TP 4 : Problèmes dépendant du temps

Pierre.Saramito@imag.fr
http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito

20 novembre 2000

Ce travail est composé de deux parties. Dans la première partie, nous étudions on problème en temps simple. Dans la deuxième partie, le problème en temps est de type transmission.

Première partie

Considérons le problème suivant :

(P): trouver u, définie de $[0,+\infty[\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x), \quad \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,1[\\
u(t,\, x=0) &= 0, \quad \forall t > 0 \\
u(t,\, x=1) &= 0, \quad \forall t > 0 \\
u(t=0,\, x) &= u_0(x), \quad \forall x \in [0,1]
\end{aligned}$$

où f et u_0 sont des fonction donnée, de $[0,+\infty[\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, respectivement.

Ce problème est à la base de nombreux phénomènes de mécanique, physique, chimie, etc... Par exemple, il permet de décrire l'évolution au cours du temps de la vitesse d'un fluide dans une conduite ou un canal, ou bien l'évolution de la forme d'un pont ployant sous une charge.

Approchons ce problème par le schéma d'Euler implicite en temps et la technique des différences finies en espace. Nous considérons alors le problème suivant :

$(P)_{\Delta t,h}$: trouver $(u_i^k)_{0\leq i\leq n+1, k\geq 0}$ tel que

$$
\begin{aligned}
-u_{i+1}^k + \left(2 + \frac{h^2}{\Delta t}\right) u_i^k - u_{i-1}^k &= \frac{h^2}{\Delta t} u_i^{k-1} + h^2 f(t_k, x_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n, k \geq 1 \\
u_0^k &= u_{n+1}^k = 0 \text{ pour } k \geq 1 \\
u_n^0 &= u_0(x_i)
\end{aligned}
$$

où $\Delta t > 0$, $t_k = k\Delta t$, $h = 1/(n+1)$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$.

Action 1

Afin de fixer les idées, on choisi ici $u_0(x) = 0$ et $f(t,x) = 1$. Par exemple, le fluide est au repos à $t = 0$, et est alors soumis à une poussée f constante.

Écrire la fonction

```
u = resoudre_temps(n,dt,kfin);
```

prenant en entrée la taille n de la subdivision, le pas de temps Δt. ainsi que le nombre d'itérations `kfin` en temps à effectuer. Cette fonction renvoie la solution approchée au pas de temps final.

Afin d'économiser la place en mémoire, on pourra ne stocker que la solution au pas de temps courant, et non pas tous les itérés précédents. On pourra aussi réutiliser la fonction `initialise_matrice(n)` du TP 1.

Action 2

Intégrer à cette fonction de résolution une animation graphique, de sorte que tous les itérés en temps s'affichent successivement sur la même figure. On utilisera la fonctions matlab `hold on`. Les abscisses de la figure seront les x dans l'intervalle $[0,1]$. La figure finale contient alors les `kfin` itérés successifs en temps.

Action 3

La discrétisation en espace est fixée à $n = 100$.

Régler le pas de temps et le nombre `kfin` d'itérés de sorte que la solution ait atteint une position *quasiment* stationnaire, dite position d'équilibre. Le critère sera ici graphique, c'est-à-dire lorsque les courbes se superposent sur l'écran.

Noter la valeur $t_f = \texttt{kfin} * \Delta t$ correspondant au temps final où la solution semble avoir atteint sa position d'équilibre.

Deuxième partie

Nous considérons le problème suivant :

(P): trouver u, définie de $[0,+\infty[\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) &= f(t,x), \quad \forall (t,x) \in\,]0,+\infty[\times]0,1[\\
u(t,\, x=0) &= 0, \quad \forall t > 0 \\
u(t,\, x=1) &= 0, \quad \forall t > 0 \\
u(t=0,\, x) &= u_0(x), \quad \forall x \in [0,1]
\end{aligned}$$

où α et u_0 sont des fonction donnée de $[0,+\infty[\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que f de $[0,+\infty[\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, respectivement.

De même que dans le TP 2, nous allons aborder ici le cas particulier très important où α est constante par morceaux :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \varepsilon & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

et où $\varepsilon > 0$ est donné. Rappelons que ce problème exprime la **transmission** d'une quantité physique (polluant, chaleur, dopage du silicium, ...) qui se diffuse dans deux milieux aux propriétés très différentes. On retrouve le problème précédent pour $\varepsilon = 1$.

Action 4

Écrire le problème discrétisé en temps par le schéma d'Euler implicite et en espace par différences finies. **Vérifier** que pour $\alpha(x) = 1$ on retrouve le problème discrétisé de la première partie.

Action 5

Afin de fixer les idées, on choisi aussi ici $u_0(x) = 0$ et $f(t,x) = 1$. Par exemple, le système est au repos à $t = 0$, et est alors soumis à une sollicitation f constante.

Écrire la fonction

```
u = resoudre_t_temps(n,dt,kfin,epsilon);
```

prenant en entrée la taille n de la subdivision,

On pourra réutiliser la fonction `initialise_t_matrice(n,epsilon)` du TP 2 et s'inspirer de l'action 1.

Action 6

Intégrer l'animation graphique de l'action 2.

Action 7

La discrétisation en espace est fixée à $n = 100$. Pour $\varepsilon = 0.001$, chercher le temps final où la solution a *quasiment* atteint sa position d'équilibre. Comparer ce temps à celui de l'action 3.