Examen : modélisation mathématiques pour l'ingénieur (solutions)

Pierre.Saramito@imag.fr
http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito

8 janvier 2001

Question 1

$(P1)_h$: trouver $(u_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que

$$\begin{aligned} -u_{i-1} + \left(2 + \lambda h^2\right) u_i - u_{i+1} = h^2 f_i,\ 1 \leq i \leq n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Question 2

$$A = \begin{pmatrix} 2+\lambda h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+\lambda h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+\lambda h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2+\lambda h^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \\ \vdots \\ \\ h^2 f(x_n) \end{pmatrix}$$

Question 3

```
do i = 1:n
    a(i,i) = 2 + lambda*h*h;
end
do i = 1:n-1
    a(i+1,i) = a(i,i+1) = -1;
end
```

Question 4

a) En multipliant par $v \in V$ et en sommant sur $[0,1]$, on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

b) Après intégration par parties du membre de gauche, il vient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

c) En utilisant les conditions aux bords, on remplace $u'(1)$ et $u'(0)$ par des expressions ne contenant que $u(1)$ et $u(0)$. On obtient la formulation variationnelle :

$(FV2)$: trouver $u \in V$ tel que

$$k\,(u(0)v(0) + u(1)v(1)) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = g_0 v(0) + g_1 v(1) + \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall v \in V$$

Question 5

$(FV2)_h$: trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$k\,(u_h(0)v_h(0) + u_h(1)v_h(1)) + \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx = g_0 v_h(0) + g_1 v_h(1) + \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx$$

ceci quel que soit $v_h \in V_h$.

Question 6

$$\left(k + \int_0^h (\varphi_0')^2(x)\,dx\right) u_0 + \left(\int_0^h \varphi_0'(x)\varphi_1'(x)\,dx\right) u_1 = g_0 + \int_0^h f(x)\varphi_0(x)\,dx$$

$$\left(\int_{(i-1)h}^{ih} \varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x)\,dx\right) u_{i-1} + \left(\int_{(i-1)h}^{(i+1)h} (\varphi_i')^2(x)\,dx\right) u_i + \left(\int_{ih}^{(i+1)h} \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)\,dx\right) u_{i+1}$$
$$= \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\left(\int_{nh}^1 \varphi_n'(x)\varphi_{n+1}'(x)\,dx\right) u_n + \left(k + \int_{nh}^1 (\varphi_{n+1}')^2(x)\,dx\right) u_{n+1} = g_1 + \int_{nh}^1 f(x)\varphi_{n+1}(x)\,dx$$

Question 7

$$A = \begin{pmatrix} 1+kh & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1+kh \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 f(x_0) + g_0 h \\ h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n) \\ h^2 f(x_{n+1}) + g_1 h \end{pmatrix}$$