TP 1 : Résolution approchée

Pierre.Saramito@imag.fr
http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito

9 octobre 2000

Considérons le problème suivant :

(P): trouver u, définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

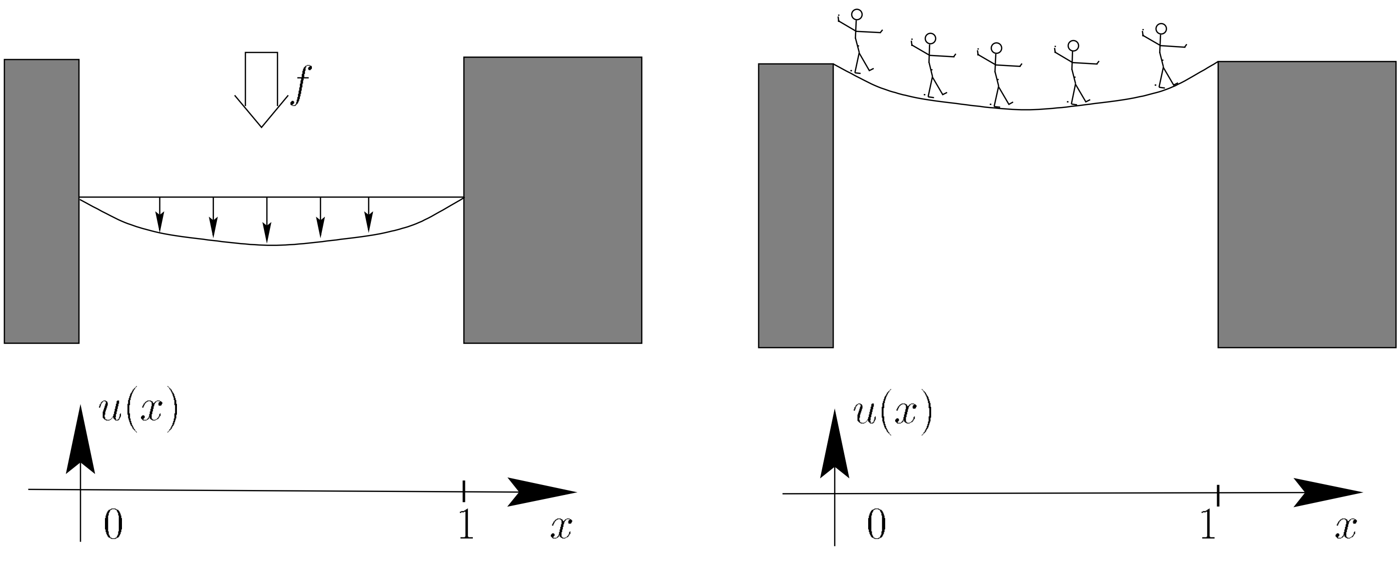

Fig. 1 – *Fluide en conduite ou pont soumis à une charge: modèle 1D.*

Ce problème est à la base de nombreuses modélisation en mécanique, physique, chimie, thermique. Par exemple, il permet de décrire la vitesse d'un fluide dans une conduite ou un canal, la forme d'un pont ployant sous une charge (voir figure 1). Il est par conséquent *fondamental* de savoir bien résoudre ce problème.

La solution du problème (P) n'est connue explicitement que pour quelques cas particuliers.

Dans le cas général, il est cependant possible d'approcher la solution $u(x)$ par la technique des différences finies. Nous considérons alors le problème suivant :

$(P)_h$: trouver $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} &= f(x_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

où $h = 1/(n+1)$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$. Les inconnues u_i *approchent* $u(x_i)$ d'autant mieux que n est grand:

$$u_i \longrightarrow u(x_i) \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty$$

Le problème peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \\ \vdots \\ \\ h^2 f(x_n) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système linéaire de taille $n \geq 2$. La matrice est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et le second membre $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$, $b_i = h^2 f(x_i)$. Notons que la matrice A est de taille $n \times n$ mais ne contient que $NZ = 3n - 2$ coefficients non-nuls.

Nous allons résoudre le système linéaire par une méthode directe.

Action 1

Écrire la fonction `initialise_matrice(n)`, qui retourne la matrice A.

En particulier, on exploitera le fait que les coefficients de la matrice A ne sont non-nuls que pour des indices voisins de la diagonale. Ainsi, l'initialisation de la matrice s'écrit :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &:= 2, \quad i = 1 \ldots n \\ a_{i,i+1} &:= a_{i+1,i} := -1, \quad i = 1 \ldots n-1 \end{aligned}$$

et comporte $3n - 2$ affectations.

De même, **écrire** la fonction `initialise_second_membre(n)` qui retourne b. Afin de fixer les idées, dans la suite, nous supposerons la fonction f est donné par $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$. Dans ce cas, la solution exacte $u(x)$ du problème (P) admet une expression simple : **expliciter** $u(x)$.

Action 2

Écrire en `matlab` la fonction `résoudre` prenant en entrée

- $n \geq 2$: la taille du système,
- le nom d'un fichier

et écrivant dans le fichier la solution approchée. Le format du fichier sera de deux colonnes et $n+2$ lignes correspondant à $(x_i, u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$.

La résolution sera faite par une méthode directe.

Représenter avec `gnuplot`, sur un même graphique, la solution exacte $u(x)$ de (P) et la solution approchée de $(P)_h$ par ses valeurs $(x_i, u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ obtenues avec $n = 5$.

Représenter à pour $n = 10$ et vérifier que l'écart a diminué.

Action 3

Nous pouvons augmenter n et regarder si les valeurs approchées $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ convergent bien vers les valeurs exactes $(u(ih))_{1 \leq i \leq n}$.

Le maximum de l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte est :

$$e_h := \max_{1 \leq i \leq n} |u(ih) - u_i|$$

Représenter e_h en fonction de $h = 1/(n+1)$ en diagramme log-log, pour $n = 2, 4, 8, \ldots, 256$.

Estimer *l'ordre de l'approximation*, noté α, tel que

$$e_h \approx h^\alpha$$

lorsque n est grand, c'est-à-dire h petit.