TP 3 : Éléments finis en dimension deux

`Pierre.Saramito@imag.fr`
`http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito`

13 novembre 2000

Soit Ω une région bornée du plan $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. Considérons le problème suivant :

(P): trouver u, définie de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée, de Ω dans $\mathbb{R}$.

Résoudre ce problème permet par exemple de connaître la déformation u d'une membrane subissant la charge f, ou bien la vitesse u d'un fluide en écoulement établi dans une section de forme Ω sous la poussée f.

On s'intéresse en particulier aux quantités suivantes :

$$\begin{aligned} u_{max} &= \max_{(x,y)\in\Omega} u(x,y) \\ d &= \int_\Omega u(x,y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

La quantité d représente le volume déformé sous la membrane, ou bien le débit du fluide dans la conduite.

La solution du problème (P) n'est connue explicitement que pour quelques cas particuliers: géométrie Ω et donnée f très particuliers. Dans le cas général, nous allons approcher la solution $u(x)$ par la technique des éléments finies. Nous considérons alors le problème suivant :

$(P)_h$: trouver $u_h \in V_{0,h}$ tel que

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u_h(x,y).\vec{\nabla} v_h(x,y)\, dx\, dy = \int_\Omega f(x,y)\, v_h(x,y)\, dx\, dy, \quad \forall v_h \in V_{0,h}$$

où $V_{0,h}$ représente l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ s'annulant sur la frontière $\partial\Omega$ et affines dans chaque élément triangulaire K d'un maillage donné. Le maillage est noté $\mathcal{T}_h$.

Noterons n le nombre de sommets $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ du maillage, et m son nombre d'éléments:

$$\mathcal{T}_h = \{K_1, \ldots, K_l, \ldots, K_m\}$$

Le maillage est donné par un fichier de la forme :

$$\begin{array}{llll}
\mathtt{n} & & & \\
x_1 & y_1 & F_1 & \\
\ldots & & & \\
x_i & y_i & F_i & \\
\ldots & & & \\
x_n & y_n & F_n & \\
 & & & \\
m & & & \\
A_1 & B_1 & C_1 & G_1 \\
\ldots & & & \\
A_l & B_l & C_l & G_l \\
\ldots & & & \\
A_m & B_m & C_m & G_m
\end{array}$$

La donnée F_i, $1 \leq i \leq n$ est un entier qui vaut 0 si le sommet i est à l'intérieur du domaine Ω, et vaut une valeur non-nulle si ce sommet est situé sur la frontière $\partial\Omega$. Un élément K_l, $0 \leq l \leq m$ sera décrit par les numéros de ses sommets: (A_l, B_l, C_l). La donnée G_l ne sera pas utilisée dans ce travail.

Par exemple, le carré $]-1,1[^2$ maillé en deux triangles est donné par le fichier '`carre.mail`' suivant :

```
4
-1.0 -1.0        1
 1.0 -1.0        1
 1.0  1.0        1
-1.0  1.0        1
2
1 2 3            0
1 3 4            0
```

Trois types de domaines Ω seront considérées :

- le cercle centré en l'origine et de rayon unité,
- le carré $]-1,1[^2$,
- un domaine en forme de L.

Action 1 : le cas du cercle

Pour fixer les idées, nous choisirons la fonction f constante et égale à 1.

Lorsque le domaine Ω est le cercle centré en l'origine et de rayon unité, **calculer** la solution exacte u en fonction du rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **Calculer** aussi u_{max} et d dans ce cas. L'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques (r, θ, z) est :

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Action 2 : visualisation des maillages

L'annexe 1 propose deux fonctions pour lire et visualiser les maillages. **Utiliser** ces fonctions pour les maillages disponibles.

Action 3 : système linéaire

Le problème $(P)_h$ peut se réduire à un système linéaire de n équations à n inconnues, les inconnues étant les valeurs $u_i = u_h(x_i, y_i)$ de u_h aux sommets du maillage. Notons a la matrice du système et b son second membre.

Écrire la fonction

```
b = init_second_membre_2d (n, x, y, F, m, A,B,C);
```

qui construit b.

De même, **écrire** la fonction

```
a = init_matrice_2d (n, x, y, F, m, A, B, C);
```

qui construit la matrice a.

Action 4 : résolution et affichage

Écrire en `matlab` la fonction `résoudre_2d` prenant en entrée le nom d'un fichier de maillage, et renvoyant le vecteur des valeurs de u_h aux sommets du maillage.

L'annexe 2 propose une fonctions pour écrire la solution approchée dans un fichier '`solution.mtv`'. **Utiliser** cette fonction. La visualisation de la solution se fait alors avec la commande unix :

```
plotmtv solution.mtv
```

Pour chaque maillage disponible, **afficher** la solution correspondante.

Action 5 : test de convergence

Notons $u_{max,h}$ l'approximations de u_{max} obtenue en remplaçant u par u_h. **Comparer** les valeurs approchées $u_{max,h}$ obtenues sur les différents maillages disponibles pour le cercle avec la valeur exacte u_{max}. Les résultats seront présentés dans un tableau à deux entrées : maillage et valeur:

maillage	$u_{max,h}$
`cercle-10.mail`	...
`cercle-20.mail`	...
`cercle-40.mail`	...
`cercle-80.mail`	...

Action 6 : calcul des débits

Notons d_h l'approximations du débit d obtenue en remplaçant u par u_h. **Écrire** la fonction

```
dh = debit (n, x, y, F, m, A, B, C, uh)
```

qui calcule la quantité d_h associée à u_h.

Construire le tableau des valeurs de d_h obtenues pour les maillages du cercle.

Action 7 : carré et L

Pour le domaine carré, **construire** le tableau des valeurs de $u_{max,h}$ et d_h obtenues pour les maillages disponibles.

Même opération pour le maillage du domaine en L.

Annexe 1

Fichier 'lire_maillage.m'

```
function [n, x, y, F, m, A, B, C] = lire_maillage (nom_fichier)

    fichier = fopen (nom_fichier, 'r');
    n = fscanf (fichier, '%d', 1);
    for i = 1:n
        x(i) = fscanf (fichier, '%g', 1);
        y(i) = fscanf (fichier, '%g', 1);
        F(i) = fscanf (fichier, '%d', 1);
    end
    m = fscanf (fichier, '%d', 1);
    for l = 1:m
        A(l) = fscanf (fichier, '%d', 1);
        B(l) = fscanf (fichier, '%d', 1);
        C(l) = fscanf (fichier, '%d', 1);
        ignore = fscanf (fichier, '%d', 1);
    end
    fclose(fichier);
```

Fichier 'afficher_maillage.m'

```
function afficher_maillage (n, x, y, m, A, B, C)

    hold on;
    for l = 1:m
        i = A(l);
        j = B(l);
        k = C(l);
        x_ligne (1) = x(i); y_ligne (1) = y(i);
        x_ligne (2) = x(j); y_ligne (2) = y(j);
        x_ligne (3) = x(k); y_ligne (3) = y(k);
        x_ligne (4) = x(i); y_ligne (4) = y(i);
        plot (x_ligne, y_ligne);
    end
    hold off;
```

Annexe 2

Fichier 'ecrire_solution.m'

```
function ecrire_solution (n, x, y, m, A, B, C, u)

    fichier = fopen ('solution.mtv', 'w');
    fprintf (fichier, '$ DATA = CONTCURVE\n');
    fprintf (fichier, '%% equalscale\n');
    fprintf (fichier, '%% contstyle=2\n');
    fprintf (fichier, '%% meshplot\n');
    for l = 1:m
        i = A(l);
        j = B(l);
        k = C(l);
        fprintf (fichier, '%g %g %g\n', x(i), y(i), u(i));
        fprintf (fichier, '%g %g %g\n', x(j), y(j), u(j));
        fprintf (fichier, '%g %g %g\n', x(k), y(k), u(k));
        fprintf (fichier, '\n');
    end
    fclose(fichier);
```