TP 2 : Le problème de la transmission

Pierre.Saramito@imag.fr
http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito

23 octobre 2000

Considérons le problème suivant :

(P): trouver u, définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{array}{rcl} -(\alpha u')' & = & f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) & = & 0 \\ u(1) & = & 0 \end{array}$$

où α et f sont des fonction donnée, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Nous allons aborder ici le cas particulier très important où α est constante par morceaux :

$$\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \varepsilon & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{array} \right.$$

et où $\varepsilon > 0$ est donné. Ce problème exprime la **transmission** d'une quantité physique (polluant, chaleur, dopage du silicium, ...) qui se diffuse dans deux milieux aux propriétés très différentes. On retrouve le problème classique pour $\varepsilon = 1$.

Approchons la solution $u(x)$ par la technique des différences finies. Nous considérons alors le problème suivant :

$(P)_h$: trouver $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{-\alpha_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} + (\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}}) u_i - \alpha_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}}{h^2} & = & f(x_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

où $h = 1/(n+1)$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$. On a noté $\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \alpha((i+\frac{1}{2})h)$ afin d'alléger les notations.

Action 1

Écrire le problème sous forme matricielle. Notons A la matrice et b le second membre.

Afin de fixer les idées, dans la suite, nous supposerons que la fonction f est constante: $f(x) = 1$.

Écrire en `matlab` la fonction `initialise_matrice_t(n,epsilon)`, qui renvoie la matrice A et la fonction `initialise_second_membre_t(n)`. **Vérifier** que la matrice a est bien symétrique.

Action 2

Écrire la fonction `résoudre_t` prenant en entrée $n \geq 2$ la taille du système, et $\varepsilon > 0$, et renvoyant la solution approchée. La résolution sera faite par une méthode directe.

Pour $\varepsilon = 1/10$, **Représenter** sur un même graphique, les solution approchée de $(P)_h$ obtenues avec $n = 5, 10$. De même, comparer les solutions approchées correspondant à $n = 10$ et $n = 50$, puis $n = 50$ et $n = 100$.

Observer la solution pour $\varepsilon = 1/100$ et $\varepsilon = 1/1000$: **décrire** comment évolue le maximum de la solution en fonction de ε.

Action 3

Dans le cas $f(x) = 1$, la solution exacte $u(x)$ du problème (P) admet une expression polynomiale par morceaux : **expliciter** $u(x)$.

Écrire la fonction `erreur_t(n,epsilon)` calculant l'erreur maximum, et vérifier la convergence. Procéder de la même façon que pour le TP 1, en cherchant á réutiliser les fonctions déjà écrites précédemment.