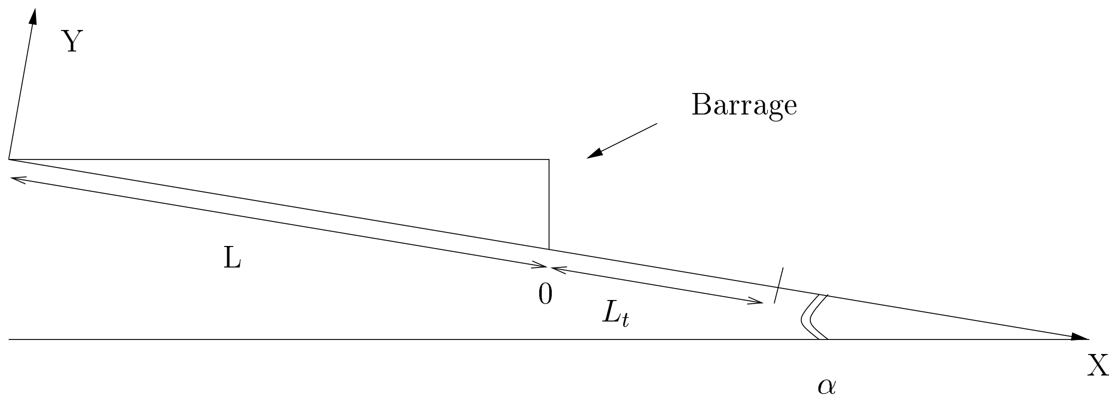
Figure 13: Abscisse d'arrêt en fonction de Od pour $\varphi_c = 0$

Annexe A

Canal incliné

A.1 Présentation du problème

Désormais, le réservoir que nous considérons se situe sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale. Les dimensions du réservoir étant par ailleurs les mêmes que dans le cas horizontal.



A.2 Condition initiale et conditions aux limites

- Condition initiale

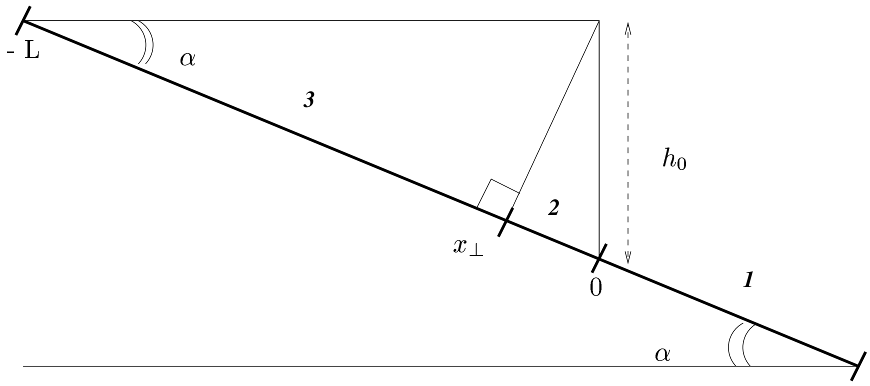
  On se situe en désaccord avec la condition exprimée par Y.Cornet cf [2] page 44

$$h(t=0,x) = \begin{cases} (L-|x|)\tan\alpha & si \quad -L \leq x \leq x_\perp \\ \dfrac{|x|}{\tan\alpha} & si \quad x_\perp < x \leq 0 \\ 0 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

  avec $x_\perp = h_0 \sin\alpha$

Le point de vue exprimé ici se visualise bien sur la figure ci-dessous :

Il tient compte de l'inclinaison du réservoir par rapport à l'horizontale.



On différentie trois cas :

1. On se situe en aval du barrage ($x \geq 0$) ; la hauteur initiale de fluide est nulle
2. Si x se situe entre l'aplomb du barrage et sa projection hortogonale ($x_\perp$) sur le plan incliné la hauteur de fluide s'accroît.
3. Enfin dernière possibilité, on se situe en amont de $x_\perp$: la hauteur de fluide diminue pour devenir nulle.

- Conditions limites
  - En aval du barrage : comme au chapitre 1, on choisit L_t tel que $L_t - L >> 1$ d'où la condition limite de Dirichlet homogène :
    $h(t, x = L_t) = 0$
  - En amont : on reprend la condition considérée par Y.Cornet [2] qui considère qu'au fond du réservoir la hauteur de fluide est nulle. En effet on remarque que la longueur du réservoir L est totalement liée à l'angle α, ou ce qui revient au même, à la hauteur de fluide au niveau du barrage(en x = 0).
    D'où la condition de Dirichlet homogène :

    $h(t, x = -L) = 0$

A.3 Equation et adimensionnement

On reprend l'expression de l'équation (C.9) donnée en Annexe C.2.3 page 55

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} \quad + \quad & \frac{1}{m+2}\left|\frac{\rho\, g}{k}\right|^m \frac{\partial}{\partial x}\left[\left|\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right|^m\right. \\
\times \quad & \left|h - \frac{\tau_0}{\rho\, g\left[\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]}\right|^{m+1} \\
\times \quad & \left.\left(h + \frac{\tau_0}{(m+1)\rho\, g\left[\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]}\right)\right] \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

On l'utilise sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} \quad + \quad & \frac{1}{m+2}\left|\frac{\rho\, g}{k}\right|^m \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right. \\
\times \quad & \left|\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{-3} \\
\times \quad & \left|h\left[\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\tau_0}{\rho\, g}\right|^{m+1} \\
\times \quad & \left.\left(h\left[\sin\alpha - \left(\cos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho\, gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\tau_0}{(m+1)\rho\, g}\right)\right] \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

les paramètres d'adimensionnement utilisés sont les suivants :

On considère L et H une longueur et une hauteur caractéristiques respectivement :
$\hat{x} = \dfrac{x}{L}$; $\hat{h} = \dfrac{h}{H}$; $\hat{\tau} = \dfrac{\tau_0}{\rho g H}$; $\hat{t} = \dfrac{t}{t_0}$; avec $t_0 = 4\dfrac{m+2}{(\cos\alpha)^{m-1}}\left|\dfrac{L}{H}\right|^{m+1}\left|\dfrac{k}{\rho g H}\right|^m$

$Od = \dfrac{\hat{\tau}}{\varepsilon \cos\alpha}$; $\varphi_c = \dfrac{\Phi\hat{\tau}}{\cos\alpha}$; avec $\varepsilon = \dfrac{H}{L}$

et on pose $\tan\theta = \dfrac{\tan\alpha}{\varepsilon}$

Aux deux paramètres Od et φ_c que l'on trouvait déjà dans le cas d'un canal horizontal, vient se rajouter θ (ou α) qui correspond à l'angle d'inclinaison du canal par rapport à l'horizontale.

D'où l'on tire l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta_1(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta_2(h)\right] = 0 \tag{A.2}$$

avec

- $\eta_1(h) = h^2(h - \varphi_c)\eta(h)$
- $\eta_2(h) = h^3 \tan\theta\, \eta(h)$
- et

$$\begin{aligned}\eta(h) &= \left| h\tan\theta + (h-\varphi_c)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right|^{-3} \left|\left[h\tan\theta + (h-\varphi_c)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right] - Od\right|^{m+1} \\ &\times \left(\left[h\tan\theta + (h-\varphi_c)\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right] + \frac{Od}{m+1}\right)\end{aligned}$$

L'approximation en espace de cette équation sera assurée par une discrétisation spacio-temporelle de type Différences-Finies[1].

Comme dans le cas horizontal, on peut tirer de l'équation précédente le cas newtonien généralisé, qui correspond à la situation suivante :

$$Od = \varphi_c = 0 \ et \ m \neq 0$$

d'où l'on tire :

$$\eta(h) = 4\cos\theta + \left| h\tan\theta + h\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right|^{m-1}$$

[1]Comme dans le cas horizontal, on a préféré adopter ce schéma de résolution à l'utilisation d'un solveur (voir B page 42)

et :

$\eta_1(h) = h^3\eta(h)$

$\eta_2(h) = h^3 \tan\theta\eta(h)$

De plus, si l'on considère $m = 1$, $\varphi_c = 0$ et $\tau_0 = 0$ alors $\eta(h) = 4\cos\alpha$ et on retrouve le cas newtonien incliné [2]:

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial h}{\partial t} \quad - \quad 4\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad + \quad 4\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \tan\theta\right) \quad = \quad 0$$

A.4 Situations à contrôler numériquement

Le raisonnement est le même que dans le cas d'un canal horizontal:

pour que, numériquement, $\eta_1(h)$ et $\eta_2(h)$ soient définis et positifs pour tout x, on a dégagé les cas suivants, cas pour lesquels on a considéré $\eta_1(h) = 0$ et $\eta_2(h) = 0$

◇ si $h(x) \leq \varphi_c$

Le fluide ne s'écoule pas en-dessous d'une hauteur limite : c'est une propriété des fluides à seuil.

◇ si $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x} = 0$: terme en cause $\left| h\tan\theta + (h - \varphi_c)\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|\right|^{-3}$

Si $h\tan\theta \to 0$ alors on retrouve la même situation que dans le cas horizontal : un comportement asymptotique de l'écoulement de la partie amont du fluide pour les grands temps et des angles d'inclinaison faibles.

◇ Considérons le terme : $\left|\left[h\tan\theta + (h - \varphi_c)\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|\right] - Od\right|^{m+1}$

m n'étant pas une puissance entière,

il est nécessaire de conserver $Od \leq h\tan\theta + (h - \varphi_c)\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|$

[2]voir [2] page 50

A.5 Discrétisation

la discrétisation temporelle est la même que celle utilisée dans le cas horizontal.

Le terme non-linéaire est lui-aussi traité de la même façon.

Un schéma de Différences Finies nous donne l'équation suivante:

$$\frac{h^{n+1}}{\Delta t} \quad - \quad \eta_1(h^{n+1})\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h^{n+1}}{\partial x}\right] \quad + \quad 3(h^n)^2 \tan(\theta)\eta(h^{n+1})\frac{\partial}{\partial x}\left(h^{n+1}\right) \quad = \quad \frac{h^n}{\Delta t}$$

L'équation (A.2) a la forme d'une équation de diffusion-convection.
Lorsque h devient petit, c'est à dire près du front, le terme de convection $\frac{\partial}{\partial x}(\eta_1(h)$ est prédominant :

- $\eta_1(h^{n+1}) \simeq h^3$
- $3(h^n)^2 \tan(\theta)\eta(h^{n+1}) \simeq h^2$

Afin d'eviter que la solution numérique ne présente des oscillations artificielles, un schéma décentré vers l'amont est requis[3].

Nous affectons au schéma de Différences Finies un coefficient de décentrage $\omega_i \in [0, \frac{1}{2}]$:

- $\omega_i = 0$ cas décentré au maximum
- $\omega_i = \frac{1}{2}$ cas centré

Ainsi avec cette discrétisation, l'équation devient ;

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} \quad - \quad & \frac{\Delta_t}{h^2}\left[\eta_1^n(i-\frac{1}{2})h_{i-1}^{n+1} - \left(\eta_1^n(i-\frac{1}{2}) + \eta_1^n(i+\frac{1}{2})\right)h_i^{n+1} + \eta_1^n(i+\frac{1}{2})h_{i+1}^{n+1}\right] \\ + \quad & 3(h_i^n)^2 \tan\theta\,\eta^n(i)\frac{\Delta t}{h}\left[\omega_i h_{i+1}^{n+1} + (1-2\omega_i)h_i^{n+1} - (1-\omega_i)h_{i-1}^{n+1}\right] \quad = \quad h_i^n \end{aligned}$$

Le coefficient de décentrage optimal ω_i est obtenu lorsque la matrice de résolution est à diagonale dominante, sachant que $\omega_i \leq \frac{1}{2}$

[3]Ce phénomène a été mis en évidence par Y.Cornet dans son rapport [2] pages 48 et 49
Il fait pour cela référence à l'ouvrage de Cuvelier [1]. On est donc amené à utiliser un schéma numérique décentré.

A.6 Système matriciel obtenu

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ & & & & a_{NN-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_0^{t+1} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ h_N^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^{t} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ h_N^{t} \end{bmatrix}$$

- $a_{00} = 1 + \dfrac{\Delta t}{h^2}\eta_1^n(\dfrac{1}{2}) \ - 3\,(h_0^n)^2 \tan\theta \eta^n(0)\dfrac{\Delta t}{h}$
- $a_{01} = -\dfrac{\Delta t}{h^2}\eta_1^n(\dfrac{1}{2}) \ + 3\,(h_0^n)^2 \tan\theta \eta^n(0)\dfrac{\Delta t}{h}$
- $a_{ii} = 1 + \dfrac{\Delta t}{h^2}\left(\eta_1^n(i-\dfrac{1}{2}) + \eta_1^n(i+\dfrac{1}{2})\right) \ + 3\,(h_i^n)^2 \tan\theta \eta^n(i)\dfrac{\Delta t}{h}(1-2\omega_i)$
  pour $i = 1$ à $N-1$
- $a_{ii-1} = -\dfrac{\Delta t}{h^2}\eta_1^n(i-\dfrac{1}{2}) \ - 3\,(h_i^n)^2 \tan\theta \eta^n(i)\dfrac{\Delta t}{h}(1-\omega_i)$
  pour $i = 1$ à N
- $a_{ii+1} = -\dfrac{\Delta t}{h^2}\eta_1^n(i+\dfrac{1}{2}) \ + 3\,(h_i^n)^2 \tan\theta \eta^n(i)\dfrac{\Delta t}{h}\omega_i$
  pour $i = 0$ à $N-1$
- $a_{ij} = 0 \ \forall j > i+1 \ ; \ j < i-1$

la matrice est à diagonale dominante si :

$|a_{ii}| \geq |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| \quad \forall i$

Après calculs, on obtient la condition suivante sur ω_i

$$\omega_i \quad \leq \quad \frac{2}{3h\tan\theta}\frac{\eta_1^n(i) + \eta_1^n(i+1)}{(h_i^n)^2\,\eta^n(i)}$$

Le coefficient de décentrage optimal est obtenu lorsque l'égalité est réalisée.

A.7 Algorithme et mise en oeuvre informatique

L'algorithme utilisé est le même que celui décrit pour le cas d'un canal horizontal.

Pour ce qui est de la résolution du système à résoudre à chaque itération, elle est assurée par le même type d'algorithme GAUSS LU adapté à un stockage 3 bandes.

Annexe B

Choix de la méthode de résolution

Concernant la résolution de l'équation différentielle (A.2)

Nous avons testé une approche de résolution de l'équation différentielle ne faisant pas intervenir des schémas aux Différences Finies ou de type Eléments Finis, et ce dans le but d'obtenir une adaptation en discrétisation en espace.

Pour cela nous avons utilisé un solveur couplé avec une méthode de tir. Le solveur utilisé est le suivant : LSODE de Hindmarsh (voir [5])

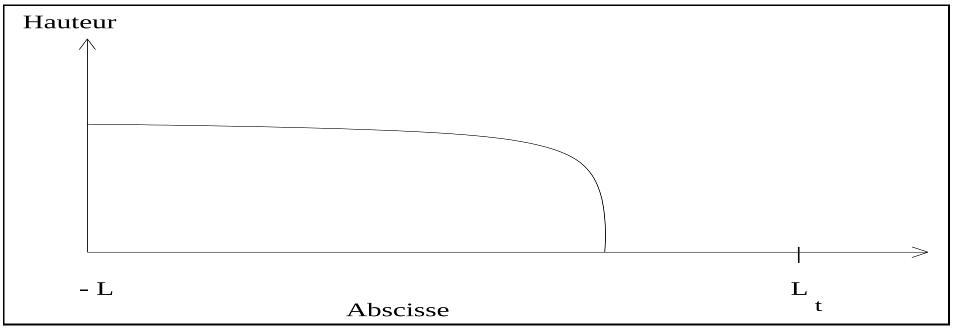
Les tests effectués ont été faits dans le cas de l'écoulement d'un fluide Newtonien après rupture d'un barrage horizontal.
On pouvait ainsi valider les résultats obtenus avec les travaux déjà effectués sur le sujet.
L'algorithme pressenti était le suivant :

- $h(t = 0) := h_0$
- pour $t = 0$ à $t = t_{final}$

  $h^{t+1} = LSODE(h^t)$

  fin pour

A chaque itération, la solution calculée devait de plus remplir les conditions limites du problème décrites par le schéma suivant représentant le profil de la surface libre à un instant t quelconque de l'écoulement.



Conditions limites :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x = -L) = 0 \quad ; \quad h(x = L_f) = 0$$

On a donc appliqué une méthode de tir pour aboutir à chaque itération à une solution "acceptable" au sens des conditions limites.
Il s'agissait de fournir au solveur ξ^t "proche" de h^t tel que $\xi^{t+1}(x = L_t) = 0$, et ce à chaque itération.

D'où le nouvel algorithme :

- $h(t=0) = h_0$
- $t = 0$ à $t = t_{final}$
  - tant que (non-conditions limites)
    - $\xi^t = f(h^t)$
    - $\xi^{t+1} = LSODE(\xi^t)$

    fin tant que

  fin pour

où f est une fonction de recherche de ξ^t "proche" de h^t fondée sur une méthode dichotomique dont les bornes de bases étaient fixées à 0 et h^t.

Il s'est avéré en fin de compte très lent de faire converger cette recherche de solution satisfaisant aux conditions limites.

On a remarqué en effet que dans les cas les plus simples (ξ^t constante par morceaux) implémentés :

si :

$\xi^{t+1} = LSODE(\xi^t)$ avec ξ^{t+1} satisfaisant aux conditions limites

alors :

$\xi^{t+1} = LSODE(\xi^t \pm 10^{-10})$ ξ^{t+1} ne satisfait plus aux conditions limites

Cette approche a été finalement abandonnée, au profit de schémas numériques de type Eléments Finis (canal horizontal) et Différences Finies(canal incliné), plus robustes.

Annexe C

Détermination de l'EDP

Dans le but d'être le plus complet possible, nous présentons dans la première partie de l'annexe les calculs de J.M.PIAU (voir [7]) mettant en place toutes les hypothèses. C'est à partir de ces travaux que nous déterminons dans la seconde partie de cette annexe l'équation aux dérivées partielles (C.9) présentée page 55.

C.1 Mise en place du problème

C.1.1 Equations régissant l'écoulement

on note $\mathbf{u} = (u; v)$, où u et v sont les composantes de la vitesse dans un repère Ox, Oy.

L'écoulement d'un fluide isochore est régi par les équations suivantes :

Equation de continuité : $\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0}$

Equation du mouvement : $\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\,\mathbf{g} - \nabla p + \mathrm{div}\, 2\,\eta D(\mathbf{u})}$

avec :

ρ la densité du fluide
$\mathbf{g}$ l'accélération due à la gravité
η la viscosité apparente

C.1.2 Equations constitutives

Les équations constitutives d'un fluide de type Herschel-Bulkley sont données par :

$$\boxed{\begin{array}{rcllcl} \tau & = & 2\eta \mathrm{D}(\mathbf{u}) & \text{si} & -\tau_{II} > & \tau_0^2 \\ \mathrm{D}(\mathbf{u}) & = & 0 & \text{si} & -\tau_{II} \leq & \tau_0^2 \end{array}}$$

avec :

$$D_{II} \quad = \quad -\frac{trD^2}{2} \quad ; \quad \tau_{II} \quad = \quad -\frac{tr\tau^2}{2}$$

et:

$$\eta \quad = \quad k(-4D_{II})^{(\frac{n-1}{2})} \quad + \quad \frac{\tau_0}{(-4D_{II})^{(\frac{1}{2})}}$$

où k est la consistance et τ_0 la contrainte seuil (constante).

D'autre part :

$$trD^2 \quad = \quad u_{,x}^2 \quad + \quad \frac{1}{2}(u_{,y}+u_{,x})^2 \quad + \quad v_{,y}^2$$

Ce qui entraîne :

$$(-4D_{II})^{(\frac{1}{2})} \quad = \quad [2u_{,x}^2+(u_{,y}+u_{,x})^2+2v_{,y}^2]^{\frac{1}{2}}$$

or l'équation de continuité induit :

$$u_{,x}+v_{,y}=0$$

d'où l'expression :

$$(-4D_{II})^{(\frac{1}{2})} \quad = \quad [4u_{,x}^2+(u_{,y}+u_{,x})^2]^{\frac{1}{2}}$$

C.1.3 Adimensionalisation

Paramètres d'adimensionalisation

On pose : (avec U_0 une vitesse de référence et $\varepsilon \;=\; \frac{H}{L}$ où H et L sont une hauteur et une longueur caractéristique respectivement)

$$\mathrm{X} = \frac{x}{L}\,;\;\; \mathrm{Y} = \frac{y}{\varepsilon L}\,;\;\; \mathrm{T} = \frac{U_0}{L}t\,;\;\; \mathrm{U} = \frac{u}{U_0}\,;\;\; \mathrm{V} = \frac{v}{\varepsilon U_0}\,;$$

$$\mathrm{P} = \frac{p}{\rho U_0^2}\,;\;\; \xi = \frac{\varepsilon L}{U_0}(-4D_{II})^{\frac{1}{2}}$$

en particulier, on a :

$$\eta \quad = \quad k(\frac{U_0}{\varepsilon L})^{n-1}\xi^{n-1} \quad + \quad \frac{\varepsilon L\tau_0}{U_0}\xi^{-1}$$

Projetons l'équation de mouvement sur les deux axes Ox, Oy du système de coordonnées.

Projection de l'équation de mouvement sur l'axe X

$$\rho \frac{du}{dt} \quad + \quad \frac{\partial p}{\partial x} \quad = \quad \rho\, g \sin\alpha \quad + \quad \mathbf{div}(2\,\eta\, D(\mathbf{u}))\,.\,\mathbf{e}_x$$

On a :

$$\rho \frac{du}{dt} \quad = \quad \rho \frac{U_0^2}{L}\frac{dU}{dT}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad = \quad \frac{\rho U_0^2}{L}\frac{\partial P}{\partial X}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,(2\,\eta\, D(\mathbf{u}))\,.\,\mathbf{e}_x \quad = \quad & 2k(\frac{U_0}{\varepsilon L})^{n-1}[\xi^{n-1}u_{,x}]_{,x} \quad + \quad 2\frac{\varepsilon Ls}{U_0}[\xi^{-1}u_{,x}]_{,x} \\ & + \quad k(\frac{U_0}{\varepsilon L}^{n-1}[\xi^{n-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,y} \quad + \quad \frac{\varepsilon Ls}{U_0}[\xi^{-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,y}\end{aligned}$$

de plus :

$$[\xi^{n-1}u_{,x}]_{,x} \quad = \quad \frac{U_0}{L^2}[\xi^{n-1}U_{,X}]_{,X}$$

$$[\xi^{-1}u_{,x}]_{,x} \quad = \quad \frac{U_0}{L^2}[\xi^{-1}U_{,X}]_{,X}$$

$$[\xi^{n-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,y} \quad = \quad \frac{U_0}{(\varepsilon L)^2}[\xi^{n-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,Y}$$

$$[\xi^{n-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,y} \quad = \quad \frac{U_0}{(\varepsilon L)^2}[\xi^{-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,Y}$$

d'où l'expression adimensionalisée de la projection sur X de $\vec{div} 2\eta D$:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,(2\,\eta\, D(\mathbf{u}))\,.\,\mathbf{e}_x \quad = \quad & 2k(\frac{U_0}{\varepsilon L})^{n-1}\frac{U_0}{L^2}[\xi^{n-1}U_{,X}]_{,X} \quad + \quad 2\frac{\varepsilon Ls}{U_0}\frac{U_0}{L^2}[\xi^{-1}U_{,X}]_{,X} \\ & + \quad k(\frac{U_0}{\varepsilon L}^{n-1}\frac{U_0}{(\varepsilon L)^2}[\xi^{n-1}(U_{,Y}+V_{,X})]_{,Y} \quad + \quad \frac{\varepsilon Ls}{U_0}\frac{U_0}{(\varepsilon L)^2}[\xi^{-1}(U_{,Y}+V_{,X})]_{,Y}\end{aligned}$$

Par suite, en multipliant l'équation précédente par $\frac{L}{\rho U_0^2}$, et en posant :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho U_0^{2-n}(\varepsilon L)^n}{k}\varepsilon \\ Fr^2 &= \frac{U_0^2}{g\varepsilon L} \\ Od &= \frac{s\varepsilon}{k}(\frac{L\varepsilon}{U_0})^n \end{aligned}$$

qui sont respectivement les nombres de Reynolds, de Froude et d'Oldroyd

On obtient la projection sur X :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dT} + \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{Fr^2\varepsilon}sin\alpha &+ \frac{1}{Re}\{2\varepsilon^2[\xi^{n-1}U_{,X}]_{,X} + [\xi^{n-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,Y}\} \\ &+ \frac{Od\varepsilon}{Re}\{2[\xi^{-1}U_{,X}]_{,X} + \frac{1}{\varepsilon^2}[\xi^{-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,Y}\} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Projection de l'équation de mouvement sur l'axe Y

En considérant :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,(2\,\eta\,D(\mathbf{u}))\,.\,\mathbf{e}_y &= k(\frac{U_0}{\varepsilon L})^{n-1}[\xi^{n-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,x} + \frac{\varepsilon Ls}{U_0}[\xi^{-1}(u_{,y}+v_{,x})]_{,x} \\ &+ 2k(\frac{U_0}{\varepsilon L}^{n-1}[\xi^{n-1}v_{,y}]_{,y} + 2\frac{\varepsilon Ls}{U_0}[\xi^{-1}v_{,y}]_{,y} \end{aligned}$$

Des calculs rigoureusements similaires conduisent à l'expression de la projection sur Y :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\frac{dV}{dT} + \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{-1}{Fr^2\varepsilon}\cos\alpha &+ \frac{\varepsilon^2}{Re}\{[\xi^{n-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,X} + 2[\xi^{n-1}V_{,Y}]_{,Y}\} \\ &+ \frac{Od\varepsilon}{Re}\{[\xi^{-1}(U_{,Y}+\varepsilon^2 V_{,X})]_{,X} + 2[\xi^{-1}V_{,Y}]_{,Y}\} \end{aligned} \tag{C.2}$$

C.1.4 Barré de Saint-Venant

Expression de la pression

Si l'on considère le cas où $\varepsilon << 1$ et $Re \geq 1$, la relation donnant la projection de l'équation C.2 devient :

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{-1}{Fr^2\varepsilon}\cos\alpha + \frac{Od\varepsilon}{Re}\{[\xi^{-1}(U_{,Y} + \varepsilon^2 V_{,X})]_{,X} + 2[\xi^{-1}V_{,Y}]_{,Y}\}$$

D'autre part on peut négliger la variation de la contrainte de cisaillement suivant X par rapport à la variation de la contrainte normale à Y selon Y. ($t_{YY_{,Y}} >> t_{XY_{,X}}$)

Il en découle donc :

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \tfrac{-1}{Fr^2\varepsilon} cos\alpha + \underbrace{2\frac{Od\varepsilon}{Re}\{[\xi^{-1}V_{,Y}]_{,Y}\}}_{t^s_{YY_{,Y}}}$$

L'index s est là pour indiquer la contribution de la contrainte seuil.

En considérant le cas limite : $p = 0$ *pour* $y = h$; par une simple intégration de cette équation, on obtient, en utilisant les variables dimensionnées l'expression de p :

$$\mathrm{p} = \rho g \cos\alpha(h - y) + t^s_{yy} \tag{C.3}$$

où $t^s_{yy} = \dfrac{2\, s\, v_{,y}}{(4u^2_{,x} + (u_{,y} + v_{,x})^2)^{\frac{1}{2}}}$

Expression de l'équation de mouvement

Par suite :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, g \cos\alpha h_{,x} + t^s_{yy,x}$$

Si $\varepsilon << 1$ et $Re \geq 1$, la relation donnant la projection de l'équation C.1 devient :

$$\frac{dU}{dT} + \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{Fr^2\varepsilon}\sin\alpha + \frac{Od\varepsilon}{Re}\{[\xi^{-1}(\varepsilon^{-2}U_{,Y} + V_{,X})]_{,Y} + 2[\xi^{-1}U_{,X}]_{,X}\}$$

Remplacons dans cette équation $\frac{\partial P}{\partial X}$ par son expression précédemment trouvée , en utilisant les variables dimensionnées, il vient :

$$\boxed{\rho\frac{du}{dt} \quad + \quad \rho g \cos\alpha\frac{dh}{dx} \quad + \quad t^s_{yy,x} \quad = \quad \rho\, g \sin\alpha \quad + \quad t^s_{xx,x} \quad + \quad t^s_{xy,y}}$$

où :

$$t^s_{yy} = 2s(4u^2_{,x} + (u_{,y} + v_{,x})^2)^{\frac{-1}{2}} v_{,y}$$

$$t^s_{xx} = 2s(4u^2_{,x} + (u_{,y} + v_{,x})^2)^{\frac{-1}{2}} u_{,x}$$

$$t^s_{xy} = s\varepsilon(4u^2_{,x} + (u_{,y} + v_{,x})^2)^{\frac{-1}{2}} (u_{,y} + v_{,x})$$

On introduit la notation suivante : $j = \frac{\tau_p}{\rho g h}$

où τ_p est la contrainte de friction principale à la paroi

Par la suite on néglige l'effet d'inertie

En considérant le paramètre de forme (voir J.M Piau [7]) :

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0 h_{,x} \mathrm{sgn} h_{,x}} \int_0^h \left(t^s_{yy} - t^s_{xx}\right)_{,x} dy$$

où sgn(.) désigne la fonction signe :

$$\mathrm{sgn}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \text{-1} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Par intégration entre $y = 0$ et $y = h$, on obtient la forme suivante de l'équation à résoudre :

$$(gcos\alpha - \frac{s}{\rho h}\Phi)\frac{dh}{dx} \quad = \quad g(sin\alpha - j) \qquad \text{(C.4)}$$

C.2 Expression canonique

C.2.1 Profil de vitesse

Soit un fluide de type Hershel-Bulkley en écoulement de cisaillement :

$\tau_{xy}(x,y) \ = \ \tau_0 \ + \ k|u_{,y}|^n$

$\tau_{xx}(x,y) \ = \ \tau_{yy}(x,y) \ = \ 0$

$x \ \in \ I \ ; \ y \ \in \ [0, h(x)]$ I étant un intervalle donné

On considère un écoulement tel que $\dfrac{\partial p}{\partial y} \ = \ 0$, régi par l'équation de mouvement suivante : $\mathbf{div}\,\tau \ = \ \nabla\, p \ - \ \rho\mathbf{g}$

On en tire, après projection sur X et intégration entre $y = 0$ et $y = h$

$$\tau_{xy}(x,y) \quad = \quad -\left(\frac{dp}{dx}(x) \ - \ \rho\, g \sin\alpha\right)(h(x) \ - \ y)$$

On pose $a(x) \ = \ -(p(x)_{,x} \ - \ \rho g sin\alpha)$

a correspond à la chute de pression :

$(a(x) \ > \ 0, \ \forall x \ \in \ I) \ car\,(-p(x)_{,x} \ > \ 0, \ \ \forall x \ \in \ I) \ \ et \sin\alpha \ > \ 0$

d'où $\tau_{xy}(x,y) \ = \ a(x)(h(x) \ - \ y) \ > \ \tau_0 \ \Rightarrow \ y \ < \ h(x) \ - \ \dfrac{\tau_0}{a(x)}$

on introduit h_c défini par :

$$h_c(x) \quad = \quad \text{h(x)} \quad \text{-} \quad \frac{\tau_0}{a(x)}$$

d'autre part : $\tau_{paroi}(x) \ = \ \tau_{xy}(x,0) \ \Rightarrow \ \tau_{paroi}(x) \ = \ h(x)a(x)$

et $j(x) \ = \ \dfrac{\tau_{paroi}(x)}{\rho g h(x)}$

par suite :

$$j(x) \quad = \quad \frac{a(x)}{\rho g} \tag{C.5}$$

Or $\tau_{xy}(x,y) \;=\; \tau_0 \;+\; k|u_{,y}|^n$

On a donc : $k\left(|u_{,y}|^n\right)_{,y} \;=\; -a(x)$

Après intégration entre y = 0 et y = $h_c(x)$ et en posant $m \;=\; \dfrac{1}{n}$ on obtient :

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m+2}\left|\dfrac{a(x)}{k}\right|^m \left[h_c^{m+1}(x) \;-\; |h_c(x) \;-\; y|^{m+1}\right] & si \quad 0 \;\leq\; y \;\leq\; h_c(x)\;, \forall x \;\in\; I \\ \dfrac{1}{m+2}\left|\dfrac{a(x)}{k}\right|^m h_c^{m+1}(x) & si \quad h_c(x) \;\leq\; y \;\leq\; h\;, \forall x \;\in\; I \end{cases} \tag{C.6}$$

C.2.2 Calcul du débit

$x \;\in\; I\;;\; y \;\in\; [0,h(x)]$ I étant un intervalle donné

on note Q le débit :
$Q(x) = \displaystyle\int_0^{h(x)} u(x,y)dy$

Après une simple intégration de C.6, il vient :

$$\mathrm{Q(x)} \quad = \quad \frac{1}{m+2}\left|\frac{a(x)}{k}\right|^m \left|h(x) \;-\; \frac{\tau_0}{a(x)}\right|^{m+1}\left(h(x) \;+\; \frac{\tau_0}{(m+1)a(x)}\right) \tag{C.7}$$

C.2.3 L'équation aux dérivées partielles

$x \in I$; $y \in [0, h(x)]$ I étant un intervalle donné

$$\text{(C.4) et (C.5)} \Rightarrow \quad a(x) \;=\; \rho\, g \left[sin\alpha \;-\; \left(cos\alpha \;-\; \frac{\Phi \tau_0}{\rho\, g\, h(x)} \right) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right] \quad \forall x \in I$$

Ainsi en reportant cette expression de $a(x)$ dans l'expression du débit (C.7), et en utilisant la forme suivante de l'équation de conservation de la masse (obtenue par intégration de div $\mathbf{u} = 0$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} \;+\; \frac{\partial h U_m}{\partial x} \;=\; 0$$

où : $U_m \;=\; Q \,/\, h$ est la vitesse moyenne.

Il vient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \;+\; \frac{1}{(m+2)k^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^m \left(h - \frac{\tau_0}{a} \right)^{m+1} . \left(h + \frac{\tau_0}{(m+1)a} \right) \right) \;=\; 0 \quad \text{(C.8)}$$

<u>Remarques</u> :

cas $\alpha = 0$:

$$a \;=\; -\rho\, g \left(1 - \frac{\Phi\, \tau_0}{\rho\, g\, h} \right) \frac{\partial h}{\partial x}$$

cas $\tau_0 = 0,\ \alpha = 0$:

$$a \;=\; -\rho\, g \frac{\partial h}{\partial x}$$

cas $m = 1,\ \tau_0 = 0,\ \alpha = 0$: newtonien horizontal

$$Q = -\frac{\rho\, g}{3\, k}\, h^3 \,.\frac{\partial h}{\partial x}$$

La formule expansée étant la suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h(x)}{\partial t} \quad & + \quad \frac{1}{m+2}\left|\frac{\rho}{k}\right|^{m} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left|gsin\alpha - \left(gcos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho h(x)}\right)\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|^{m}\right. \\
& \times \quad \left|h(x) - \frac{\tau_0}{\rho\left[gsin\alpha - \left(gcos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho h(x)}\right)\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right]}\right|^{m+1} \\
& \times \quad \left.\left(h(x) + \frac{\tau_0}{\rho(m+1)\left[\;g\ sin\alpha - \left(gcos\alpha - \frac{\Phi\tau_0}{\rho h(x)}\right)\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right]}\right)\right] \\
& = \quad 0 \qquad\qquad\qquad x \in \ I
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

Conclusion et perspectives

On a pu établir des lois utilisables directement sur le terrain approchant le temps d'arrêt de l'écoulement pour des fluides de Bingham avec une faible contrainte seuil et sans tenir compte des contraintes élongationnelles.

Reste à accroître la valeur de la contrainte seuil afin de pouvoir étendre les lois déjà établies à un plus vaste pannel de fluides, et à approfondir l'étude des phénomènes élongationnels dans le but d'établir des lois similaires. Des études en ce sens sont en cours et devraient aboutir à la fin du mois.

Cependant, au vu des temps de calculs très importants (ceci étant en particulier dû aux itérations en point fixe), il paraît désormais nécessaire d'utiliser un maillage spatial adaptatif. Je regrette de n'avoir pas eu le temps de me consacrer à cet aspect que P.Saramito connaît déjà, pour l'avoir mis en place sur d'autres sujets.

Bibliographie

[1] C.Cuvelier, J.Descloux, J.Rappaz, C.Stuart, and B.Zwahlen. Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs, volume Volume 2. Presses Polytechniques Romandes, 1992.

[2] Y. Cornet. Simulation numérique de rupture de barrage dans le cas de fluides visqueux. Rapport de stage de DESS, Laboratoire de Rhéologie, 1997.

[3] G. Couarraze and J. Grossiord. Initiation à la rhéologie, 1991. ed. Lavoisier.

[4] Duvaut and Lions. Les Inéquations en Mécanique et en Physique. ed. Dunod, 1972.

[5] Hindmarsh. A Systematized Collection of ODE Solvers in Scientific Computing. ed. Steplemann, 1983.

[6] I. Ionescu and M. Sofonea. Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, chapter 5. Oxford Science Publications, 1993.

[7] J. M. Piau. Flow of a yield stress fluid in a long domain. application to flow on an inclined plane. J.Rheol. 40(4)/711/13, 1996.

[8] P. Saramito, J.-M. Piau, B. Nsom, and A.Ayadi. The viscous dam break problem, 1998. to appear in European Journal of Mechanics, serie B, 1999.