Examen : modélisation mathématiques pour l'ingénieur

Pierre.Saramito@imag.fr
http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito

8 janvier 2001

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Première partie

Considérons le problème suivant :

$(P1)$: trouver u, définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned} \lambda u - u'' &= f \text{ dans }]0,1[&& (1)\\ u(0) &= 0 && (2)\\ u(1) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$ est un réel donné. Le paramètre λ représente un coefficient d'amortissement.

Question 1

Écrire le problème approché $(P1)_h$, en utilisant la technique des différences finies.

Question 2

Le problème approché $(P1)_h$ peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$(FM1)$: trouver $U \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A\,U = b$$

où A est une matrice $n \times n$ et b un second membre de taille n.

Expliciter la matrice A et le second-membre b.

Question 3

Proposer un algorithme d'initialisation de la matrice A.

Note : le langage de programmation exact n'a ici pas d'importance. On pourra cependant s'inspirer de la syntaxe de Matlab.

Deuxième partie

Considérons à présent le problème :

$(P2)$: trouver u, définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ dans }]0,1[\qquad (4) \\ -u'(0) + ku(0) &= g_0 \qquad (5) \\ u'(1) + ku(1) &= g_1 \qquad (6) \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et k, g_0 et g_1 sont des réels donnés.

Les conditions aux bords (5) et (6) sont appelées *conditions de Robin*, et expriment par exemple les imperfections des contacts dans les problèmes de thermique. Le coefficient k est supposé strictement positif.

Dans la suite, V désignera un espace de fonctions continues et dérivables sur $[0,1]$.

Question 4

Écrire la formulation variationnelle $(FV2)$ du problème $(P2)$.

INDICATIONS : on pourra procéder en trois étapes :

a) multiplier (4) par une fonction-test $v \in V$ puis intégrer sur $[0,1]$;
b) intégrer par parties;
c) utiliser les conditions aux bord (5)-(6).

Question 5

Écrire la formulation variationnelle approchée $(FV2)_h$ dans l'espace V_h des fonctions continues et linéaires par morceaux sur la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n+1}$, où $x_i = ih$ et $h = 1/(n+1)$.

Question 6

La solution approchée $u_h \in V_h$ se décompose sur la base des fonctions-chapeau de V_h :

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_j \varphi_j(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

En choisissant la fonction-test $v_h(x) = \varphi_i(x)$, $0 \leq i \leq n+1$, **déduire** une formulation matricielle de $(FV2)_h$ du type :

$(FM2)$: trouver $U \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$AU = b$$

où $U = (u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$, A est une matrice $(n+2)\times(n+2)$ et b un second membre de taille $n+2$.

Question 7

En utilisant la formule des trapèzes, **expliciter** les coefficients du second-membre b en fonction de h, g_0, g_1 et des valeurs de f aux sommets de la subdivision.

Expliciter les coefficients de la matrice A en fonction de h et k.