Résumé

L'objet de ce travail était de réaliser une simulation numérique des écoulements consécutifs à une rupture de barrage dans le cas de fluide visqueux. Et ce afin de valider l'utilisation d'un modèle, qui est une adaptation à notre problème de la théorie sur les fluides à seuil élaborée par J.M. PIAU[1].
A partir des résultats obtenus il nous a été possible de tirer des enseignements concernant l'influence de certain paramètres sur le comportement du modèle étudié.
Ainsi, il est apparu deux régimes d'écoulement distincts. Il a en particulier été mis en évidence que, contrairement au cas de l'eau, dans ce modèle la longueur du réservoir constitué par le barrage jouait un rôle sur ces régimes.
En précisant ce rôle nous avons pu établir deux lois de comportement. L'une donnant l'évolution de l'abscisse du front en fonction du temps, et l'autre la hauteur maximum atteinte en fonction de la distance par rapport au barrage.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à monsieur J.M. PIAU, directeur du laboratoire de rhéologie pour m'avoir autorisé à effectuer mon stage de D.E.S.S au sein de son laboratoire, dans le cadre d'un projet qu'il dirige.

Je suis particulièrement reconnaissant envers monsieur P. SARAMITO, pour avoir bien voulu assurer la direction de ce stage. Ses conseils avisés et sa disponibilité permanente m'ont apporté un soutien efficace pour mener à bien ce travail. Tout au long de mon stage, il a suivi mes travaux et il n'a pas cessé de me prodiguer conseils et encouragements et de me communiquer sa grande rigueur scientifique. Qu'il veuille bien accepter mes plus sincères remerciements.

Je tiens également à remercier monsieur B. N'SOM, pour avoir assuré la codirection de ce stage. Pendant toute la durée de celui-ci, j'ai pu compter sur son aide et sa disponibilité. Son accueil au sein du laboratoire m'a aussi permis d'apprécier certaines valeurs humaines.

Enfin, je ne saurais passer sous silence, l'ambiance chaleureuse que j'ai rencontré auprès de l'ensemble des membres du laboratoire. Ils ont contribué chacun à sa manière à rendre mon séjour agréable.

Table des matières

Introduction

Si le cadre naturel est généralement source de détente, il peut parfois être le théâtre de drames. Les crues violentes, les avalanches et dans une moindre mesure les éruptions volcaniques provoquent chaque année de nombreux décès. Tenter de se prémunir contre ce genre de catastrophe est donc nécessaire. Ce travail s'inscrit justement dans le cadre d'un programme européen sur le thème de la prévention des risques naturels : rupture de barrage, avalanches et coulées de boue en montagne, coulées de lave.

Il concerne plus particulièrement la rupture de barrage dans le cas de fluides visqueux. Lors de pluies importantes, il est fréquent de voir apparaître de tels barrages "naturels" formés par l'accumulation de débris divers (arbres, rochers, boue). Les matériaux retenus ont généralement un comportement comparable à celui de fluides visqueux.
Dans le cas de l'eau, ce problème a été abondamment traité et les modèles sont nombreux. Mais il n'en est pas de même lorsque l'on s'intéresse à des fluides dont la viscosité est élevée. D'où l'importance d'étudier un modèle prenant en compte cette viscosité.

L'originalité du modèle théorique proposé est justement de tenir compte de ce facteur. Il s'applique dans le cas d'écoulements de faible hauteur et dont l'aspect est essentiellement unidimensionnel.

L'objectif de la simulation numérique est de fournir des réponses sur le comportement du modèle, et de le valider comme représentatif du fluide considéré, pour un écoulement donné.

Nous avons commencé par traiter le cas d'un écoulement sur un plan horizontal.

Dans un premier temps, on décrit le problème étudié, les hypothèses effectuées, ce qui nous permet d'aboutir au problème mathématique à résoudre.
Puis nous exposons le schéma de discrétisation utilisé, et le système matriciel qui en résulte.
Dans une troisième partie, nous effectuons la résolution numérique après avoir établi des critères de convergence. Puis nous exploitons les résultats obtenus afin de dégager des lois de comportement du modèle. Nous les comparons alors aux mesures expérimentales fournies.
Enfin, nous utilisons une solution analytique des équations pour obtenir une solution semi-analytique du problème posé.

Nous avons ensuite appliqué la même méthodologie dans le cas d'un écoulement sur un plan incliné.

Chapitre 1

Cas d'un canal horizontal

1.1 Système d'équations et conditions aux limites

1.1.1 Présentation du problème physique et notations

On considère un fluide newtonien très visqueux, initialement au repos dans un réservoir constitué par un barrage. La rupture de ce dernier provoque la mise en mouvement du fluide le long du canal. Nous commençons par traiter le cas d'un canal horizontal

On note L la longueur du réservoir et y_o la hauteur d'eau initiale. On appelle L_t la longueur sur laquelle est étudiée l'écoulement en aval du barrage (cf figure 1).

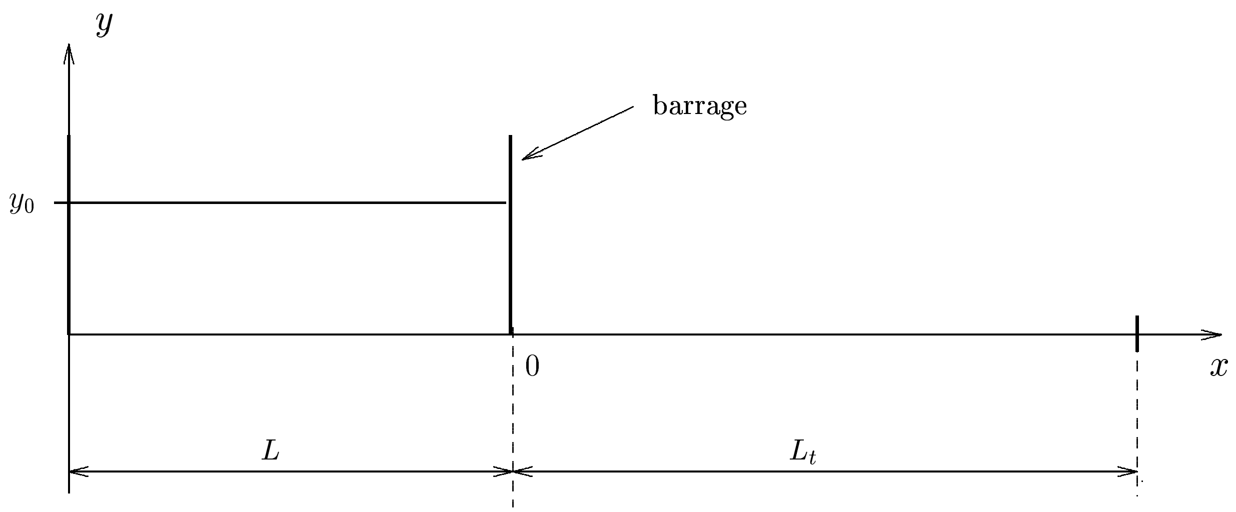


Figure 1.1: Représentation du barrage avant la rupture

1.1.2 Équations

Ainsi, pour un modèle newtonien, isochore, de viscosité constante μ, nous obtenons le système d'équations (cf Annexe A) :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \beta u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = -g\ j \tag{1.1}$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u_m \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

où u_m est la vitesse moyenne de l'écoulement, y la hauteur d'eau, ρ la densité constante du fluide, g la gravité, β un coefficient de forme et j un coefficient de caractérisation de la contrainte tangentielle τ tel que :

$$j = \frac{3\mu U_m}{\rho g y^2}$$

1.1.3 Condition initiale et conditions aux limites

- Comme cela est représenté sur la figure 1, la condition à l'instant initial est la suivante :

$$y\ (x\ ,\ t = 0)\ = \begin{cases} y_o & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

- Les conditions aux limites sur les bords vont être les suivantes :
  - En aval du barrage : on choisit L_t telle que l'on ait $L_t - L \gg y_o$, c'est à dire en un point suffisamment éloigné du barrage pour ne pas être atteint avant un laps de temps donné. Ainsi la solution cherchée est indépendante de L_t. Cela nous permet de prendre la condition de Dirichlet :

$$y\ (L_t\ ,\ t)\ =\ 0 \tag{1.4}$$

  - En amont : Compte tenu des résultats expérimentaux obtenus au laboratoire concernant ce probème (cf Annexe B), nous choisissons de prendre une condition de Neuman exprimant que la pente de la surface libre est quasi-nulle à cette extrémité. Cette hypothèse est valide pour $L \gg y_o$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\ (-L\ ,\ t)\ =\ 0 \tag{1.5}$$

1.1.4 L'inertie est négligée

- Équations

Les termes provenant des forces d'inertie sont négligés. Ce sont les deux termes de gauche de l'équation (1.1). Celle-ci devient :

$$g\frac{\partial y}{\partial x} = -gj = -g\;\frac{3\mu u_m}{\rho g y^2}$$

donc

$$y\;u_m = -\;\frac{\rho g y^3}{3\mu}\;\frac{\partial y}{\partial x}$$

Or (1.2) peut s'écrire

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\;y u_m}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

En remplacant $y\;u_m$ dans (1.6) on obtient :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho g y^3}{3\mu}\;\frac{\partial y}{\partial x}\right)\;=\;0$$

soit finalement

$$\frac{\partial y}{\partial t}\;-\;\frac{\rho g}{12\mu}\;\frac{\partial^2 y^4}{\partial x^2}\;=\;0 \tag{1.7}$$

Pour simplifier cette expression nous allons l'adimensionnaliser.

- Adimensionnalisation

On pose : $Y_+ = \frac{y}{y_o}$, $X_+ = \frac{x}{y_o}$, $T_+ = \frac{t}{t_o}$ avec $t_o = \frac{12\,\mu}{\rho\,g\,y_o}$

l'équation (1.7) devient alors :

$$\frac{\partial Y_+}{\partial T_+} - \frac{\partial^2 Y_+^4}{\partial X_+^2} = 0$$

Dans la suite de ce rapport, et ce afin d'alléger les notations, nous noterons encore y, x et t au lieu de Y_+, X_+ et T_+, soit :

$$y = Y_+ \quad x = X_+ \quad t = T_+$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y^4}{\partial x^2} = 0 \tag{1.8}$$

Ainsi, il ne reste plus qu'un seul paramètre de calcul, à savoir la longueur adimensionnelle du réservoir : $L = \frac{L'}{y_o}$

Finalement nous avons à résoudre le problème suivant :

$$\textbf{Trouvez} \quad \mathbf{y} \; : \;]\,\mathbf{0}\,,\mathbf{T_f}\,[\; \mathbf{x}\;]\,-\mathbf{L}\,,\mathbf{L_f}\,[\quad \textbf{tel que} :$$

$$(P_L) \quad \begin{cases} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}} - \frac{\partial^2 \mathbf{y}^4}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{0} \\ + & \textbf{condition initiale} \\ + & \textbf{conditions aux limites} \end{cases}$$

1.2 Discrétisation du problème

1.2.1 Schéma numérique utilisé

- Notations

L'équation (1.8) peut se réecrire

$$\frac{\partial y}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(y^3 \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \tag{1.9}$$

Nous posons : $q = y^3 \frac{\partial y}{\partial x}$ et $c = y^3$

C'est une équation non linéaire. On utilise généralement pour les résoudre des méthodes itératives. Mais comme notre problème est évolutif, cela implique de réaliser un certain nombre d'itérations à chaque pas de temps.
Cette stratégie peut se réveler très coûteuse en temps de calcul. Pour éviter cela, nous allons appliquer au terme $c = y^3$ un traitement particulier.

- Discrétisation temporelle

Nous commençons par discrétiser le problème en temps. Nous utilisons pour cela la méthode des différences finies. Celle-ci consiste à approximer les dérivées par des différences. Par exemple, on remplace $\frac{\partial y}{\partial t}$ par $\frac{\triangle y}{\triangle t}$ où $\triangle$ représente une différence entre deux valeurs proches. Ainsi, $\triangle y$ sera l'incrémentation de la fonction y sur l'intervalle de temps $\triangle t$. Il faut de plus que $\frac{\triangle y}{\triangle t} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial t}$ lorsque $\triangle t \rightarrow 0$ pour que le schéma soit consistant.

C'est un problème évolutif. Nous partons d'une situation initiale donnée, la condition initiale, puis nous calculons de façon itérative la solution à l'instant n+1 à partir de la solution à l'instant n, connue.

Pour des raisons de stabilité, nous utilisons un schéma implicite. Cela nous permet entre autre de prendre un pas de temps assez grand, ce qui est indispensable pour étudier des phénomènes lents ou de durée importante.

On utilise les notations suivantes :

$$t^n = t^0 + n\triangle t$$

avec $\triangle$t = $t^{n+1} - t^n$ le pas de temps et $t^0 = 0$ l'instant initial.

De même : $y^n = y\,(x\ ,\ t^n)$

L'équation (1.9) devient alors

$$\frac{y^{n+1} \; - \; y^{n}}{\triangle t} \; - \; 4 \; \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} \; = \; 0 \tag{1.10}$$

Pour résoudre le problème de la non linéarité, on évalue c à l'instant n dans l'expression de q^{n+1} :

$$q^{n+1} \; = \; c^{n} \; \frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} \tag{1.11}$$

Ainsi (1.10) devient

$$\frac{y^{n+1} \; - \; y^{n}}{\triangle t} \; - \; 4 \; \frac{\partial}{\partial x} \left(c^{n} \; \frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} \right) \; = \; 0 \tag{1.12}$$

- Discrétisation spatiale

Il reste à réaliser la discrétisation spatiale. Pour cela, nous allons commencer par découper l'intervalle d'étude $[\; -L \;, \; L_t \;]$ en $N+1$ points comme sur la figure ci-dessous (figure 2).

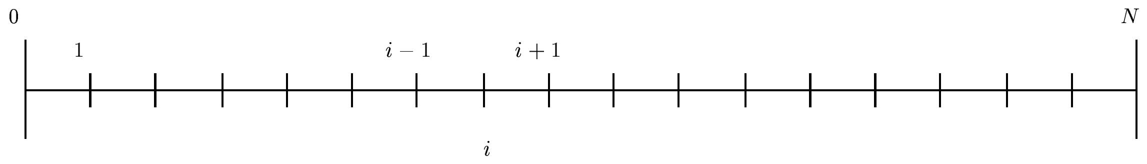


Figure 1.2: Discrétisation spatiale

Puis nous utilisons un schéma aux différences finies de type "grille centrée" pour exprimer les dérivées spatiales en termes de différences entre deux pas d'espace (cf figure 3).
Cela nous donne

$$\frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) \; \approx \; \frac{y_{i+1}^{n+1} \; - \; y_{i}^{n+1}}{\triangle x} \tag{1.13}$$

et

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \; = \; c_{i+\frac{1}{2}}^{n} \; \frac{y_{i+1}^{n+1} \; - \; y_{i}^{n+1}}{\triangle x} \tag{1.14}$$

avec $\quad q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \; \approx \; q \left(x_{i+\frac{1}{2}} \;, \; t^{n+1} \right) \; = \; q \left(x_0 \; + \; \left(i+\frac{1}{2} \right) h \;, \; t^0 \; + (n+1)\, k \right)$

où $\quad \triangle x \; = \; \frac{L+L_t}{N} \quad , \quad h \; = \; \triangle x \quad$ et $\quad k \; = \; \triangle t$

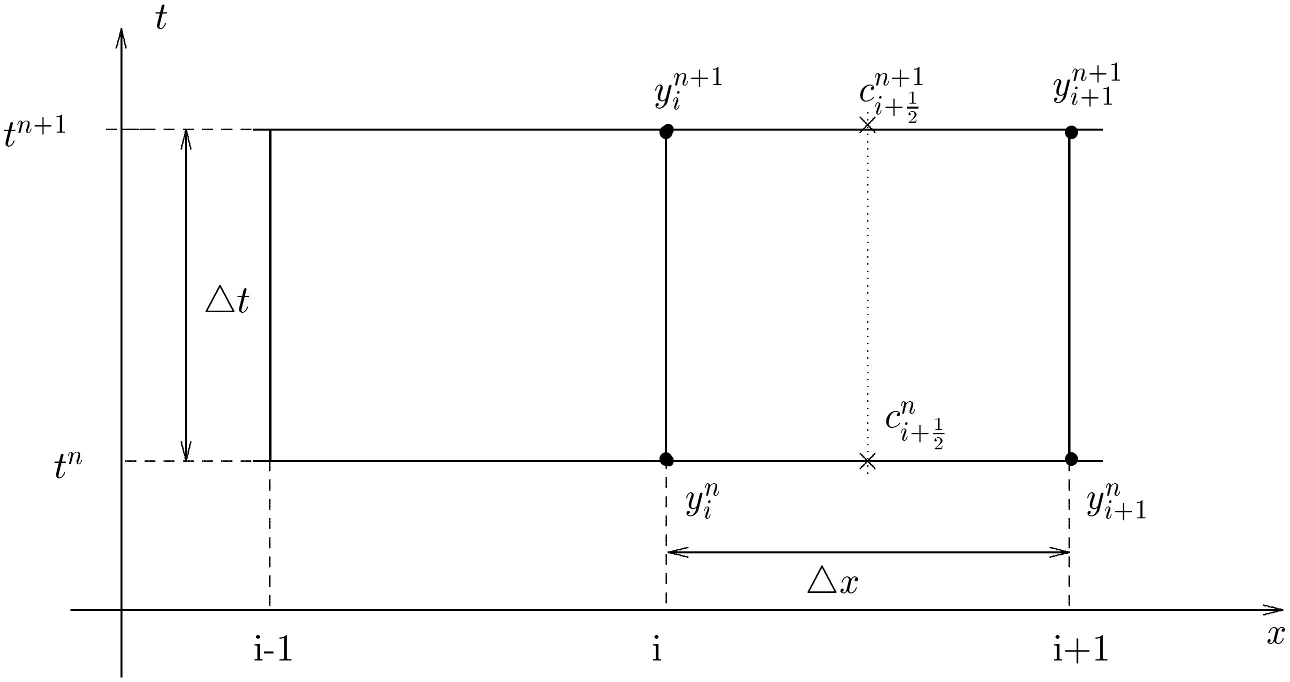


Figure 1.3: Schéma de type grille centrée

De même $\quad c_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\left(y_{i+1}^n\right)^3 + \left(y_i^n\right)^3}{2}$

Le coefficient c est calculé au milieu de l'intervalle $[x_i \ , \ x_{i+1}]$.

Avec ces notations, l'équation (1.12) devient pour chaque i

$$\frac{y_i^{n+1} \ - \ y_i^n}{\triangle t} \ - \ 4 \ \frac{q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \ - \ q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} \ = \ 0 \qquad \forall \, i \in \{0, N\} \tag{1.15}$$

Soit finalement pour la i^{eme} ligne

$$y_i^{n+1} \ - \ 4 \ \frac{\triangle t}{(h)^2} \left[\ c_{i-\frac{1}{2}}^n \, y_{i-1}^{n+1} \ - \ \left(c_{i-\frac{1}{2}}^n + c_{i+\frac{1}{2}}^n\right) y_i^{n+1} \ + \ c_{i+\frac{1}{2}}^n \, y_{i+1}^{n+1} \ \right] \ = \ y_i^n \tag{1.16}$$

Ceci étant vrai pour tout i allant de 0 à N nous avons donc un système de N+1 équations linéaires couplées, et d'inconnues $[y_i^{n+1}]_{i=0,\ldots,N-1}$

1.2.2 Système matriciel obtenu

Il est donc équivalent au système matriciel suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix}}_{A^{n+1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Si on pose $\alpha \;=\; 4\,\lambda$ avec $\lambda \;=\; \frac{\triangle t}{(h)^2}$ on obtient comme expression de la matrice A^{n+1} $\forall \quad 1 \leq i \geq N-1$

- $a_{i,i-1} \;=\; -\alpha c^n_{i-\frac{1}{2}}$
- $a_{i,i} \;=\; 1 + \alpha \left(c^n_{i-\frac{1}{2}} + c^n_{i+\frac{1}{2}} \right)$
- $a_{i,i+1} \;=\; -\alpha c^n_{i+\frac{1}{2}}$
- $a_{i,j} \;=\; 0 \qquad \forall \quad j < i-1 \quad ou \quad j > i+1$

Il reste à prendre en compte les conditions aux limites, ce qui va nous permettre de préciser les coefficients pour $i = 0$ et $i = N$

- Prise en compte des conditions aux limites

  – Aval

  La condition aval, qui signifie que la hauteur de fluide est nulle en ce point, s'exprime facilement dans (1.17) en remplaçant y_N^n et $a_{N,N-1}$ par 0, et $a_{N,N}$ par 1.

  – Amont

  Nous avons en amont une condition de Neuman homogène. Pour l'exprimer il suffit de ne rien changer dans l'expression matricielle du problème.

Nous obtenons donc le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & -\alpha c^n_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -\alpha c^n_{N-\frac{1}{2}} & 1+\alpha c^n_{N-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}_{A^{n+1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^n \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Ces opérations effectuées, nous obtenons un système matriciel à résoudre avec A^{n+1} une matrice symétrique, tridiagonale, à diagonale strictement dominante. De plus ses termes diagonaux sont tous strictement positifs elle est donc définie positive. Nous pouvons donc utiliser une méthode de “CHOLESKY” avec factorisation “CC^T” de la matrice A^{n+1}.

Toutefois le caractère non linéaire du terme c nous a obligé à l’évaluer à l’instant n. Le schéma n’est donc que semi-implicite. Si les variations de c sont importantes entre deux pas de temps, cela peut induire des erreurs non négligeables.

Pour y remédier sans avoir à prendre des pas de temps très petits, nous avons utilisé une méthode[1] qui consiste à recalculer la solution à l’instant n+1 mais en utilisant pour évaluer c les valeurs de y que l’on vient d’obtenir (C’est équivalent à n’itérer qu’une fois la méthode du point fixe).

Ainsi, ayant obtenu un vecteur y^{n+1} solution, on calcule une valeur moyenne de c_i^{n+1}

$$c^{n+1}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{c^n_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[\left(y^{n+1}_{i+1}\right)^3 + \left(y^{n+1}_{i}\right)^3\right]}{2}$$

qu’on utilise pour résoudre à nouveau le système (1.18).

[1]pour plus de détails voir l’ouvrage de saatdjian [2]

1.2.3 Mise en oeuvre informatique

A chaque itérations, nous avons un système linéaire "$Au = b$" à résoudre.
On utilise pour cela une factorisation de Cholesky "$A = CC^T$", puis on résout successivement les deux systèmes "$Cy = b$" et "$C^T u = y$", C étant triangulaire inférieure.

Or ici A^{n+1} est tridiagonale. Il a donc été possible d'optimiser la place mémoire et le temps de calcul nécéssaires en utilisant un stockage bande et en n'effectuant les calculs que sur les seuls termes non nuls.

D'autre part, l'emploi systématique de pointeurs pour manipuler les tableaux, c'est à dire la suppression de tout indice, nous a permis de réduire encore le temps de calcul par deux. Finalement le nombre total d'opérations effectuées est en O(N) avec N le nombre de noeuds du maillage.

Grâce à cela nous obtenons un programme qui résout un système 10000x10000 (creux) en un peu moins de 1.2 seconde de temps CPU sur une station HP9000, et 0.17 seconde sur une station Linux intel 686 à 200Mhz.

1.3 Résolution numérique

1.3.1 Détermination des paramètres de convergence

Nous sommes passé du problème continu au problème discret en utilisant des approximations. Nous avons en particulier approché les dérivées spatiales et temporelles par des différences finies. Or plus l'intervalle sur lequel ces différences sont évaluées est grand, moins l'approximation est précise. Il convient donc de définir les valeurs maximales de ces paramètres pour lesquelles l'erreur induite reste négligeable.

Les paramètres qui nous intéressent ici sont le pas de temps, c'est à dire la longueur de l'intervalle utilisé pour approcher la dérivée temporelle et pour les dérivées spatiales le pas d'espace h qui est défini par le nombre de points du maillage N comme suit : $h = \frac{L+L_t}{N}$

Mais ces deux paramètres sont liés. En effet, dans l'expression matricielle de notre problème nous avons le coefficient α défini par : $\alpha = 4\lambda$ avec $\lambda = \frac{\triangle t}{(h)^2}$
Il est donc nécessaire pour la précision du calcul que λ ne soit pas trop grand.
Il faut donc pour un h donné prendre $\triangle t$ assez petit.

- Pas en espace

C'est pourquoi nous commençons par déterminer le pas d'espace optimal, c'est à dire celui en deça duquel la précision du calcul n'évolue quasiment plus. Pour cela nous avons fait varier le nombre de points, à L et $\triangle t$ fixés.

Nous avons pris $L = 10$. Le pas de temps est choisi très petit $\triangle t = 0.002$ seconde.

Nous avons représenté le profil de la surface libre obtenu pour $t = 20$ dans les différents cas.
Sur chaque figure ont été affichées deux courbes. D'une part le résultat pour un pas d'espace très petit (On a choisi $h = 0.0001$ dans ce cas) et d'autre part le résultat pour le pas d'espace testé. Pour plus de clarté, nous avons rajouté sur la première figure (figure 4a) la représentation du barrage, c'est à dire le profil de la surface libre avant écoulement.

Nous constatons que lorsque h décroît il y a effectivement convergence vers la solution numérique. De plus, seule la région du front de l'écoulement présente une erreur numérique importante.

Pour quantifier cette erreur, nous avons calculé la différence entre l'aire représentant la quantité de fluide perdue en amont du barrage et celle représentant la quantité gagnée en aval (cf annexe C). Cette différence est proportionnelle à h.

Comme on peut le voir sur la figure 4a, dès que le pas $h = 0.1$ nous avons une erreur très réduite. De plus, elle est surtout marquée dans la région du front. C'est pourquoi, sur les figures suivantes, nous avons fait un gros plan de cette zone. Malgré cet agrandissement, on constate une différence à peine visible au niveau du front sur la figure 4b, les deux courbes étant confondues sur la figure 4c.

Compte tenu des erreurs numérique commises (voir annexe C), nous avons choisi de prendre un pas h égal à 10^{-3}.

Nous avons donc dans ce qui suit utilisé ce pas d'espace.

- Pas en temps

Le pas d'espace étant choisi, il nous reste à définir le pas de temps optimal qui lui correspond. Ceci est réalisé en faisant cette fois varier le pas de temps à L et h fixé.
Comme pour le pas d'espace on prend $L = 10$.

Nous avons à nouveau représenté les profils de la surface libre obtenus dans les différents cas avec sur chaque figure les deux courbes correspondant d'une part à un pas de temps inférieur au pas optimal (On a choisi $\triangle t = 0.0001$ seconde dans ce cas) et d'autre part au pas de temps testé.

Cette fois l'erreur numérique est évaluée sur l'abscisse du front. On compare le résultat obtenu pour le pas testé avec celui obtenu pour $\triangle t = 0.0001$ de la façon suivante :

$$E_r = \mid x_{front}(\triangle t\, teste) - x_{front}(\triangle t = 0.0001) \mid$$

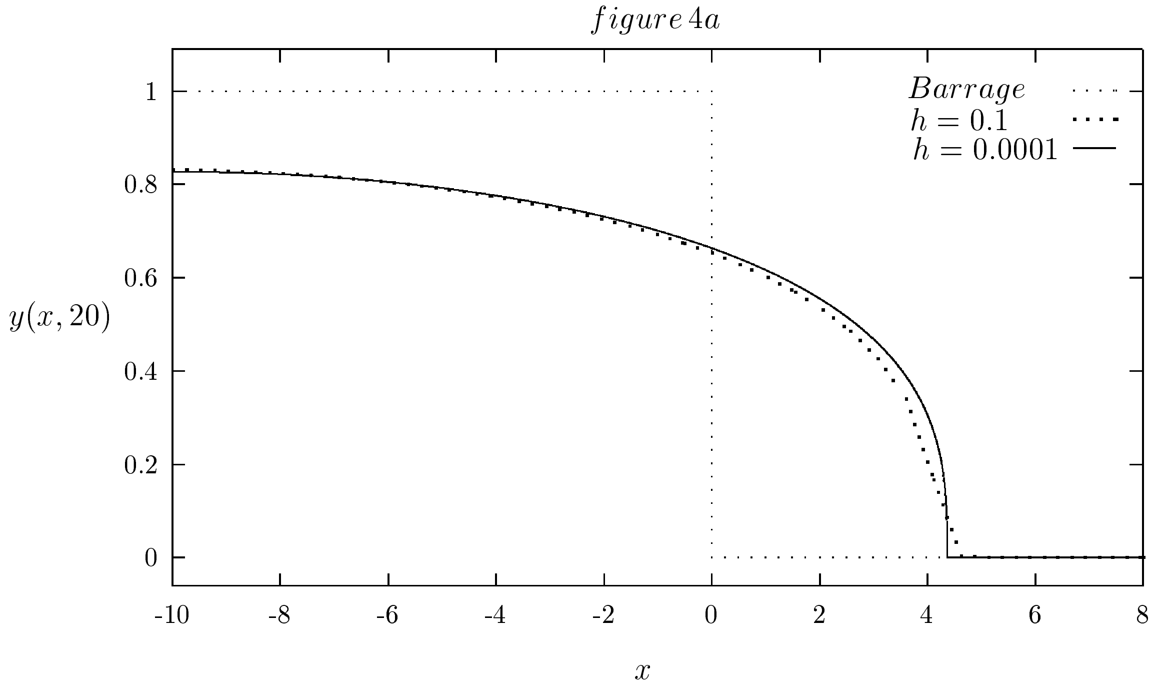
Ainsi, nous pouvons constater sur la figure 5a une nette différence. Le pas de temps $\triangle t = 0.2$ est donc beaucoup trop grand avec ces données.
Pour la figure 5b l'erreur est assez petite, c'est pourquoi nous avons à nouveau fait un gros plan de la région du front là où l'erreur est la plus importante. Malgré cela les deux courbes sont confondues sur la figure 5c. Cela indique qu'à partir du pas de temps $\triangle t = 0.002$ le gain de précision n'est plus significatif.

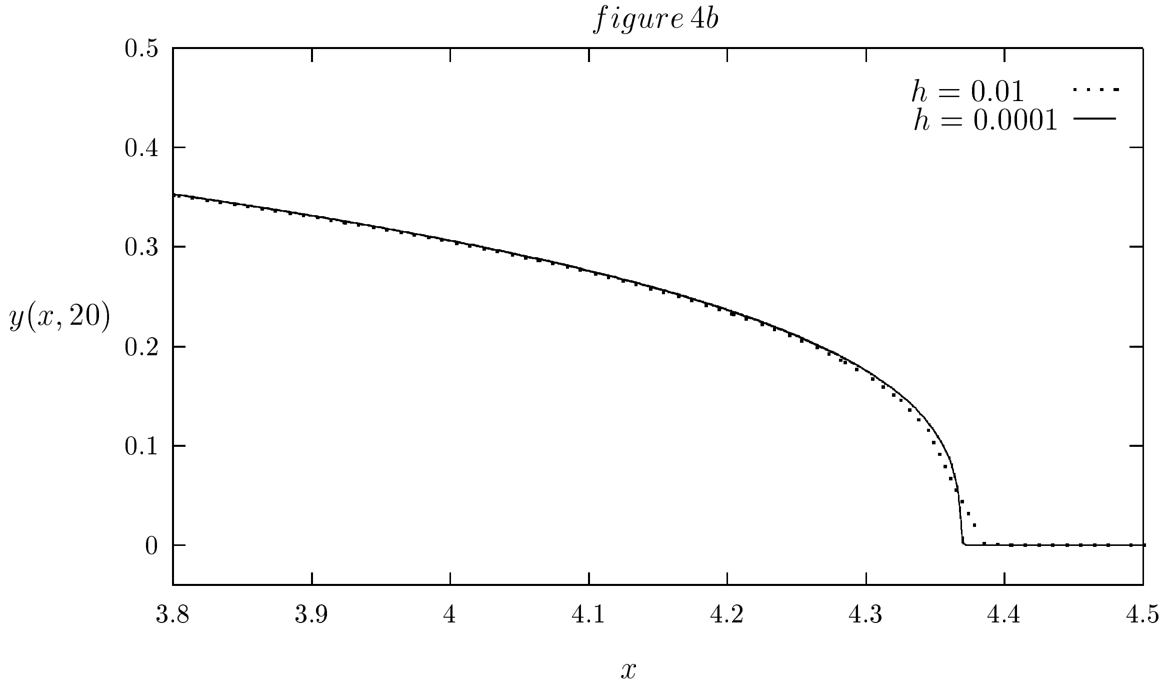
Les erreurs numériques commises sont réunies dans le tableau ci-dessous :

valeur du pas de temps $\triangle t$	Différence des abscisses
$\triangle t = 0.2$	$E_r = 3,36$
$\triangle t = 0.02$	$E_r = 0,029$
$\triangle t = 0.002$	$E_r = 4.10^{-4}$

Ce sont ces valeurs de h et $\triangle t$ que nous avons utilisé pour les exemples qui suivent. (sauf mention contraire)

Figure 1.4: Comparaison des profils de la surface libre obtenus pour différents pas d'espace à $t = 20$, avec $\triangle t \ = \ 0.002$.





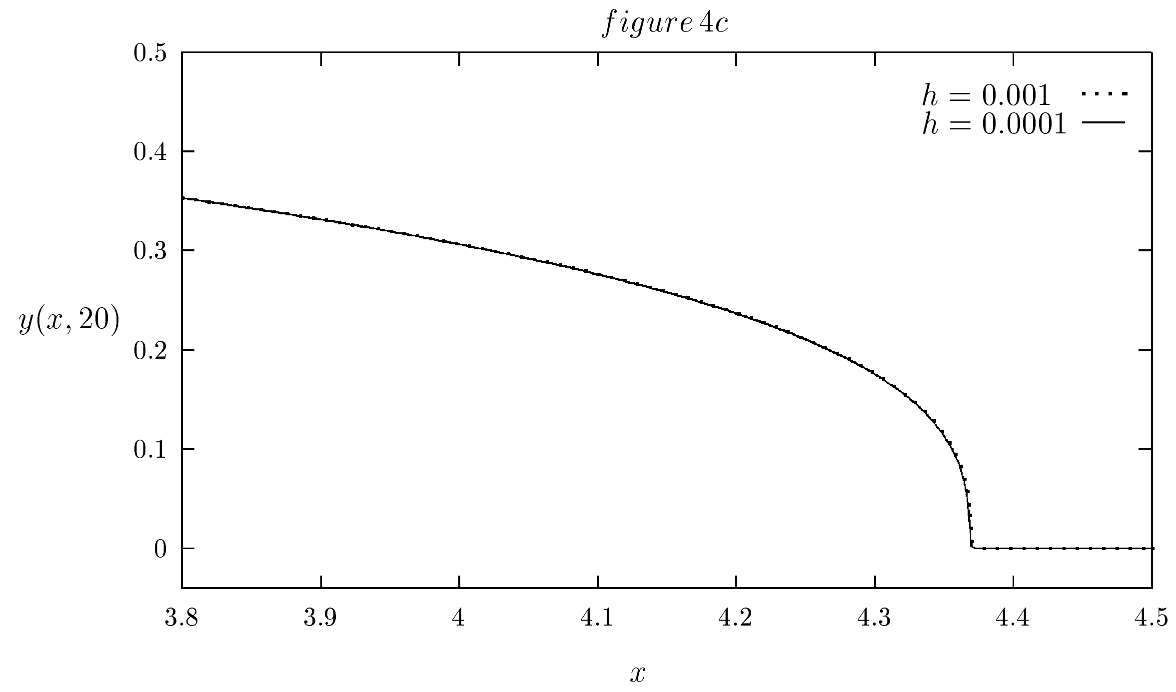
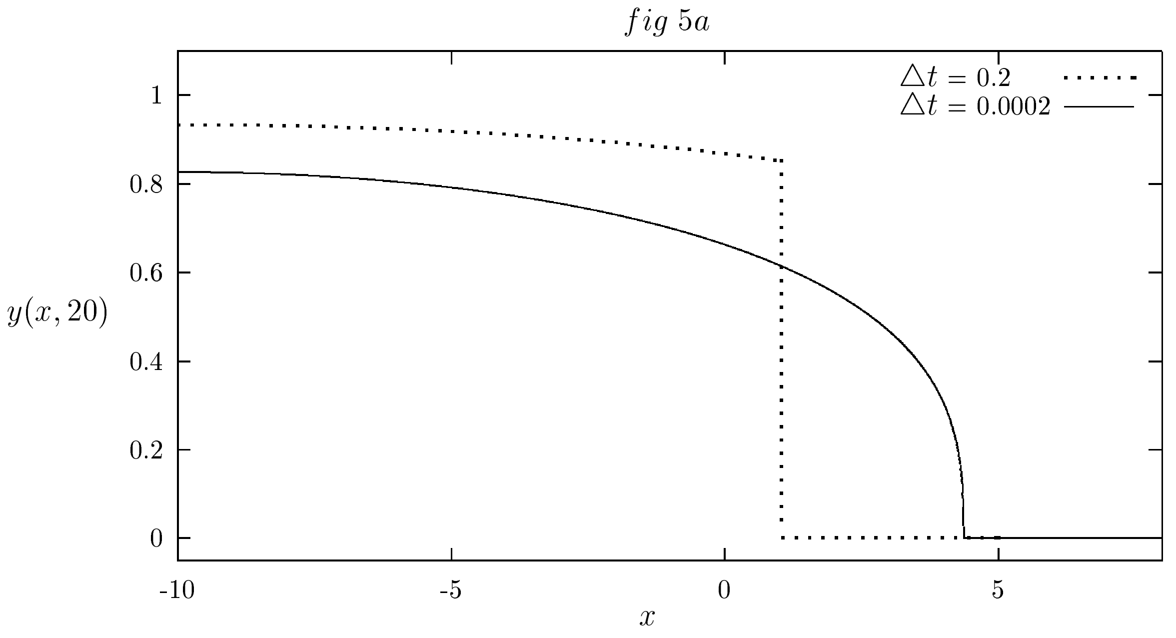
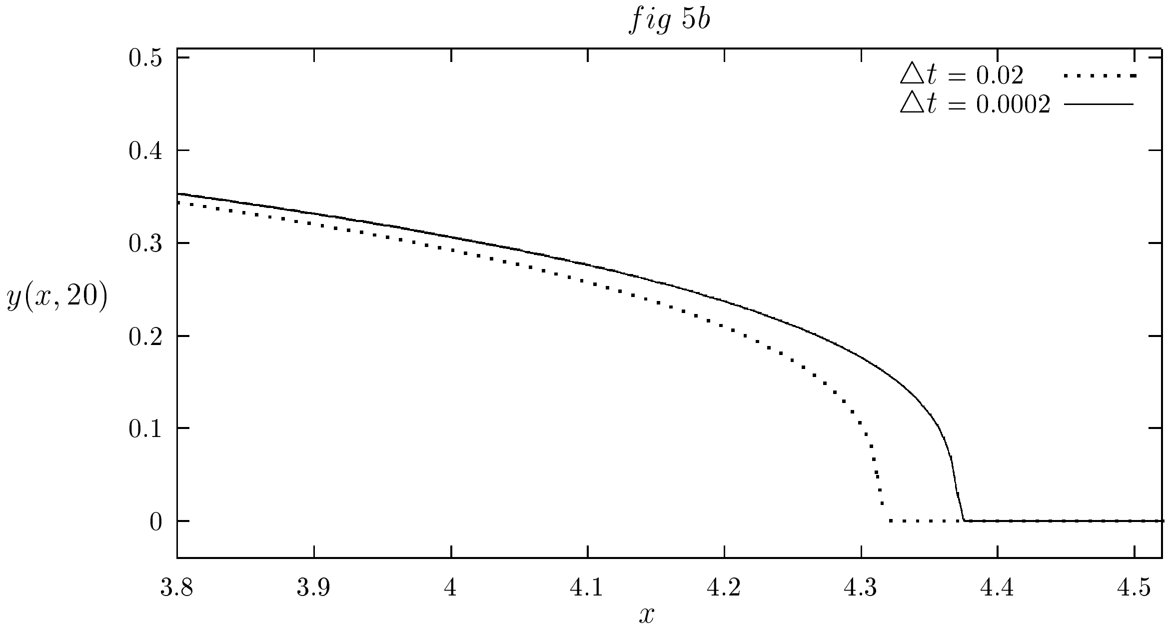
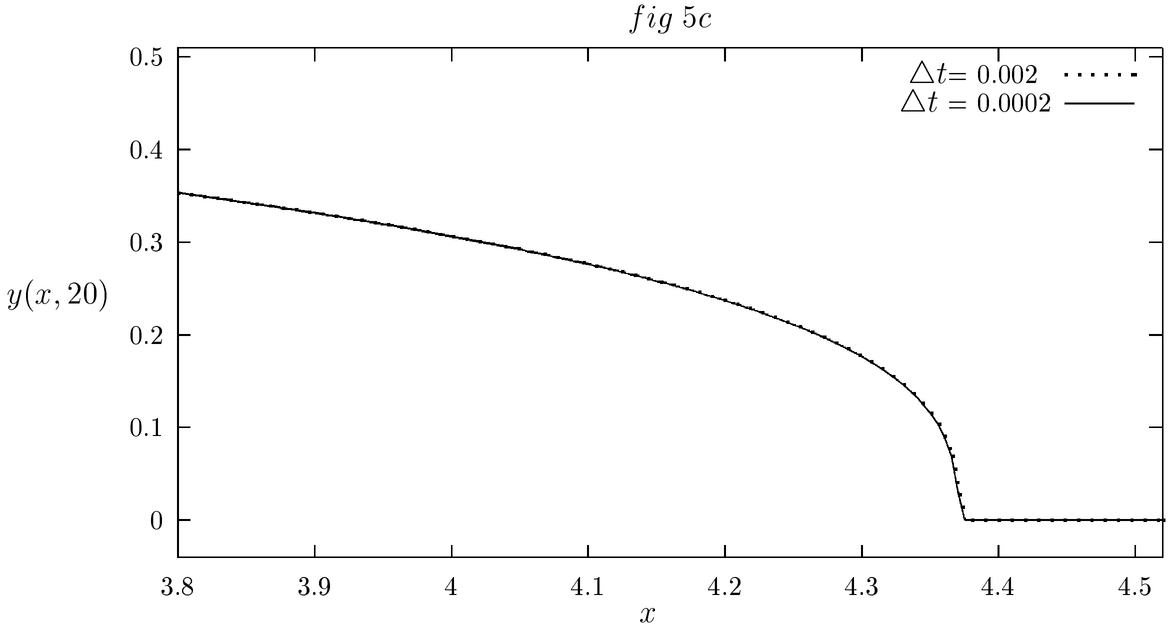


Figure 1.5: Comparaison des profils de la surface libre obtenus pour différents pas de temps avec $h = 0.001$





$fig\ 5b$
$\triangle t = 0.02$
$\triangle t = 0.0002$
$y(x, 20)$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
3.8
3.9
4
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
x



$fig\ 5c$
$\triangle t$= 0.002
$\triangle t = 0.0002$
$y(x, 20)$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
3.8
3.9
4
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
x

1.3.2 Exploitation des résultats

A partir des différents résultats numériques obtenus, il nous est possible de tirer des enseignements concernant l'influence de certains paramètres sur le comportement du modèle étudié et les limites de celui-ci.

Ainsi, sur la figure 6b, la donnée de l'évolution du front de l'écoulement en fonction du temps nous permet de déduire une loi de comportement qui fait apparaître deux régimes d'écoulement distincts.
Or les résultats montrent que dans le cas de fluides visqueux, la longueur du réservoir constitué par le barrage joue un rôle sur l'écoulement.

Nous nous sommes donc intéressé au rôle de ce paramètre sur ces différents régimes.
Afin de le définir, nous avons fait varier la longueur L. Nous avons alors observé l'évolution des régimes d'écoulement.

A/ Influence de L sur les régimes d'écoulement

La figure 6a traduit l'évolution de l'abscisse du front en fonction du temps pour différentes longueurs de réservoir.

Lorsque L croît, la vitesse de l'écoulement s'accroît, car à un instant donné, plus L est grand plus le front de l'écoulement est "loin" du barrage (les courbes sont au dessus des précédentes).

Sur la figure 6b nous avons fait un gros plan de ce qui se passe pour $t < 40$. Cela nous permet de voir que jusqu'à $t \approx 0.5$ l'abscisse du front est identique pour toutes les longueurs. De même, elle est confondue pour $L = 10$ et $L = 100$ jusqu'à $t \approx 20$.

Mais ce sont les représentations en log-log (on représente le logarithme de l'abscisse du front en fonction du logarithme du temps) qui sont les plus instructives.

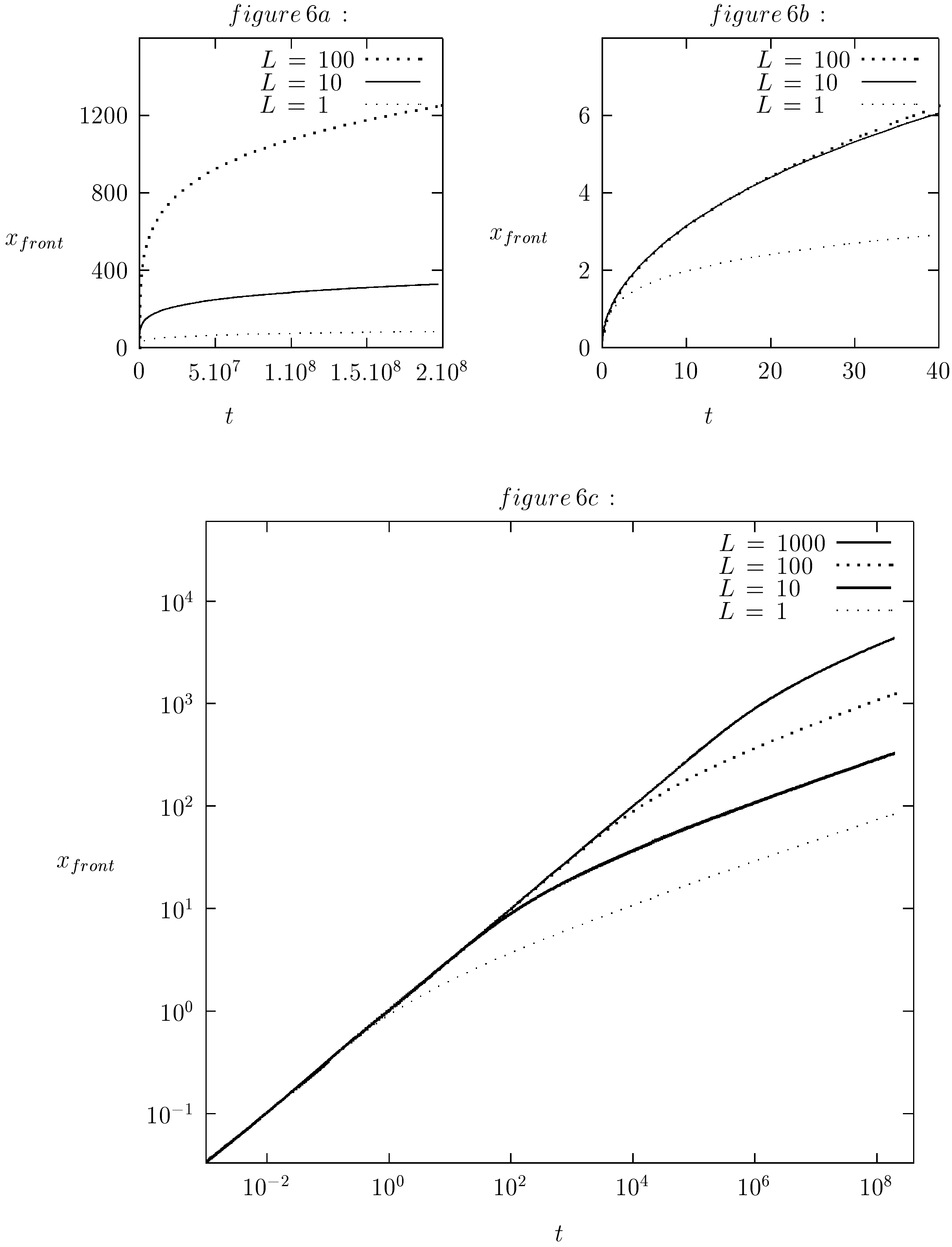
En effet, sur la figure 6c, deux régimes d'écoulement apparaissent très distinctement.

Nous avons effectué les calculs pour des temps très grands afin de voir le passage au second régime pour $L = 100$ et $L = 1000$. De même, afin d'obtenir le premier régime pour des temps assez petits, nous avons dû raffiner le maillage localement (cf annexe D).

Nous pouvons remarquer que le premier régime est commun aux différentes longueurs étudiées, seule sa durée est variable. Plus L est grand plus ce premier régime dure longtemps. Puis il y a une période de transition dont la durée varie également avec L. Enfin, le second régime se situe dans la partie correspondant aux temps grands.

Les quatre longueurs étudiées, à savoir $L = 1$, $L = 10$, $L = 100$ et $L = 1000$ nous ont permis de préciser les valeurs associées à ces différents régimes.

Figure 1.6: Evolutions de l'abscisse du front en fonction du temps. Représentation en x et t et en log x et log t



Pour commencer nous avons calculé les pentes des droites représentant les deux régimes. Elles valent respectivement 0.5 pour le premier régime et 0.2 pour le second.

Cela signifie que l'abscisse du front est proportionnelle au temps à la puissance 0.5 pour le premier régime et 0.2 pour le second. Nous avons plus précisement :

pour le premier régime :

$$x_{front} \approx t^{0.5}$$

et pour le second :

$$x_{front} \approx c\,(L)\,t^{0.2}$$

Nous nous sommes donc appliqué à définir la valeur de $c\,(L)$. Pour cela, il suffit de déterminer les équations des tangentes dans les différents cas. En effet nous avons pour ces droites :

$$Y = aX + b$$

avec

$$Y = Log_{10}\,(x_{front}) \quad et \quad X = Log_{10}\,(t)$$

soit finalement :

$$x_{front} = 10^b\,t^a$$

Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Longueur du réservoir L	coefficient 10^b	coefficient a
$L = 1$	$c(L) \approx 1.8$	0.201
$L = 10$	$c(L) \approx 6.3$	0.206
$L = 100$	$c(L) \approx 19.9$	0.216
$L = 1000$	$c(L) \approx 39.8$	0.245

En écrivant $c(L) = c_1\,L^\alpha$ on obtient : $c_1 \approx 1.8$ et

L	valeur de α
10	$\alpha \approx 0.58$
100	$\alpha \approx 0.54$
1000	$\alpha \approx 0.46$

Comme la valeur asymptotique du second régime, c'est à dire 0.2 n'est pas totalement atteinte pour $L = 1000$ et dans une moindre mesure pour $L = 100$ (cf tableau ci-dessus), la précision de la constante c est donc un peu moins grande dans ces deux cas (c est plus petit car la tangente ayant une pente légérement supérieure à 0.2 son intersection avec l'axe des ordonnées se situe plus bas). par conséquent la valeur la plus fine est celle calculée avec $L = 10$.

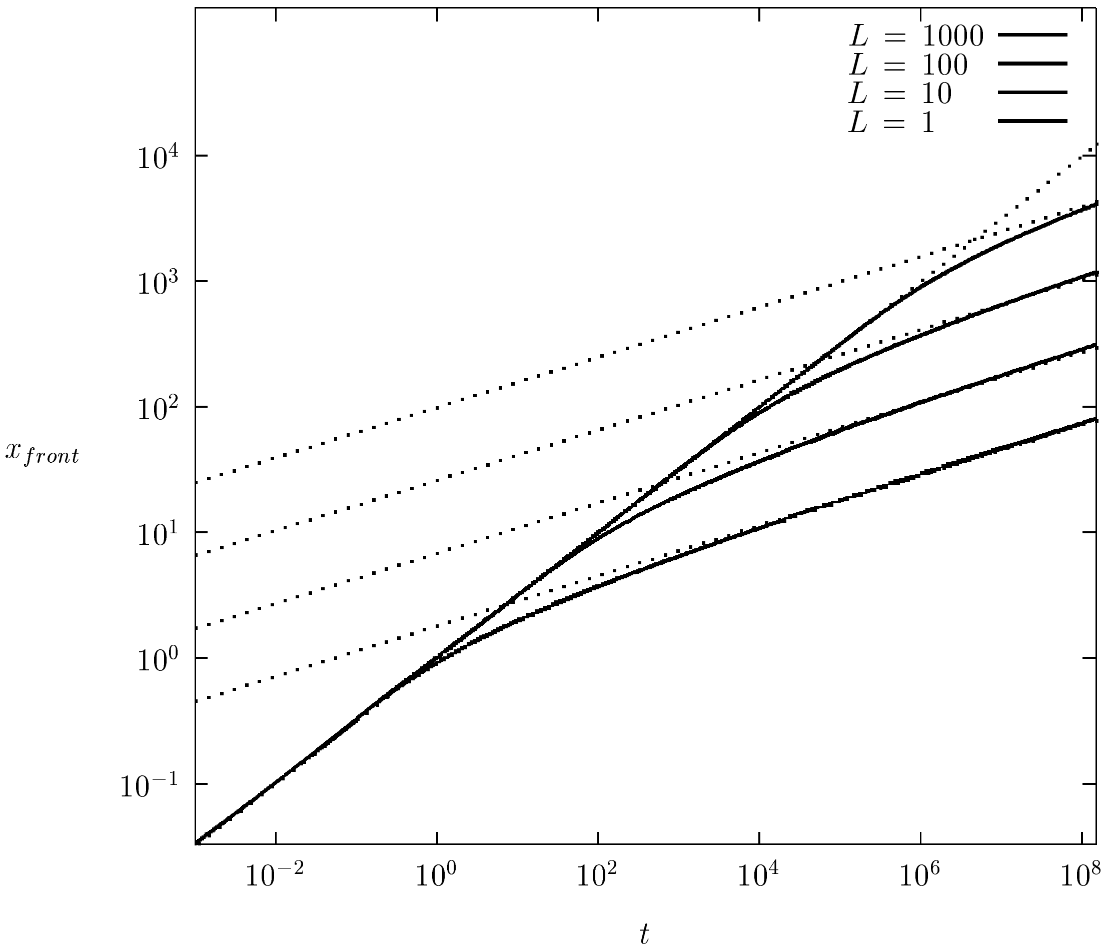
Nous obtenons donc les lois de comportement suivantes :

Loi de Propagation du Front

$$x_F(t) \approx \begin{cases} t^{0.5} & \text{pour } x_F(t) \ll L \\ 1.8\ L^{0.58}\ t^{0.2} & \text{pour } x_F(t) \gg L \end{cases} \tag{1.19}$$

Afin de vérifier la précision de ces calculs, nous avons tracé sur une même figure les courbes d'évolutions du front obtenues numériquement et les asymptotes que l'on vient de calculer.
On peut constater sur la figure 6*d* qu'en utilisant les valeurs obtenues ci-dessus, les lois de comportement donnent une approximation assez fine des comportements asymptotiques pour les grands et les petits temps de la position du front en fonction du temps.

$figure\,6d$: representation des asymptotes



B/ Influence de L sur la hauteur de l'écoulement

Dans le cas de fluide visqueux la longueur L intervient également sur la hauteur maximum atteinte par la surface libre en un point d'abscisse donné. Nous nous sommes donc intéressé à l'évolution de cette hauteur maximum.

Pour cela, nous avons utilisé trois types de représentations.

- Profil de la surface libre

  - *Remarque* : Pour davantage de clarté, nous avons utilisés des échelles différentes sur chacune des courbes. Ainsi, sur la figure $7a$ nous n'avons représenté les résultats que sur l'intervalle $[-5 : 1]$, afin que la différence entre $L = 10$ et $L = 1$ soit visible. Tracer la courbe jusqu'à l'abscisse du fond du réservoir pour $L = 100$ ou $L = 10$ n'apportait rien car pour ces deux longueurs, le fluide n'a pas commencé à s'écouler dans cette partie du réservoir à cet instant.

Sur les figures $7a$ à $7d$, le tracé des profils à différents instants et pour différentes valeurs de L nous permet plusieurs observations.

En premier lieu, il confirme les résultats du paragraphe précédent.

En effet, sur la figure $7a$ pour $t = 0.5$, les courbes sont toutes confondues dans la région du front ce qui confirme qu'elles sont encore toutes dans le même régime d'écoulement. De même, sur la figure $7b$, c'est encore le cas pour $L = 10$ et $L = 100$ alors que pour $L = 1$ il y a bien eu changement de régime.

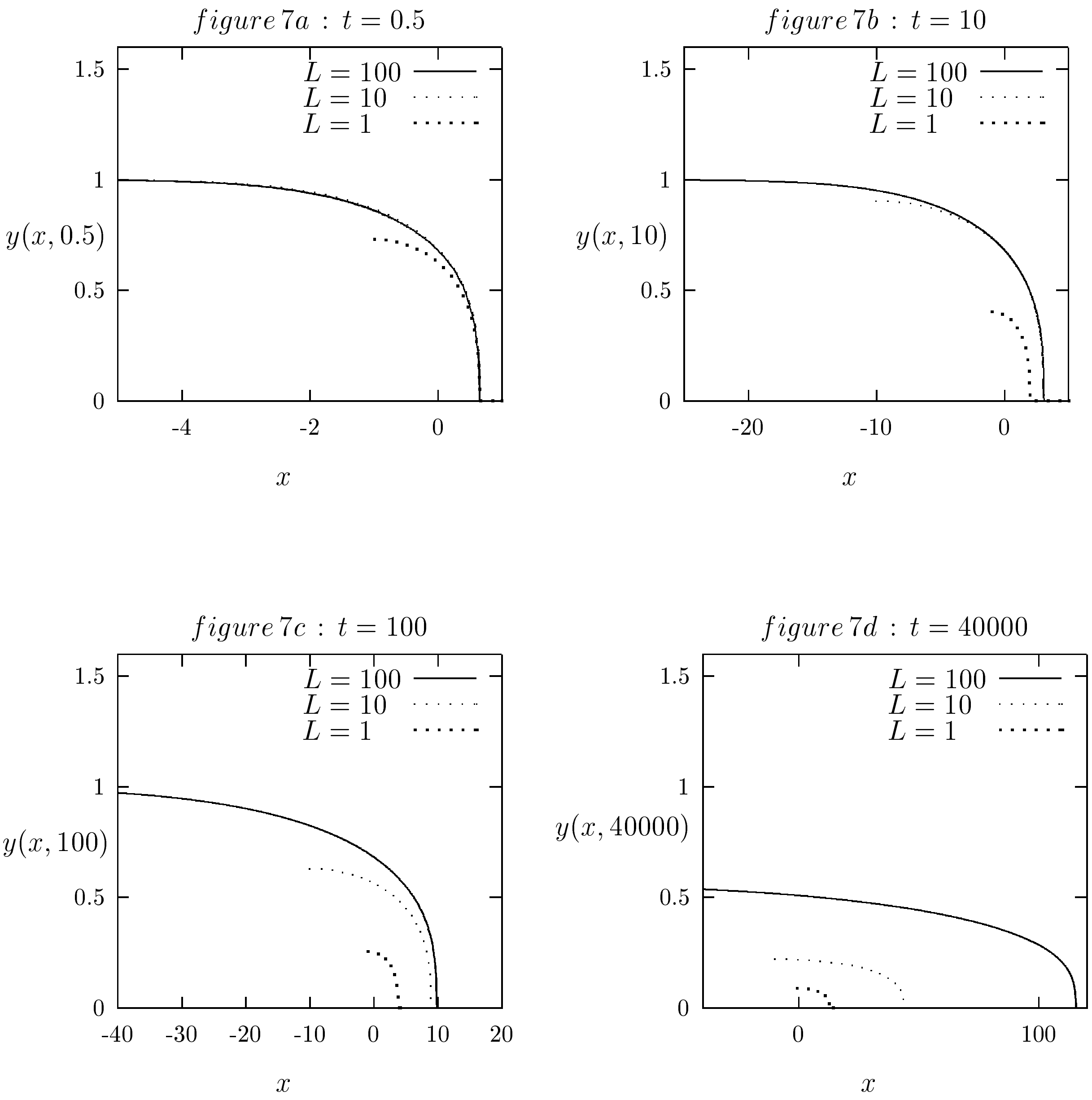
Sur la figure $7c$, la courbe pour $L = 10$ vient de quitter le premier régime ce qui explique la petite différence d'abscisse du front avec la courbe pour $L = 100$ qui est encore dans le premier régime. Enfin sur la figure $7d$, tous les écoulements sont sortis du premier régime. Les abscisses sont très différentes les une des autres.

Cependant, nous pouvons noter que la forme du front est restée inchangée, quels que soient les régimes. Elle n'a pas évolué même après des durées d'écoulement prés importantes (au de la de 10^8).

D'autre part, il nous indique globalement de quelle manière les hauteurs évoluent avec le temps et met en évidence le rôle de la longueur L sur ces variations.

Néanmoins, pour une étude plus fine de ces variations, nous avons eu recours à d'autres représentations.

Figure 1.7: Comparaison des profils de la surface libre pour différentes longueurs à différents instants



- Evolution de $y(t)$ pour une abscisse donnée

Il nous a paru important de tracer l'évolution de y en fonction du temps pour des abscisses judicieusement choisies. C'est pourquoi, nous avons réunis dans deux tableaux les hauteurs de fluide à l'abscisse du fond du réservoir et à celle du nœud situé juste après le barrage, ceci pour les trois longueurs déjà rencontrées.

Abscisse x = -L

Durée de l'écoulement	$L = 1$	$L = 10$	$L = 100$
$t = 0.040$	$y = 0.99$	$y = 1.00$	$y = 1.00$
$t = 0.120$	$y = 0.96$	$y = 1.00$	$y = 1.00$
$t = 0.480$	$y = 0.84$	$y = 0.99$	$y = 1.00$
$t = 1.000$	$y = 0.72$	$y = 0.99$	$y = 1.00$
$t = 2.000$	$y = 0.60$	$y = 0.99$	$y = 1.00$
$t = 5.000$	$y = 0.47$	$y = 0.96$	$y = 1.00$
$t = 10.00$	$y = 0.40$	$y = 0.90$	$y = 1.00$
$t = 20.00$	$y = 0.35$	$y = 0.82$	$y = 1.00$
$t = 100.0$	$y = 0.25$	$y = 0.63$	$y = 0.99$
$t = 500.0$	$y = 0.22$	$y = 0.46$	$y = 0.96$
$t = 1600.$	$y = 0.14$	$y = 0.36$	$y = 0.85$
$t = 40000$	$y = 0.09$	$y = 0.22$	$y = 0.55$

Abscisse x = 0.01

Durée de l'écoulement	$L = 1$	$L = 10$	$L = 100$
$t = 0.040$	$y = 0.684$	$y = 0.657$	$y = 0.642$
$t = 0.120$	$y = 0.683$	$y = 0.664$	$y = 0.652$
$t = 0.480$	$y = 0.635$	$y = 0.671$	$y = 0.662$
$t = 1.000$	$y = 0.570$	$y = 0.674$	$y = 0.667$
$t = 2.000$	$y = 0.510$	$y = 0.677$	$y = 0.671$
$t = 5.000$	$y = 0.440$	$y = 0.679$	$y = 0.675$
$t = 10.00$	$y = 0.382$	$y = 0.676$	$y = 0.677$
$t = 20.00$	$y = 0.345$	$y = 0.661$	$y = 0.679$
$t = 100.0$	$y = 0.253$	$y = 0.564$	$y = 0.681$
$t = 500.0$	$y = 0.178$	$y = 0.432$	$y = 0.682$
$t = 1600.$	$y = 0.132$	$y = 0.351$	$y = 0.676$

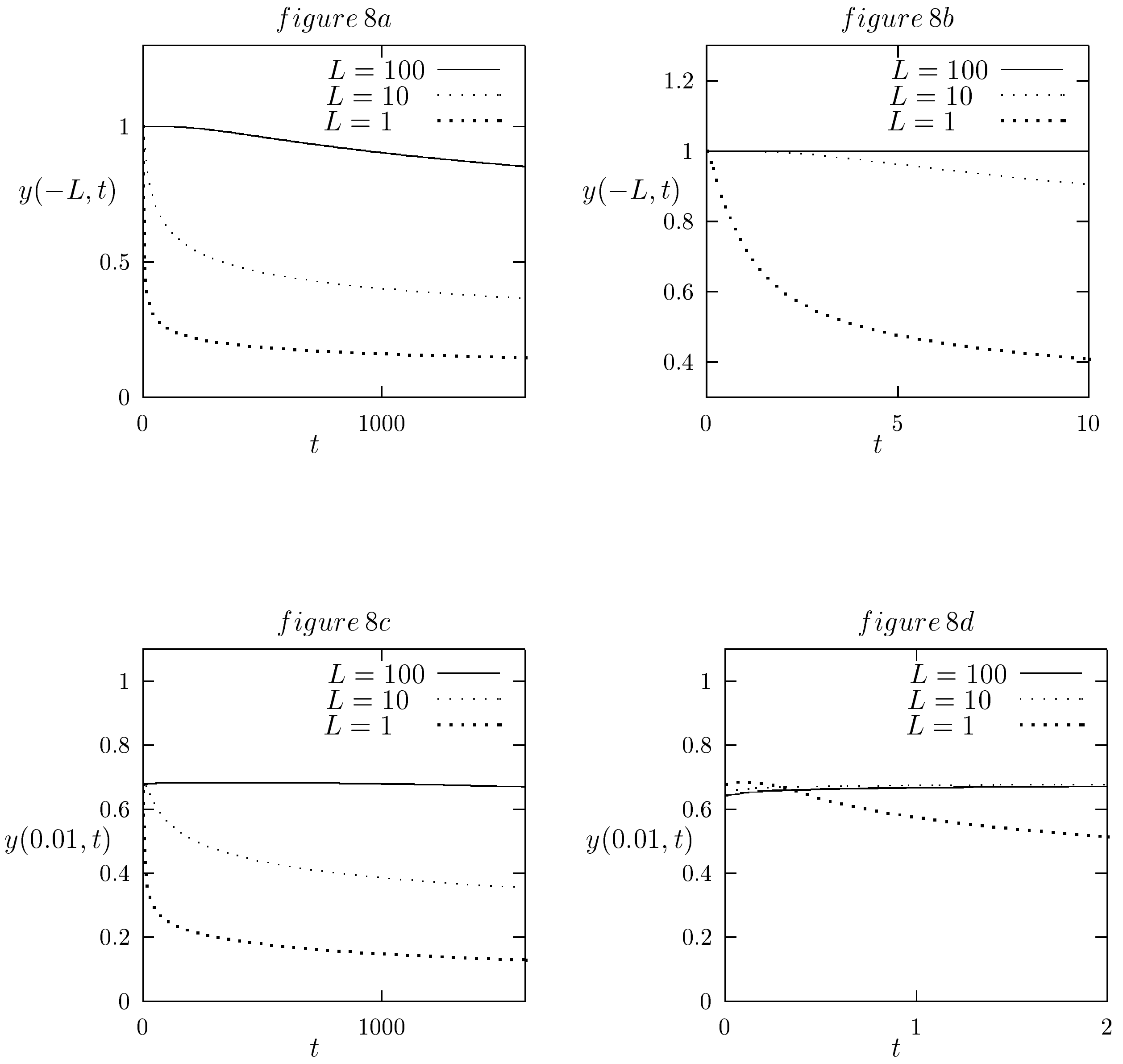
Concernant la hauteur de fluide à l'amont du réservoir nous obtenons bien une diminution progressive. De surcroît plus L est grand plus le temps nécessaire pour que le fond du réservoir se vide est important et celui-ci se vide bien évidement moins vite. Ainsi, pour $L = 1000$, il faut aller au delà de $t = 100$ pour que la hauteur de fluide au fond du réservoir commence à diminuer.

Nous retrouvons tous ces éléments sur les figures 8a et 8b. La figure 8b, qui est un gros plan de ce qui se passe pour des petits temps, nous montre que dans le cas $L = 10$, la hauteur au fond du réservoir commence à varier de façon significative pour $t > 2$.

Sur les figures 8c et 8d sont représentées les courbes d'évolution de la hauteur à la côte situé juste après le barrage (en aval de celui-ci). Elles correspondent à ce que l'on attendait, à savoir une hauteur à peu prés équivalente aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur initiale et qui ne varie quasiment pas durant un intervalle de temps d'autant plus long que L est grand ($t > 20$ pour $L = 10$ et $t > 1500$ pour $L = 100$).

Seul le cas $L = 1$ ne vérifie pas principe. En effet, pour cette longueur, l'onde "négative" a atteint très rapidement le fond du réservoir et le niveau de celui-ci s'est globalement abaissé ce qui explique cette diminution quasi-immédiate de la hauteur à l'abscisse du barrage.

Figure 1.8: Evolution de y en fonction du temps au fond du réservoir et à l'abscisse du barrage

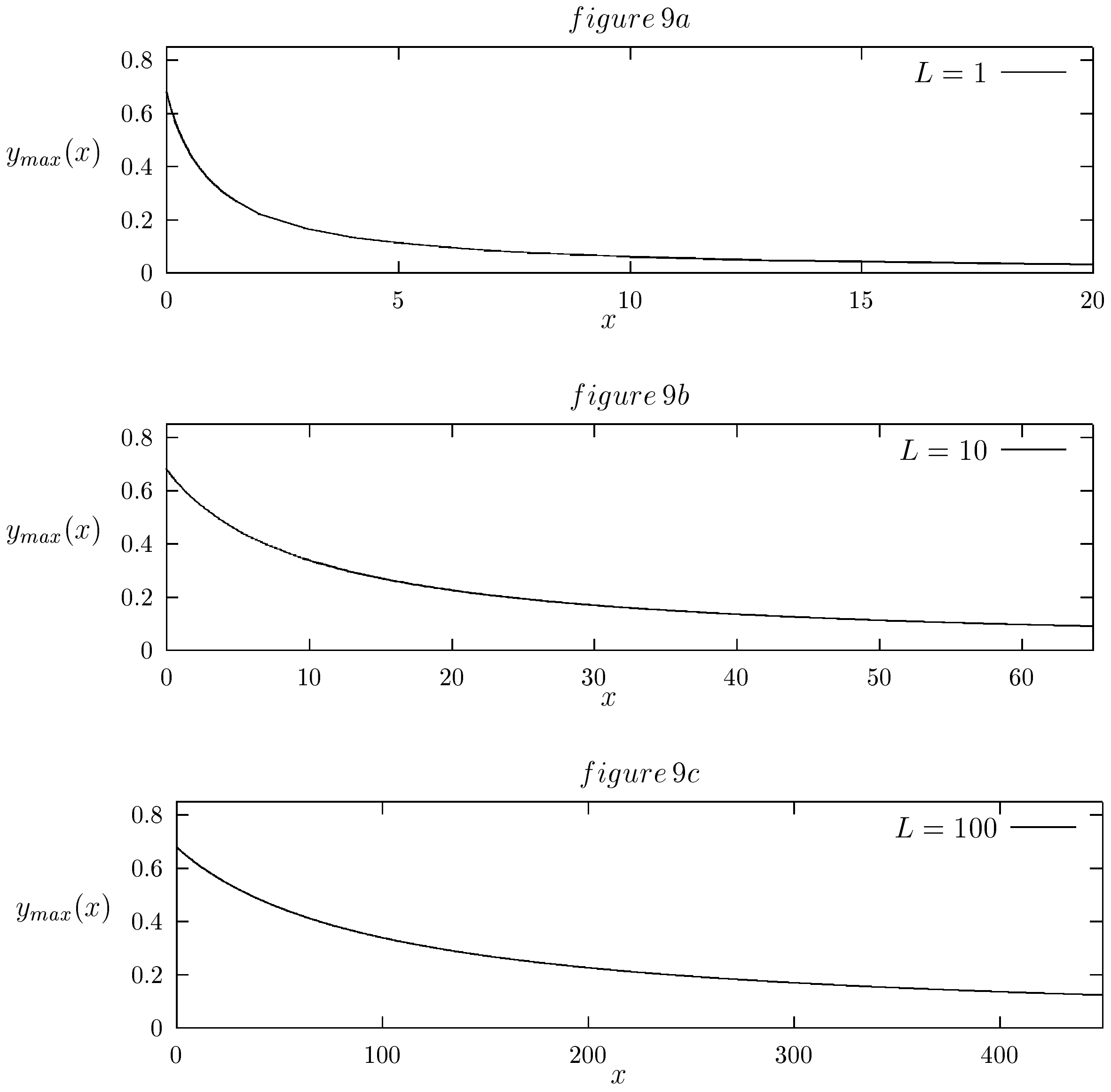


- Evolution de la hauteur maximum en fonction de x : $y_{max}(x)$

Enfin, nous avons tracé l'évolution de $y_{max}(x)$ pour les différentes valeurs de L.

La hauteur maximum atteinte par le fluide est bien évidement une fonction décroissante de x. Plus on s'éloigne du barrage plus elle est petite. De même, comme le montre les figures $9a$ à $9c$, plus L est grand, plus cette diminution sera lente.

Figure 1.9: Evolution de la hauteur maximum en fonction de x



Cependant, pour des abscisses importantes ($x > L$), il apparaît que cette diminution peut être estimée par une loi de puissance, valable pour les différentes valeurs de L. C'est ce que montre la figure 9d, sur laquelle nous avons représenté les trois courbes en log-log.

Donc la hauteur maximum atteinte au point de coordonnées x peut s'exprimer de la manière suivante :

$$y_{max}(x) \approx 10^b \, x^a$$

Nous avons calculé la pente de ces droites afin d'en tirer la loi de comportement. Nous avons obtenu les résultats suivants :

Longueur du réservoir L	Valeurs de 10^b	coefficient a
$L = 1$	0.542	-0.92
$L = 10$	3.350	-0.87
$L = 100$	31.092	-0.90

En écrivant $10^b = c_1 \, L^\alpha$ on obtient : $c_1 \approx 0.542$, et

L	Valeur de α
10	$\alpha \approx 0.81$
100	$\alpha \approx 0.88$

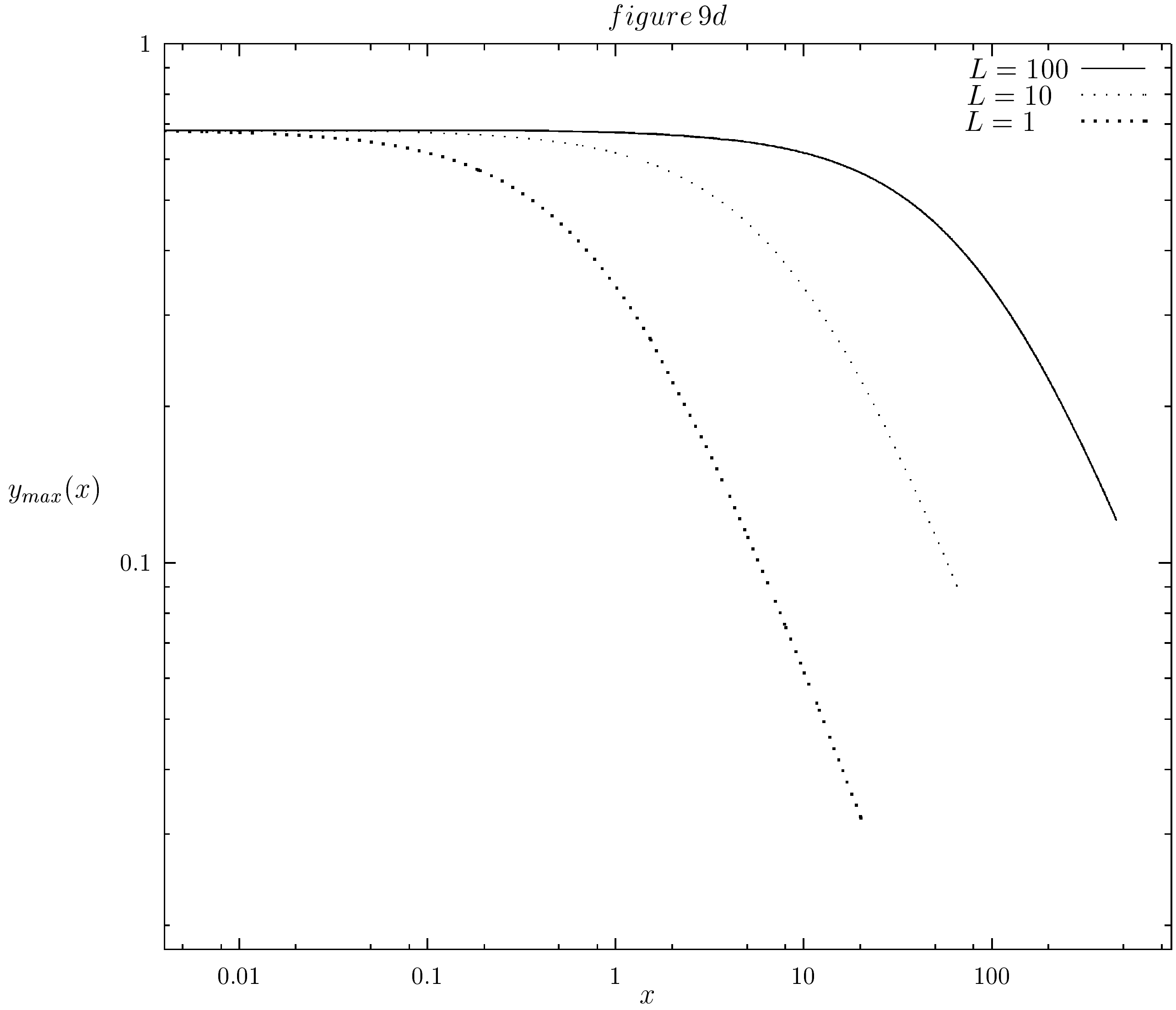
Après vérification numérique pour différentes valeurs de L, il apparaît que la valeur de α la plus précise est $\alpha \approx 0.88$.

Nous obtenons donc la loi de comportement suivante :

Hauteur maximum de fluide en fonction de x

$$\mathbf{y_{max}(x) \approx 0.542 \; L^{0.88} \; x^{-0.9} \quad pour\ x > 2\,L} \tag{1.20}$$

Figure 1.10: Représentation en log-log des hauteurs maximum $Y_{max(x)}$



1.3.3 Comparaison des résultats avec les mesures expérimentales

Une série de mesures expérimentales ont été effectuées au laboratoire de rhéologie sur ce problème. Il nous est donc possible en prenant les mêmes valeurs pour les différents paramètres de comparer nos résultats numériques à ces mesures.

- Profil de la surface libre

Nous disposons de mesures donnant le profil de la surface libre à différents instants. Celles-ci ont été réalisées avec les valeurs suivantes :

$$\rho = 1400\ kg.m^{-3} \quad , \quad g = 9.81\ m.s^{-2} \quad , \quad \mu = 50\ Pa.s \quad , \quad L = 0.45\ m \quad , \quad y_o = 0.05\ m$$

Les résultats fournis ont été adimensionnalisés. Nous avons pris comme pas de temps et comme pas d'espace les valeurs déterminées précédemment.

Sur le figure 11a nous avons représenté sur une même courbe les résultats du calcul et les mesures à $t = 52$

En dehors de la région du front, les hauteurs obtenues par le calcul correspondent aux mesures disponibles. L'abscisse du front obtenue par le calcul numérique est elle supérieure de 10% à celle mesurée à trois reprises sur la même expérience (figure 11b).

Comme on peut le constater sur la figure 11c, les mesures concernant le premier régime ne sont pas assez précise pour établir une comparaison, mais pour second régime d'écoulement il y a concordance.

Figure 1.11: Comparaison des profils de la surface libre obtenus par le calculs et par les mesures

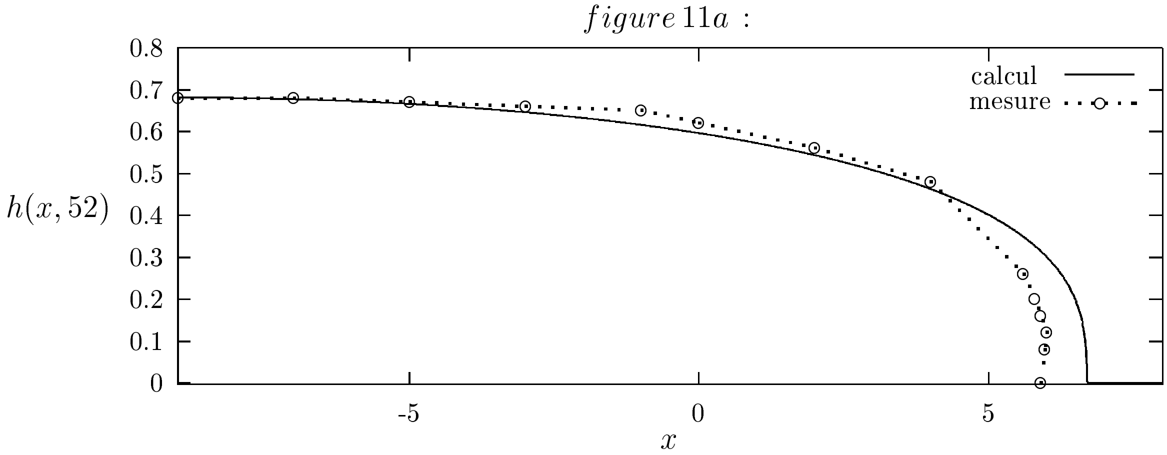
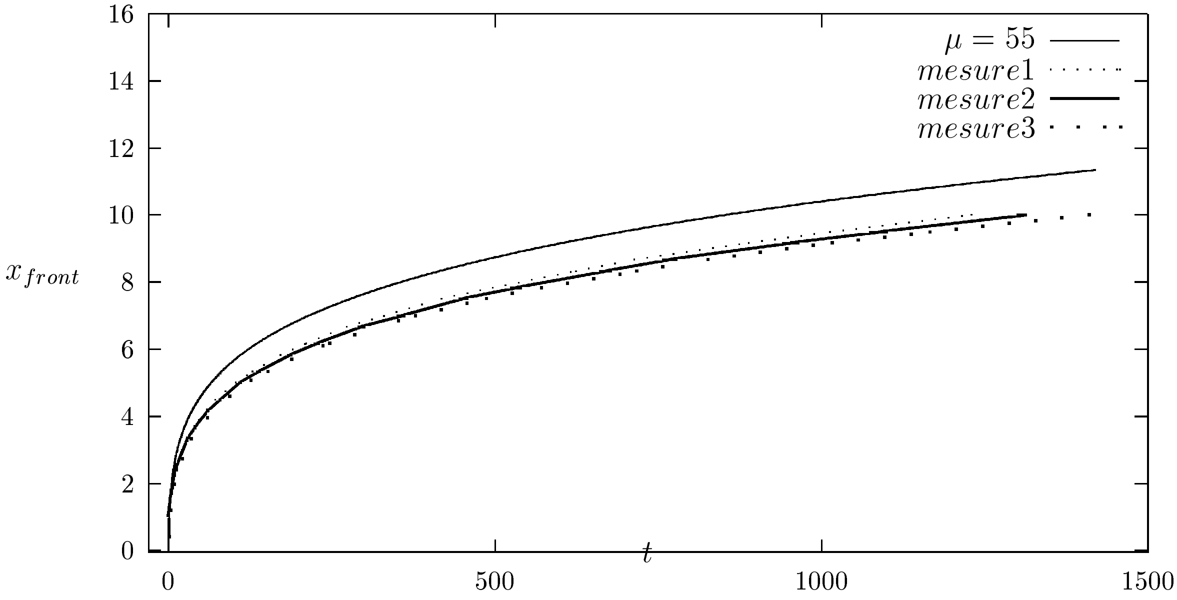
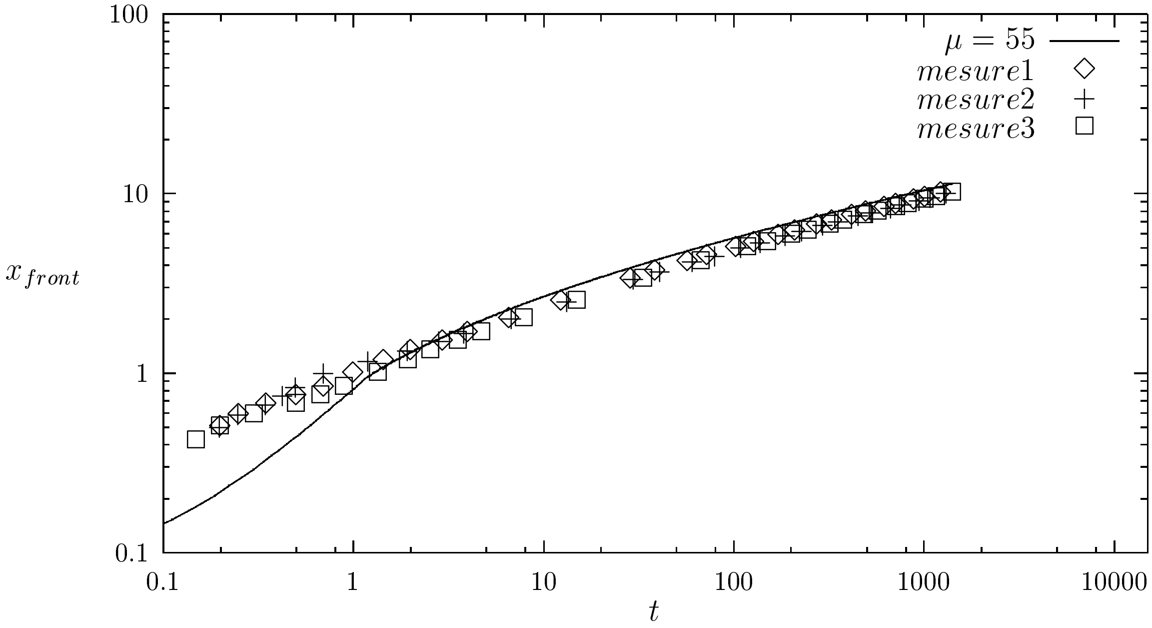


Figure 1.12: Comparaison des évolutions de l'abscisse du front obtenues par le calcul et par la mesure





1.4 Résolution semi-analytique

1.4.1 Résolution analytique

Il a été proposé une résolution des équations du problème de rupture de barrage conduisant à une solution analytique. Cependant il n'est pas possible d'introduire dans la solution obtenue la condition initiale et les conditions aux limites. C'est pourquoi nous avons procédé en deux étapes.

Nous avons commencé par trouver une solution analytique de l'équation (1.8), puis à l'aide des résultats numériques nous avons déterminé une solution semi-analytique en tenant compte des conditions aux limites. Nous avons ainsi obtenue une solution de notre problème.

- Calcul analytique

On procède de la manière suivante :

Nous partons de l'équation (1.8) :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y^4}{\partial x^2} = 0$$

On suppose qu'il existe une solution à variable séparée, celle-ci peut donc s'écrire sous la forme :

$$y\,(x\,,\,t) = T(t).H(x)$$

Donc l'équation se réécrit :

$$\frac{dT}{dt}\,H - T^4\frac{d^2H^4}{dx^2} = 0$$

On divise les deux membres par $T^4.H$

$$\frac{T'(t)}{T^4(t)} - \frac{1}{H}\,\frac{d^2H^4}{dx^2} = 0$$

Ce qui revient à trouver deux fonctions $f(t)$ et $g(x)$ telles que $f(t) - g(x) = 0 \;\forall\; t \;\; et \;\; x$ c'est à dire $f(t) = C \;\; et \;\; g(x) = C$ avec C une constante.

- Première équation

En utilisant $f(t) = C$, puis en intégrant par rapport à t on obtient :

$$T(t) = -\frac{1}{[3\,C\,(t-t_o)]^{\frac{1}{3}}} \tag{1.21}$$

- Seconde équation

On a: $\frac{1}{H}\frac{d^2H^4}{dx^2} = C$

On pose: $H^4 = Z$ Cela nous donne : $\frac{d^2Z}{dx^2} = C\,Z^{\frac{1}{4}}$

Cette équation différentielle ordinaire est autonome, c'est à dire que la variable n'apparaît pas. On pose $F(Z) = Z'(x)$

donc $Z''(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dx} = F'(Z)\,.\,F(Z)$

L'équation devient : $\frac{dF}{dZ}\,.\,F(Z) = C\,Z^{\frac{1}{4}}$

donc $F\,dF = C\,Z^{\frac{1}{4}}\,dZ$ donc $\frac{F^2}{2} = C\,\frac{4}{5}\,Z^{\frac{5}{4}}$

donc $F(Z) = \left[\frac{8\,C}{5}\,Z^{\frac{5}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$ donc $\frac{dZ}{dx} = \left(\frac{8\,C}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\,Z^{\frac{5}{8}}$

donc $\frac{dZ}{Z^{\frac{5}{8}}} = \left(\frac{8\,C}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$

Soit en intégrant par rapport à x : $\frac{8}{3}\,Z^{\frac{3}{8}} = \left(\frac{8\,C}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\,x + C_1$

donc $H(x) = \left[3\,\left(\frac{C}{40}\right)^{\frac{1}{2}}\,x + \frac{3}{8}C_1\right]^{\frac{2}{3}}$

On pose $C_2 = \frac{1}{8}\,\left(\frac{C}{40}\right)^{\frac{1}{2}}\,C_1$

Finalement, après calcul on arrive à:

$$H(x) = \left[\frac{9C}{40}\,(x + C_2)\right]^{\frac{2}{3}} \tag{1.22}$$

En remplacant $T(t)$ et $H(x)$ par les expressions obtenues, il vient :

$$y\,(x\,,\,t) = \left[\frac{3}{40}\,\frac{(x + C_2)^2}{(t - t_o)}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{1.23}$$

On vérifie aisément que cette expression est solution de l'équation (1.8). Il reste à introduire les conditions aux limites et la condition initiale. On remarque que cette solution n'est vérifiée que pour $t > \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. Ainsi elle peut être solution de notre problème sur $]\,\epsilon\,,\,T_f\,[\,\times\,]\,-L\,,\,L_f\,[$. On ne peut donc pas y appliquer la condition initiale à $t = 0$.

De plus, il n'est pas possible d'appliquer les conditions aux limites pour définir les paramètres t_o et C_2.

C'est pourquoi nous avons essayé d'établir une solution semi-analytique à l'aide des résultats numériques obtenus.

1.4.2 Résolution numérique

- Calcul des vitesses

A partir de l'équation (1.1) et de l'expression de j on peut obtenir u.
Pour adimensionnaliser, on prend :

$$U_+ \;=\; \frac{u}{u_o} \;=\; \frac{12\,\mu}{\rho g y^2}\,u$$

Or on a :

$$y\;u = -\;\frac{\rho g y^3}{3\mu}\;\frac{\partial y}{\partial x}$$

donc :

$$U_+ \;=\; \frac{4}{y_o^2}\,y_o\,Y_+^2\,\frac{\partial Y_+}{\partial X_+}$$

Soit finalement :

$$U_+ \;=\; 4\,Y_+^2\,\frac{\partial Y_+}{\partial X_+} \tag{1.24}$$

Pour ne pas alourdir l'écriture, on pose : $u = U_+$ et $y = Y_+$.

Ainsi, on obtient u sur chaque intervalle $]\,x_i\,,\,x_{i+1}\,[$.

Pour calculer u à partir des résultats numériques, on procède de la manière suivante :

On commence par prendre la moyenne géométrique de y sur $]\,x_i\,,\,x_{i+1}\,[$, c'est à dire

$$y \;=\; \frac{2}{\frac{1}{y_{i+1}} + \frac{1}{y_i}} \;=\; \frac{y_i\,y_{i+1}}{y_i\,+\,y_{i+1}}$$

De plus, sur cet intervalle on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} \;=\; \frac{y_{i+1}\,-\,y_i}{h}$$

d'où l'expression de u :

$$u_{|]\,x_i\,,\,x_{i+1}\,[} \;=\; 16\,\left(\frac{y_i\,y_{i+1}}{y_i\,+\,y_{i+1}}\right)^2\,\left(\frac{y_{i+1}\,-\,y_i}{h}\right) \tag{1.25}$$

Nous avons calculé ces u pour différents t. Pour des t assez grands $(t > T_L)$, nous obtenons des droites. Celles-ci coupent l'axe des abscisses en $x = -L$. Nous effectuons donc un changement de repère en posant $X = x + L$, y est inchangé.
Dans le nouveau repère, pour t fixé $u(X)$ peut s'écrire :

$$4\,y^2\,\frac{\partial y}{\partial X} \;=\; a\,X$$

donc

$$\frac{8}{3}\,y^3(X) \;=\; a\,X^2 + c$$

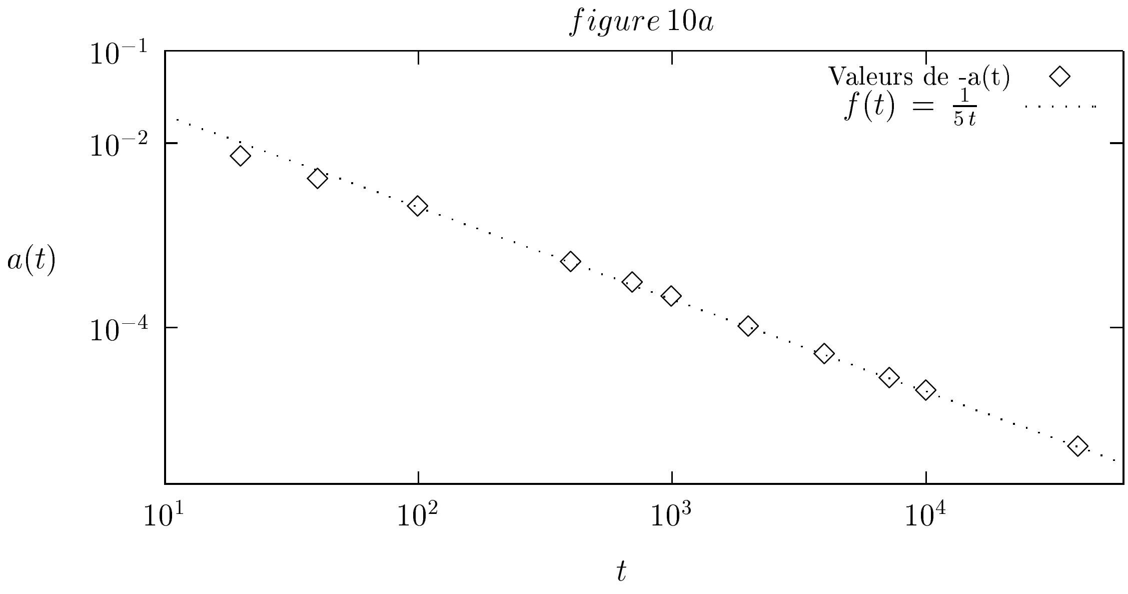
soit

$$y(X) \;=\; \left(\frac{3}{8}\,a\,X^2 \,+\, c\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ceci étant vrai à t fixé, on en déduit l'expression suivante de y :

$$y(X,t) \;=\; \left(\frac{3}{8}\,a(t)\,X^2 + c(t)\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.26}$$

En effectuant les calculs pour différentes valeurs de t, il a été possible de déterminer $a(t)$. En effet, a représente la pente de la droite. En faisant varier t on a donc obtenu a en fonction de t (cf figure 10a). On obtient $a(t) = -\frac{1}{5\,t}$.



Nous avons donc :

$$y\,(\,X\;,\;t\,)\;=\;\left(-\frac{3}{40}\,\frac{X^2}{t}+c(t)\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.27}$$

Or, on a par définition du front : $\quad \forall\;t>0\quad,\quad y\,(\,X_F\;,\;t\,)\;=\;0$

$$Donc\quad\forall\;t>T\;\;,\;\;c(t)\;=\;\frac{3}{40}\,\frac{X_F^2}{t}$$

Soit dans le repère initial :

$$y\,(\,x\;,\;t\,)\;=\;\left[\frac{3}{40}\,\left(\frac{(x_F-L)^2\;-\;(x-L)^2}{t}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

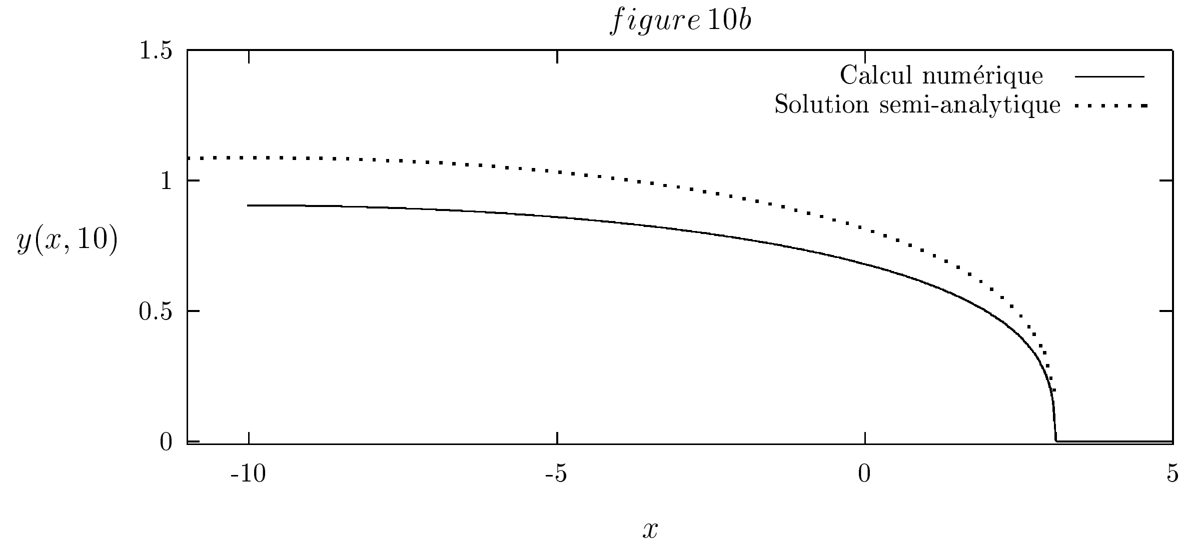
Finalement, nous obtenons l'expression semi-analytique suivante :

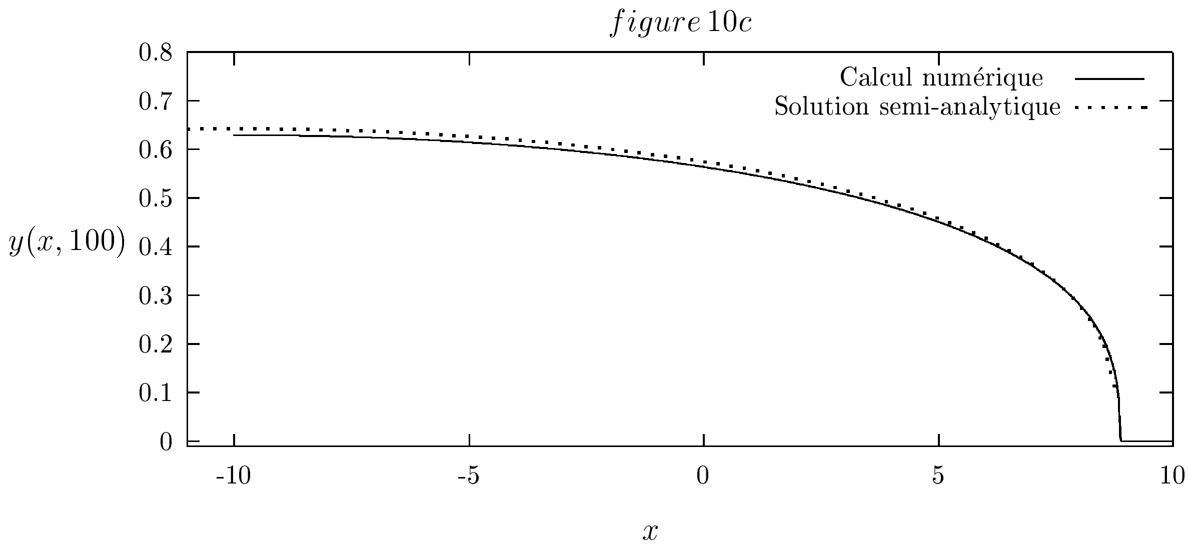
$$\forall\;\mathbf{t>T}\quad,\quad\mathbf{y\,(\,x\;,\;t\,)}\;=\;\begin{cases}\left[\frac{3}{40}\,\left(\frac{(x_F-L)^2\,-\,(x-L)^2}{t}\right)\right]^{\frac{1}{3}} & \textbf{Si}\;x<x_F\\ 0 & \textbf{Si}\;x>x_F\end{cases} \tag{1.28}$$

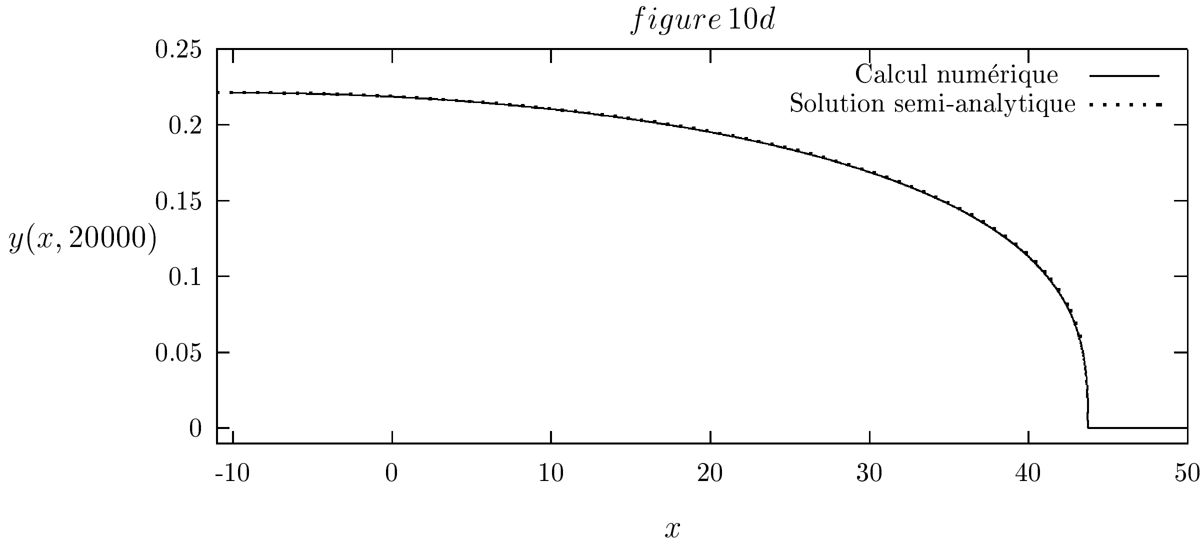
Nous avons représenté sur une même figure le profil de la surface libre obtenu par le calcul numérique et la solution semi-analytique ci-dessus pour $L\;=\;10$, et ce afin de les comparer.

On peut constater sur les figure $10b$, $10c$ et $10d$, que pour $t>100$ les courbes sont assez proches, elles sont même confondues pour $t=20000$.
Ainsi, lorsque t est assez grand, il est possible de connaitre la forme précise de la surface libre à tout instant.

En effet, les lois de propagation établies au paragraphe 1.3.2 $A/$ nous permettent de connaître la position du front x_F à tout instant. Et connaissant x_F nous pouvons calculer $y\,(x\,,\,t)$ grâce à l'expression (1.28). Il est donc possible avec ces deux relations de calculer simplement les solutions du problème de départ.


$figure\,10b$
Calcul numérique
Solution semi-analytique
1.5
1
0.5
0
$y(x,10)$
-10
-5
0
5
x


$figure\,10c$
Calcul numérique
Solution semi-analytique
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
$y(x,100)$
-10
-5
0
5
10
x


$figure\,10d$
Calcul numérique
Solution semi-analytique
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
$y(x,20000)$
-10
0
10
20
30
40
50
x

1.4.3 Conclusion

L'objectif de cette première partie était la validation du modèle théorique proposé.

Or les comparaisons avec les résultats expérimentaux disponibles ont montré une concordance des calculs avec les mesures, les différences enregistrées étant inférieure à 10%.

Le modèle permet donc une prévision fiable du phénomène étudié.

De plus, le travail effectué nous a permis d'établir trois grands résultats :

- **Une loi de comportement simple donnant l'abscisse du front en fonction du temps.**

$$\mathbf{x_F(t)} \approx \begin{cases} t^{0.5} & \textbf{pour } x_F(t) \ll L \\ 1.8\ L^{0.58}\ t^{0.2} & \textbf{pour } x_F(t) \gg L \end{cases} \tag{1.29}$$

- **Une loi de comportement simple donnant la hauteur maximum de fluide à une abscisse donnée en aval du barrage.**

$$\mathbf{y_{max}(x) \ \approx \ 0.542\ L^{0.88}\ x^{-0.9} \quad pour\ x > 2\,L} \tag{1.30}$$

- **Une solution semi-analytique qui permet à l'aide de la première loi de trouver à tout instant les solutions du problème initial.**

$$\forall\ \mathbf{t > T}\ ,\quad \mathbf{y\,(\,x\,,\,t\,)}\ =\ \begin{cases} \left[\frac{3}{40}\left(\frac{(x_F-L)^2-(x-L)^2}{t}\right)\right]^{\frac{1}{3}} & \textbf{Si } x < x_F \\ 0 & \textbf{Si } x > x_F \end{cases} \tag{1.31}$$

Le modèle étudié est destiné à simuler la rupture de barrage dans le cas de fluides à viscosité élevée. Il est donc particulièrement intéressant de pouvoir l'utiliser sur le terrain, c'est à dire avec un minimum de moyens techniques.

Or, les lois obtenues sont simples, il est donc possible de les mettre en oeuvre à l'aide d'une simple calculatrice. Nous allons les appliquer ici dans le cadre d'un exemple concret, pour permettre une utilisation immédiate de celles-ci.

- **Mode d'emploi.**

On reprend les données utilisées au paragraphe 1.3.3 , à savoir :

$\rho = 1400\ kg.m^{-3}$, $g = 9.81\ m.s^{-2}$, $\mu = 50\ Pa.s$, $L_r = 0.45\ m$, $y_o = 0.05\ m$

Il est nécessaire de commencer par revenir à des variables dimensionnées. Pour cela, il suffit d'utiliser les relations suivantes :

$Y_+ = \frac{y}{y_o}$, $X_+ = \frac{x}{y_o}$, $T_+ = \frac{t}{t_o}$ avec $t_o = \frac{12\,\mu}{\rho\, g\, y_o}$ *et* $L = \frac{L_r}{y_o}$ avec L_r longueur du réservoir.

Ainsi, pour un barrage ayant les caractéristiques ci-dessus, si l'on désire connaître l'abscisse atteinte par le front à $t = 10s$ il suffit de faire les calculs suivants :

$t_{adim} = \frac{10\times1400\times9.81\times0.05}{12\times50} = 11.44$ et $L = \frac{0.45}{0.05} = 9$

Puis de calculer avec la première loi cette abscisse. Ici t est petit, donc $x_F(t) \ll L$, donc on a $x_F(t) = 11.44^{0.5} = 3.38$. C'est la valeur adimensionnelle, il reste à la transformer en valeur dimensonnée.

Finalement on obtient : $x_F(10) = 3.38 \times 0.05 = 0.17m$

De la même manière avec un t assez grand, $t = 36000s$ on a :

$t_{adim} = \frac{36000\times1400\times9.81\times0.05}{12\times50} = 41202$

Cette fois $x_F(t) \gg L$ donc $x_F(t) = 1.8 \times 9^{0.58} \times 41202^{0.2} = 53.91$

Soit finalement : $x_F(36000) = 53.91 \times 0.05 = 2.69m$

Si nous voulons connaître la hauteur maximum de fluide à une distance x en aval du barrage, il suffit d'utiliser la seconde loi.

Cette loi s'applique lorsque $x_{adim} > 2\,L$. Ici $L = 9$ donc nous pouvons utiliser cette formule pour $x_{adim} > 18$ soit $x > 0.9m$.
Par exemple pour $x = 1m$, on commence par adimensionnaliser : $x_{adim} = 20$ puis on utilise (1.30). donc :

$y_{max}(t) = 0.542 \times 9^{0.88} \times 20^{-0.9} = 0.25$

Soit en valeur dimensionnées :

$y_{max}(20) = 0.0126m$.

Chapitre 2

La pente du canal est non nulle

2.1 Système d'équations et conditions aux limites

2.1.1 Présentation du problème physique et notations

Nous considérons désormais le cas d'un canal dont la pente fait un angle θ avec l'horizontale. On note encore L la longueur du réservoir et après adimensionnalisation la hauteur d'eau initiale au niveau du barrage vaut 1. On appelle L_t la longueur sur laquelle est étudiée l'écoulement en aval du barrage (cf figure 1).

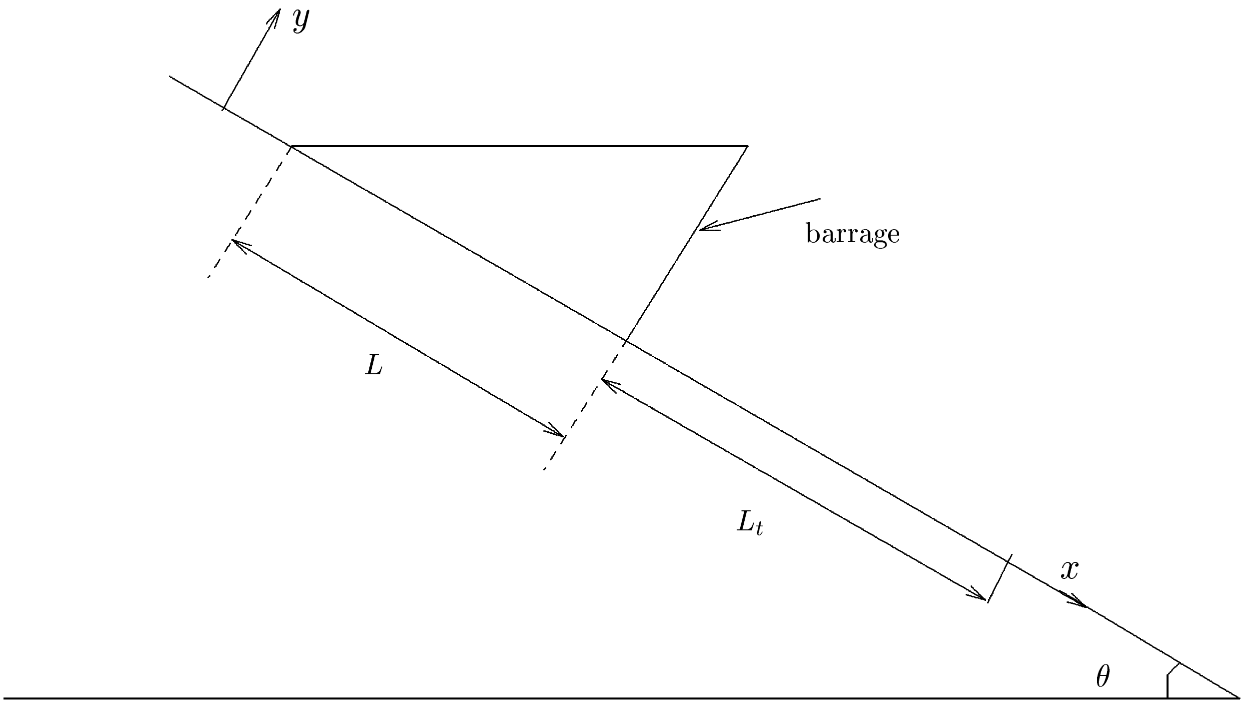


Figure 2.1: Représentation du barrage

2.1.2 Équations

Les termes provenant des forces d'inertie sont à nouveau négligés. En tenant compte de la pente nous obtenons donc après avoir adimensionnalisé :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cos\theta - \sin\theta\right)\right) = 0$$

soit finalement

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\left[y^3\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \tan\theta\right)\right] = 0 \tag{2.1}$$

2.1.3 Condition initiale et conditions aux limites

- Comme cela est représenté sur la figure 1, la condition à l'instant initial est la suivante :

$$y\,(x\,,\,t=0) = \begin{cases} 1 + x\,tan\theta & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

- Les conditions aux limites sur les bords vont être les suivantes :

  – En aval du barrage : Comme au chapitre 1, on choisit L_t telle que $L_t - L \gg 1$ d'où la condition de Dirichlet :

$$y\,(L_t\,,\,t) = 0 \tag{2.3}$$

  – En amont : Cette fois nous allons avoir une condition de Dirichlet. En effet, la pente de la surface libre reste nulle par rapport à l'horizontale. Elle fait donc un angle θ avec le canal. Cela implique qu'au fond du réservoir la hauteur de fluide est nulle.(L est donc imposée par l'angle θ)

$$y\,(-L\,,\,t) = 0 \tag{2.4}$$

2.2 Discrétisation du problème

2.2.1 Schéma numérique instable

- Notations

On veut résoudre l'équation (2.1) :

$$\frac{1}{cos\,\theta}\,\frac{\partial y}{\partial t} \;-\; 4\,\frac{\partial}{\partial x}\left[y^3\,\left(\frac{\partial y}{\partial x} \;-\; tan\,\theta\right)\right] \;=\; 0 \tag{2.5}$$

Donc nous posons : $q \;=\; y^3\left(\frac{\partial y}{\partial x} \;-\; tan\,\theta\right)$ et $c \;=\; y^3$

En utilisant la même discrétisation qu'au chapitre 1, on obtient :

$$q^{n+1} \;=\; c^n\,\left(\frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} \;-\; tan\,\theta\right) \tag{2.6}$$

Avec ces notations, l'équation (2.5) devient pour chaque i

$$\frac{1}{cos\,\theta}\,\frac{y_i^{n+1} \;-\; y_i^n}{\triangle t} \;-\; 4\,\frac{q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \;-\; q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} \;=\; 0 \qquad \forall\, i \in \{0, N\} \tag{2.7}$$

Soit finalement pour la i^{eme} ligne

$$\begin{aligned}\frac{1}{cos\,\theta}\,y_i^{n+1} \;-\; 4\,\frac{\triangle t}{(h)^2}\,\Big[\,c_{i-\frac{1}{2}}^n\,y_{i-1}^{n+1} \;-\; \left(c_{i-\frac{1}{2}}^n + c_{i+\frac{1}{2}}^n\right)\,y_i^{n+1} \;+\; c_{i+\frac{1}{2}}^n\,y_{i+1}^{n+1}\,\Big] \;=&\\ \frac{1}{cos\,\theta}\,y_i^n \;-\; 4\,\frac{\triangle t}{h}\left(c_{i+\frac{1}{2}}^n - c_{i-\frac{1}{2}}^n\right)\,tan\,\theta&\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous avons à nouveau un système de N+1 équations couplées, équivalent au système matriciel suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix}}_{A^{n+1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_N^n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

La principale différence avec les cas du canal horizontal se situe au niveau du second membre S^n. Celui-ci s'écrit :

$$\underbrace{\frac{1}{cos\,\theta} \begin{pmatrix} y_0^n \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^n \end{pmatrix} - 4\,\frac{\triangle t}{h}\,tan\,\theta \begin{pmatrix} c^n_{\frac{3}{2}} - c^n_{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c^n_{i+\frac{1}{2}} - c^n_{i-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c^n_{N-\frac{1}{2}} - c^n_{N-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}}_{S^n} \tag{2.10}$$

En posant à nouveau $\alpha = 4\,\lambda$ avec $\lambda = \frac{\triangle t}{(h)^2}$ on obtient comme expression de la matrice A^{n+1}

- $a_{i,i-1} = -\alpha c^n_{i-\frac{1}{2}}$
- $a_{i,i} = \frac{1}{cos\,\theta} + \alpha \left(c^n_{i-\frac{1}{2}} + c^n_{i+\frac{1}{2}} \right)$
- $a_{i,i+1} = -\alpha c^n_{i+\frac{1}{2}}$
- $a_{i,j} = 0 \quad \forall \quad j < i-1 \quad ou \quad j > i+1$

- Prise en compte des conditions aux limites

  – Aval

  La condition aval est inchangée. Comme au chapitre 1, elle s'exprime facilement dans (2.9) en remplaçant y_N^n et $a_{N,N-1}$ par 0, et $a_{N,N}$ par 1.

  – Amont

  Cette fois, nous avons en amont une condition de Dirichlet. Comme ci-dessus, il suffit de remplaçer y_0^n et $a_{0,1}$ par 0 et $a_{0,0}$ par 1 dans (2.9). Cela nous donne le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_m^{n+1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_1^n \\ \vdots \\ S_i^n \\ \vdots \\ S_{N-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Pour la résolution du système matriciel nous utilisons la même méthode qu'au chapitre 1, en particulier nous traitons le terme non linéaire de la même façon.

2.2.2 Mise en oeuvre informatique

Là encore nous utilisons ce qui a été fait au chapitre 1, à l'exception du traitement de la condition au bord en amont.

Contrairement au cas du canal horizontal où ce schéma semi-implicite était inconditionnellement stable, nous voyons apparaître dans le cas de la pente des instabilités lorsque l'écoulement est étudié sur de longues périodes.

En effet, pour pouvoir définir les comportements asymptotiques, il est nécessaire d'utiliser des pas de temps grands ($dt = 1, 2, 5$ voir $dt = 10$ pour aller jusqu'à $t = 10^8$).
Or dés que $dt > 0.5$ nous constatons deux problèmes contradictoires.

Comme nous avons traité le terme en tan θ de manière explicite, nous avons l'apparition de la condition classique de stabilité pour les schémas explicites (CFL) : $\frac{\triangle t}{h} < c$ qui pour un pas de temps donné nous oblige à prendre $h > c_1$.

D'autre part, on constate qu'au delà d'une certaine durée d'écoulement la solution à un comportement oscillatoire dans la région du front si $h < c_2$.

Nous avons donc deux conditions contradictoires qui font intervenir le pas de temps, le pas d'espace, et la hauteur de fluide à l'instant considéré, en sachant que plus la pente est importante plus cette valeur critique est atteinte rapidement.

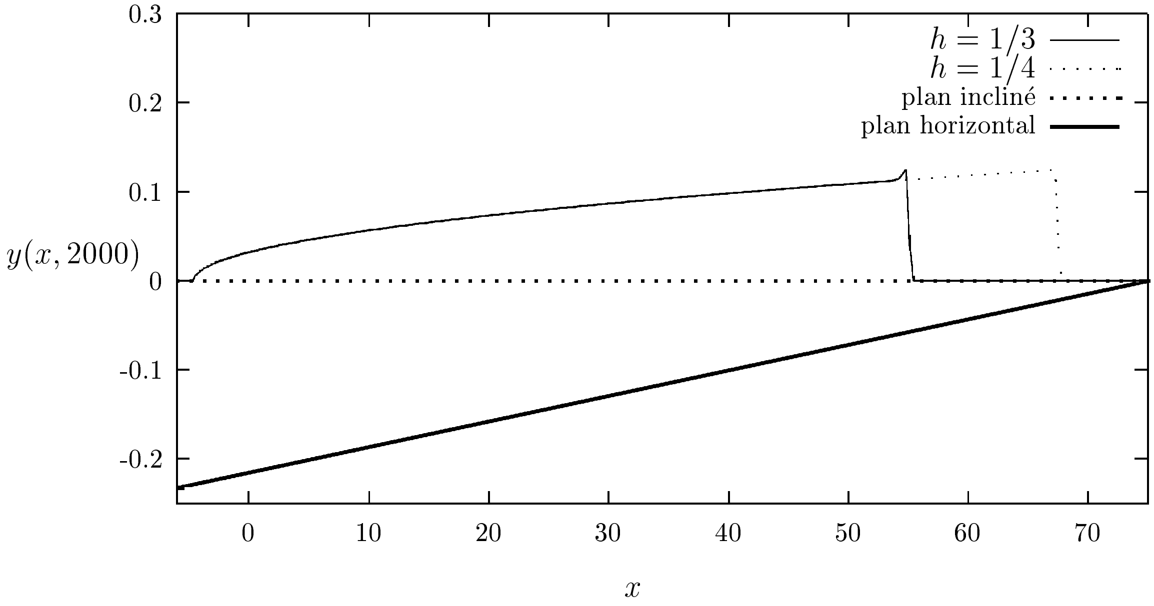
Par exemple, lorsque $tan\,\theta = 0.2$ et donc $L = 5$ nous avons obtenu avec ce schéma les résultats suivants :

En prenant $dt = 1$, On a à $t = 2000$ la solution qui oscille pour $h \leq 1/3$, qui est stable pour $h = 1/4$ et le schéma diverge pour $h \geq 1/5$. Donc le pas d'espace optimal (et le seul possible) est $h = 1/4$ (voir figure 2a).

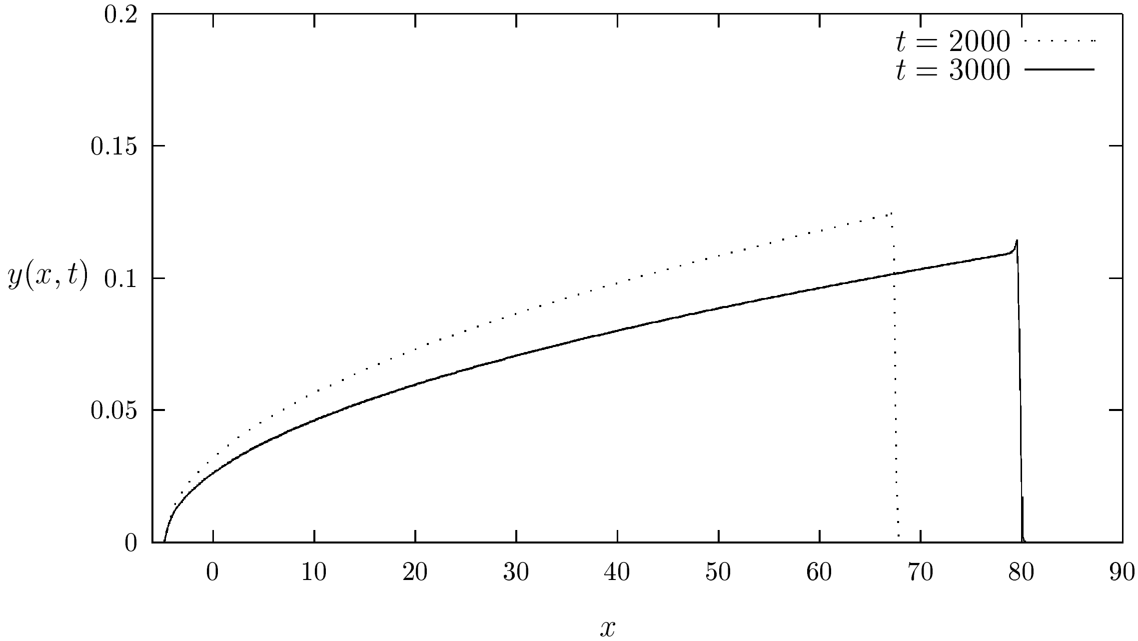
Cependant à $t = 3000$ la solution se met à osciller pour $h = 1/4$ (figure 2b). Donc il n'est pas possible avec ce schéma d'effectuer le calcul pour des temps très grands (nous n'obtenons pas de solutions stable au-delà de $t = 20000$).

Figure 2.2: Représentation des instabilités

$figure\,2a\ :\ t = 2000$



$figure\,2b\ :\ t = 2000\ \ et\ \ t = 3000$



2.2.3 Schéma numérique décentré

On reprend l'équation (2.5) :

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial t} - 4\,\frac{\partial}{\partial x}\left[y^3\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \tan\theta\right)\right] = 0$$

que l'on réécrit :

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial t} - 4\,\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 4\,\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3 \tan\theta\right) = 0$$

Dans cette équation, le deuxième terme est le terme de diffusion des équations de Navier-Stokes : $\triangle u$, tandis que le troisième est de type convectif : $(u.\nabla)\,u$.

Au paragraphe précédent, le traitement explicite du troisième terme avait provoqué l'apparition de la CFL qui nous imposait de prendre h assez grand. Pour éviter cela nous allons cette fois exprimer ce terme de manière implicite.

Nous avons donc :

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{y^{n+1}}{\triangle t} - 4\,(y^n)^3\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y^{n+1}}{\partial x}\right) + 12\tan\theta\,(y^n)^2\,\frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{y^n}{\triangle t}$$

On constate avec cette écriture que lorsque y devient très petit le terme de convection domine le terme de diffusion, ce qui entraîne un comportement oscillatoire de la solution au niveau du front (voir p120 et p141-144 de l'ouvrage de cuvelier[3]).

Pour y remédier, nous allons utiliser pour discrétiser le terme de convection des différences rétrogrades optimales. C'est à dire qu'on affecte un coefficient de décentrage ω_i dont la valeur varie de 0 pour le cas décentré au maximum à $\frac{1}{2}$ pour le cas centré.

Cela s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = \omega_i\left(\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h}\right) + (1-\omega_i)\left(\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h}\right)$$

Avec cette discrétisation on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\theta}\,y_i^{n+1} - \;& 4\,\tfrac{\triangle t}{(h)^2}\left[c_{i-\frac{1}{2}}^n\,y_{i-1}^{n+1} - \left(c_{i-\frac{1}{2}}^n + c_{i+\frac{1}{2}}^n\right)y_i^{n+1} + c_{i+\frac{1}{2}}^n\,y_{i+1}^{n+1}\right] \\ + 12\tan\theta(y_i^n)^2 \;& \tfrac{\triangle t}{h}\left[\omega_i y_{i+1}^{n+1} + (1-2\omega_i)y_i^{n+1} + (1-\omega_i)y_{i-1}^{n+1}\right] = \tfrac{1}{\cos\theta}\,y_i^n\end{aligned} \tag{2.12}$$

Seul le cas $\omega_i \leq \frac{1}{2}$ c'est à dire décentré rétrograde nous intéresse ici. Pour définir le ω_i optimal il suffit d'imposer à la matrice obtenue d'être à diagonale dominante sachant que $\omega_i \leq \frac{1}{2}$. Après calcul on obtient :

$$\omega_i \ \leq \ \frac{1}{6h\,tan\,\theta}\,\frac{(y_i^n)^3 \ + \ (y_{i+1}^n)^3}{(y_i^n)^2} \tag{2.13}$$

Le coefficient optimal de décentrage étant obtenu lorsque l'égalité est réalisée.

Finalement on obtient le système matriciel suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_m^{n+1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{cos\,\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^n \\ \vdots \\ y_i^n \\ \vdots \\ y_{N-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

En posant à nouveau $\alpha \, = \, 4\,\lambda$ avec $\lambda \, = \, \frac{\triangle t}{(h)^2}$ on obtient cette fois comme coefficients de la matrice A^{n+1}

- $a_{i,i-1} \ = \ -\alpha c^n_{i-\frac{1}{2}} \ - \ 12tan\,\theta(y_i^n)^2\,\frac{\triangle t}{h}\,(1-\omega_i)$
- $a_{i,i} \ = \ \frac{1}{cos\,\theta} + \alpha\left(c^n_{i-\frac{1}{2}} + c^n_{i+\frac{1}{2}}\right) \ + 12tan\,\theta(y_i^n)^2\,\frac{\triangle t}{h}\,(1-2\omega_i)$
- $a_{i,i+1} \ = \ -\alpha c^n_{i+\frac{1}{2}} \ + \ 12tan\,\theta(y_i^n)^2\,\frac{\triangle t}{h}\,\omega_i$
- $a_{i,j} \ = \ 0 \qquad \forall \quad j < i-1 \quad ou \quad j > i+1$

La matrice est toujours à diagonale dominante, inversible mais cette fois elle n'est plus symétrique. Nous allons donc utiliser une résolution de "Gauss" avec décomposition "LU". Le terme non-linéaire est traité de la même manière qu'au premier chapitre.

2.3 Résolution numérique

2.3.1 Détermination des paramètres de convergence

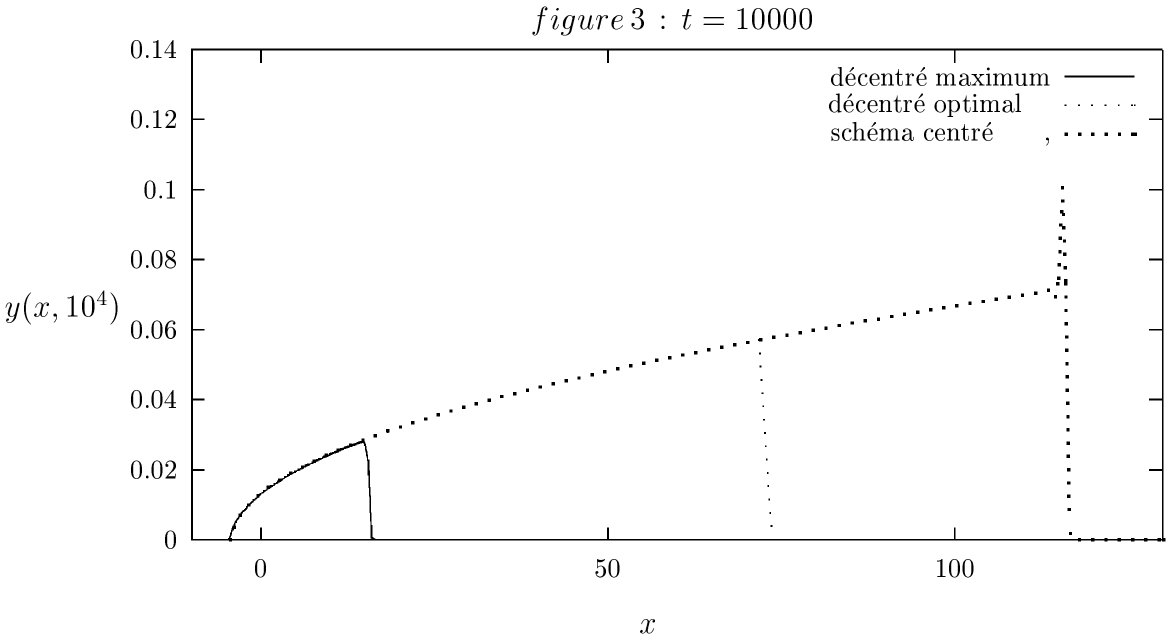
Comme au premier chapitre il convient de déterminer avec quelle précision les calculs sont effectués en fonction des paramètres h et $\triangle t$. Cependant, cette fois il faut au préalable évaluer dans quelle mesure le décentrage à été réalisé, car le schéma décentré est une approximation moins précise. En effet, le schéma centré a un erreur de consistance d'ordre h^2 tandis que le schéma totalement décentré a lui une erreur de consistance d'ordre h. Le schéma “décentré optimal” se situe donc entre ces deux valeurs.

- Vérification du décentrage optimal

Pour illustrer le caractère optimal du décentrage effectué, nous avons volontairement choisi des pas d'espace et de temps grands, afin que le décentrage soit très important. Nous avons pris $\triangle t = 1$ et $h = 1/2$. Puis nous avons fait le calcul toujours pour une pente de 0.2 jusqu'à $t = 10000$.

On constate sur la figure 3a que notre décentrage a été réalisé de manière optimale. En effet, le décentrage a totalement supprimé l'instabilité tout en restant le plus petit possible. Ainsi, la perte de précision provoquée par le décentrage optimal est beaucoup plus petite que celle provoquée par un décentrage maximum.

Figure 2.3: Comparaison des différents décentrages



- Pas en temps

Pour obtenir des comportements asymptotiques, il a été nécessaire de faire les calculs pour des temps grands (jusqu'à $t = 10^6$). Par conséquent nous avons utilisé plusieurs pas de temps. Pour des temps petit ($t < 1000$) on utilise $\triangle t = 10^{-3}$, puis pour des temps intermédiaires ($1000 < t < 10^5$) on prend $0.01 < \triangle t < 0.1$. Enfin pour les grands temps, on a $\triangle t = 0.5$ ou $\triangle t = 1$. Il suffit ensuite de recoller les solutions obtenues pour avoir par exemple l'évolution du front pour $0.1 < t < 10^6$.

- Pas en espace

Pour chacun de ces pas de temps, nous avons déterminé les pas d'espace correspondant. Nous obtenons globalement des résultats comparables à ceux de la première partie. Nous avons donc utilisé des valeurs identiques.

2.3.2 Exploitation des résultats

Cette fois encore, nous pouvons à partir des différents résultats numériques obtenus tirer des enseignements concernant l'influence de certains paramètres sur le comportement du modèle étudié et les limites de celui-ci.

Nous allons en particulier tenter d'établir des lois du même type que celles obtenues dans le cas horizontal.

Cependant, la condition utilisée en amont à savoir $y(-L\,,\,t) = 0$, nous impose la longueur du barrage. Par exemple si la pente vaut 0.2 alors $L = 5$. Il n'est donc pas possible de faire varier L comme dans la première partie.

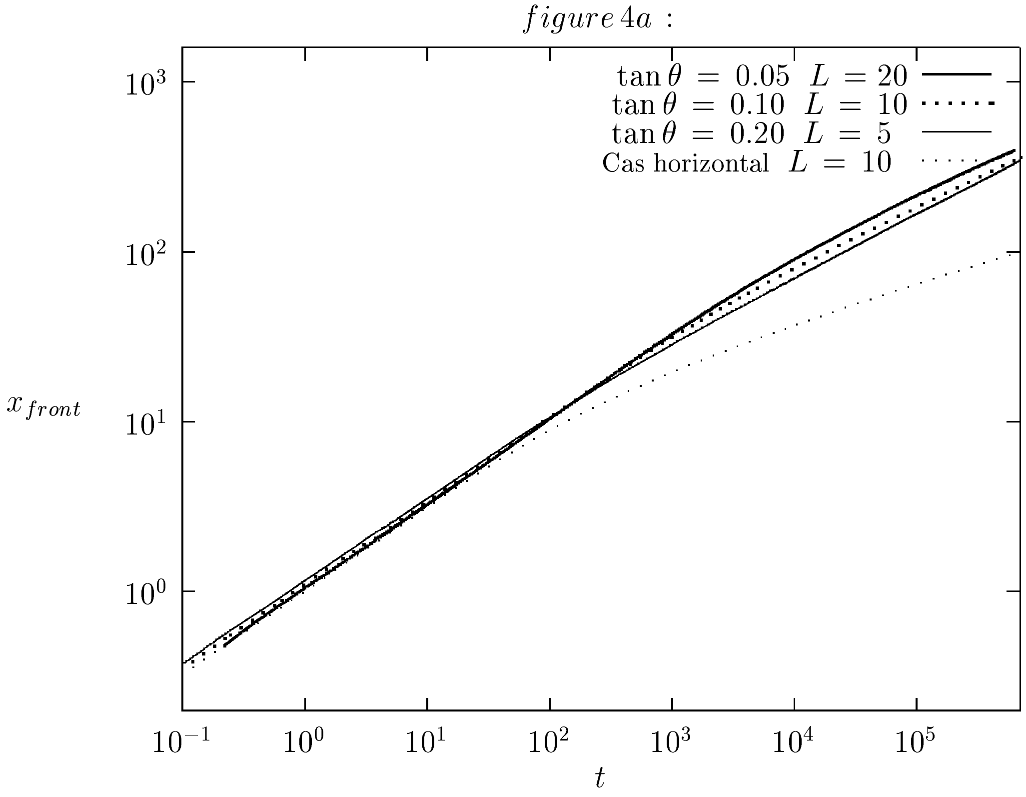
A/ Régimes d'écoulement

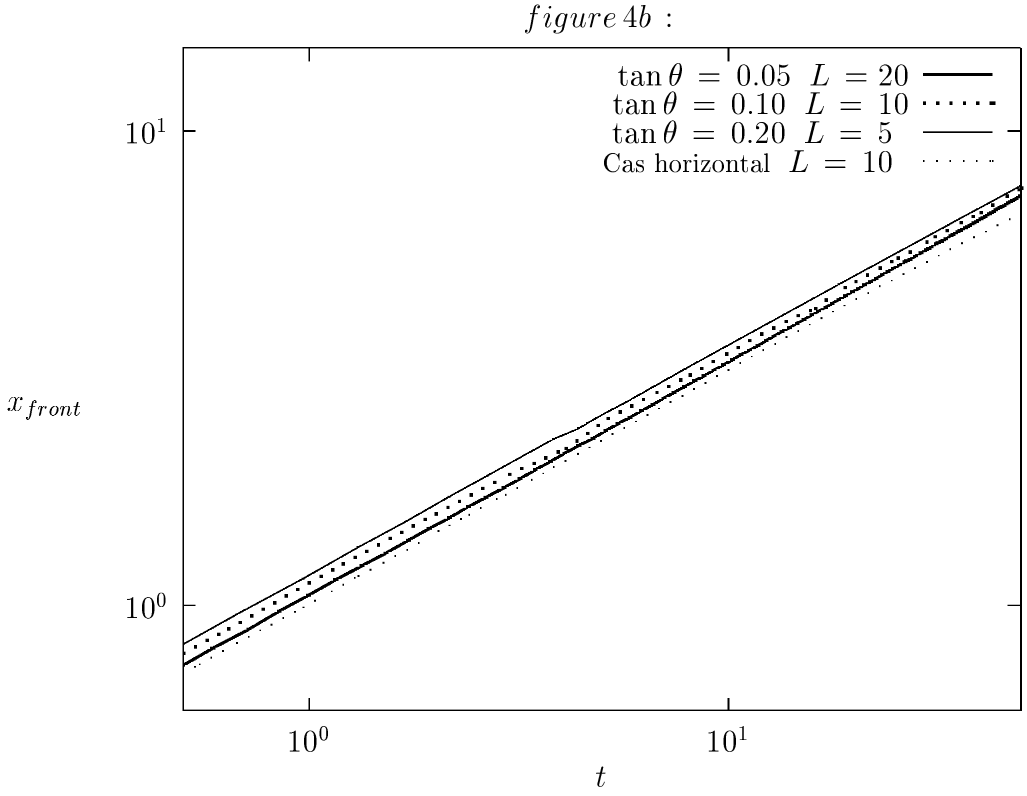
Lorsque l'on considère l'évolution du front en fonction du temps, nous constatons comme dans le cas horizontal l'existence de deux régimes distincts (voir figure 4a). Nous avons donc défini de la même manière les lois de comportement qui caractérisent ces régimes et ce pour trois pentes différentes.

On peut noter que le premier régime est encore identique au cas horizontal. L'abscisse du front est proportionnelle à $t^{0.5}$ dans les trois cas. Cependant, les courbes se situent légèrement au-dessus de celles obtenues dans la première partie.

Comme on peut le voir sur la figure 4b (qui est un agrandissement de la figure 4a pour les petits temps), plus la pente est importante, plus ce décalage de départ est grand.

Figure 2.4: Représentation en log-log de l'évolution de l'abscisse du front en fonction du temps instabilités





De plus, les seconds régimes varient avec la pente. Plus la pente est grande, plus ce second régime est grand. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.3, après une certaine durée d'écoulement, lorsque la hauteur de fluide est inférieure à un certain seuil, le terme en $\tan\theta$ domine le terme de dérivée seconde. C'est pourquoi, plus la valeur de θ est grande plus le second régime est élevé.

On remarque également, comme dans le cas horizontal, une variation de la durée du premier régime en fonction de la longueur du réservoir. Ainsi lorsque $\tan\theta = 0.05$ et que le réservoir est le plus long ($L = 20$), le premier régime dure plus longtemps que lorsque $\tan\theta = 0.2$ et $L = 5$.

Nous avons rassemblés ci-dessous les résultats obtenus :

Loi de Propagation du Front

$$\tan\theta = 0.05 \qquad x_F(t) \approx \begin{cases} 1.05 \ t^{0.5} & \text{pour } x_F(t) \ll L \\ 6.5 \ t^{0.31} & \text{pour } x_F(t) \gg L \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\tan\theta = 0.1 \qquad x_F(t) \approx \begin{cases} 1.11 \ t^{0.5} & \text{pour } x_F(t) \ll L \\ 3.6 \ t^{0.34} & \text{pour } x_F(t) \gg L \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\tan\theta = 0.2 \qquad x_F(t) \approx \begin{cases} 1.15 \ t^{0.5} & \text{pour } x_F(t) \ll L \\ 1.8 \ t^{0.39} & \text{pour } x_F(t) \gg L \end{cases} \tag{2.17}$$

B/ Hauteur maximum atteinte en fonction de x

Là encore il a été possible pour des abscisses assez grandes par rapport à la longueur du barrage, d'exprimer la diminution de $y_{max}(x)$ par une loi de puissance. Nous avons donc établi ces lois de la même manière que dans la première partie, et ce dans le cas des trois pentes déjà étudiées.

Les résultats obtenus sont les suivants :

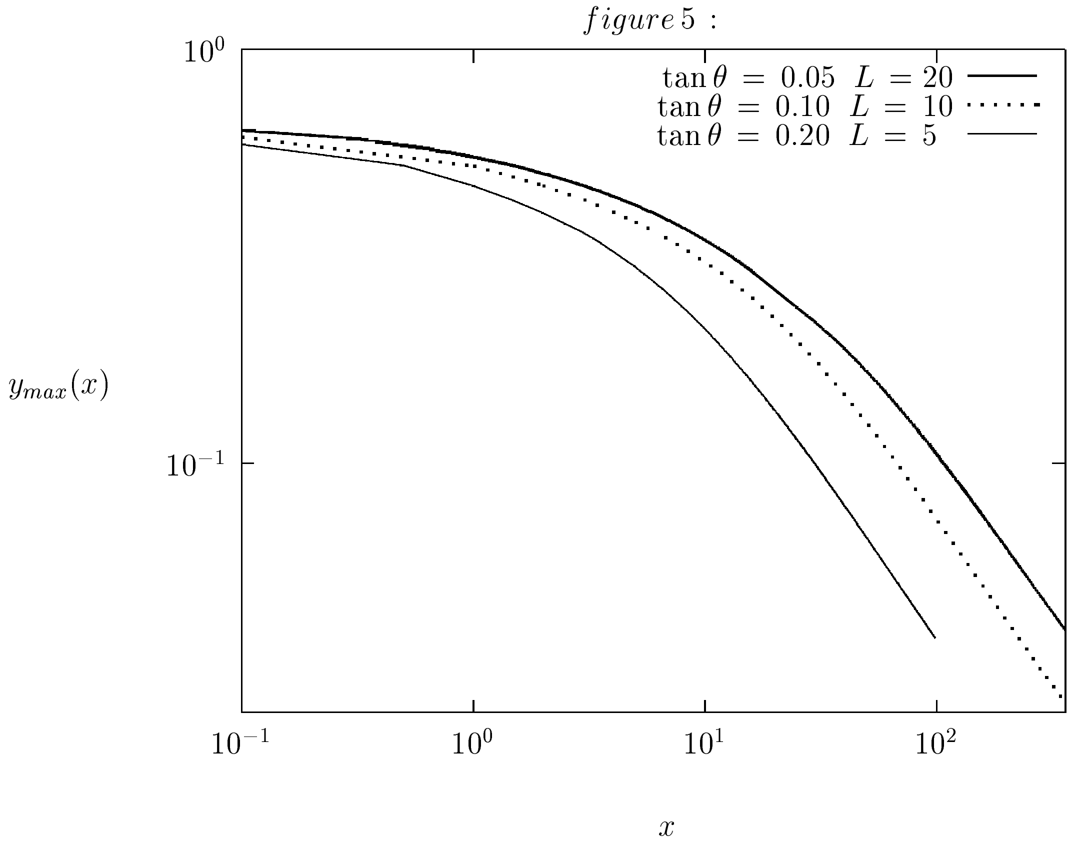
Hauteur maximum de fluide en fonction de x

$$\tan\theta = 0.05 \qquad \mathbf{y_{max}(x) \approx 3.6\ x^{-0.8} \quad pour\ x > 2\,L} \tag{2.18}$$

$$\tan\theta = 0.1 \qquad \mathbf{y_{max}(x) \approx 2.3\ x^{-0.8} \quad pour\ x > 2\,L} \tag{2.19}$$

$$\tan\theta = 0.2 \qquad \mathbf{y_{max}(x) \approx 0.7\ x^{-0.8} \quad pour\ x > 2\,L} \tag{2.20}$$

Figure 2.5: Représentation en log-log de $y_{max}(x)$



Conclusion

L'objectif de cette étude était de s'assurer que le modèle théorique proposé est représentatif des fluides considérés.
L'exploitation des résultats numériques obtenus, leur analyse, puis la comparaison avec les mesures expérimentales disponibles a permis sa validation comme un moyen fiable de prédiction des phénomènes étudiés.

D'autre part, cela a mis en évidence l'existence de deux régimes d'écoulement distincts et l'influence de la longueur du barrage sur ces régimes.
L'utilisation de notre simulation numérique nous a alors permis de préciser ce rôle et d'établir des lois de comportement simples du modèle.

L'intérêt de ces lois est qu'elles sont facile à mettre en oeuvre, rendant possible leur application directement sur le terrain. En effet, étant destinées à prévenir des catastrophes de types rupture de barrages naturels formés lors de crues importantes, il est primordial compte tenu de l'aspect très provisoire de ces retenues, de pouvoir évaluer rapidement et sur le site même l'ampleur des dégâts que provoquerait la rupture.

Enfin, ce travail de validation ouvre la voie à la simulation numérique dans le cas de fluides à seuil ou de fluides thixotropes, ce qui permettrait de modéliser la majorité des risques naturels liés aux écoulements en montagne, donc de répondre globalement aux objectifs du programme Européen "Debris Flow Risk" de prévention de ces risques.

Annexe A

A.1 Origine des équations

A.1.1 Equations de Navier-Stokes

Pour un fluide isochore, newtonien et de viscosité constante μ les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\rho \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\overrightarrow{grad\,P} + \rho\,\overrightarrow{g} + \mu\,\overrightarrow{\Delta u} \tag{A.1}$$

où $\overrightarrow{u}$ est la vitesse et P la pression du fluide.
Le membre de gauche de cette équation représente les forces d'inertie. Le premier terme du membre de droite représente les forces de pression, le second terme $\rho\,\overrightarrow{g}$ la gravité avec ρ la densité constante du fluide. Enfin le troisième terme $\mu\,\overrightarrow{\Delta u}$ représente la viscosité.

On projette l'équation vectorielle (A.1) sur les axes Ox et Oy. Comme l'écoulement est bidimensionnel, il n'y a pas de composante selon Oz.

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{A.2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho\,g + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \tag{A.3}$$

Compte tenu des dimensions de l'écoulement ($L \gg y$) il est raisonnable :

- de négliger à priori l'effet des berges.
- de considérer l'effet du fond du canal sur la cinématique pure de l'écoulement.

Pour cela, on tient compte d'une composante verticale v de la vitesse en plus de la composante principale u de l'écoulement. Toutefois, étant donné l'aspect unidimensionnel de l'écoulement réel, cette composante v devra s'avérer négligeable dans le traitement des équations.

A.1.2 Normalisation

Soit U_o une vitesse de référence, alors les variables normalisées sont définies de la façon suivante :

$$X = \frac{x}{L} \;,\; Y = \frac{y}{L\,\varepsilon} = \frac{y}{y_h} \;,\; T = \frac{U_o\,t}{L} \;,\; U = \frac{u}{U_o} \;,\; V = \frac{v}{\varepsilon\,U_o} \;,\; P = \frac{p\,\varepsilon^2\,L}{\mu\,U_o} \tag{A.4}$$

avec L longueur du réservoir et $\varepsilon = \frac{y_h}{L}$ où y_h est la hauteur de fluide, c'est à dire l'ordonnée de la surface libre.

A.1.3 Traitement des équations

On projette à nouveau l'équation vectorielle (A.1) sur les axes Ox et Oy.
Après simplification, on obtient en utilisant cette fois les grandeurs normalisées :

$$\rho\,U_o\left[\frac{\partial U}{\partial T} + U\,\frac{\partial U}{\partial X} + V\,\frac{\partial U}{\partial Y}\right] = -\frac{\mu}{\varepsilon^2\,L}\,\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu}{L}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right] \tag{A.5}$$

$$\rho\,\varepsilon\,U_o\left[\frac{\partial V}{\partial T} + U\,\frac{\partial V}{\partial X} + V\,\frac{\partial V}{\partial Y}\right] = -\frac{\mu}{\varepsilon^3\,L}\,\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\mu}{L}\left[\varepsilon\,\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right] - \frac{\rho\,g\,L}{U_o} \tag{A.6}$$

Nous introduisons les nombres de Reynolds et de Froude définis par :

$$R_e = \frac{\rho\,U_o\,\varepsilon^2\,L}{\mu} \quad et \quad F_r^2 = \frac{U_o^2}{g\,\varepsilon\,L} \tag{A.7}$$

le système ci-dessus devient :

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U\,\frac{\partial U}{\partial X} + V\,\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta(\varepsilon^2)\right] \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{R_e}{F_r^2} + \theta(\varepsilon^2) \tag{A.9}$$

Dans ce modèle, l'écoulement est régit par ces deux équations auxquelles s'ajoute celle de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{A.10}$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations (A.2) et (A.3), qui donne respectivement (A.5) et (A.6), met en évidence les termes négligeables.

Ainsi, dans la suite nous allons utiliser une forme dite simplifiée de (A.2) et (A.3), c'est à dire dont les termes négligeable ont été supprimés.

A.2 Solution Analytique

A.2.1 Champ de pression

L'équation (A.9) s'intègre facilement. La solution peut s'écrire sous la forme :

$$P(X,Y) = -\frac{R_e}{F_r^2}\,Y + K(X)$$

Et on considère que pour la surface libre $P(X,Y) = 0$ (pression de référence).
Or l'ordonnée de cette surface est donnée par $y = y_h(X)$ donc $Y = 1$ avec $y_h(X)$ la hauteur du fluide.

donc :

$$P(X,Y) = -\frac{R_e}{F_r^2}\,(Y - 1) = \frac{\rho\, g\, \varepsilon^3\, L^2}{\mu\, U_o}\left(\frac{y_h(x)}{\varepsilon\, L} - \frac{Y}{\varepsilon\, L}\right)$$

Finalement :

$$p(x,y) = \rho\, g\, (y_h(x) - y) \tag{A.11}$$

Ici $y_h(x)$ est la hauteur du fluide, c'est à dire l'ordonnée de la surface libre, alors que y représente la coordonnée verticale qui varie de 0 à $y_h(x)$.

Ce résultat exprime la **répartition hydrostatique** des pressions dans l'écoulement considéré.

A.2.2 Forme canonique

Pour caractériser la contrainte τ, on définit le coefficient j de la façon suivante :

$$j \;=\; \frac{\tau}{\rho\, g\, y(x)} \;=\; \frac{\mu}{\rho\, g\, y(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{paroi} \tag{A.12}$$

En introduisant (A.11) et (A.12) dans (A.2) simplifiée et en intégrant de 0 à $y(x)$ il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{y(x)} u\, dy \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{y(x)} u^2 dy \;+\; g\,\frac{\partial y(x)}{\partial x}\int_0^{y(x)} dy \;=\; -g\int_0^{y(x)} \frac{\partial j}{\partial y}\, dy \tag{A.13}$$

Soit la vitesse moyenne u_m et le coefficient de forme β définis par :

$$u_m \;=\; \frac{1}{y(x)}\int_0^{y(x)} u\, dy \qquad \beta \;=\; \frac{\int_0^{y(x)} u^2 dy}{u_m^2\, y(x)} \tag{A.14}$$

En les utilisant dans (A.13) nous obtenons :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \beta u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = -g\, j \tag{A.15}$$

D'autre part, par la conservation de la masse nous avons :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u_m \frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial u_m}{\partial x} = 0 \tag{A.16}$$

Dans l'équation (A.15) les deux premiers termes sont l'expression des forces d'inertie.

A.3 Evaluation du coefficient j

A.3.1 Ecoulement de Poiseuille plan

On fait l'hypothèse d'un écoulement permanent et unidimensionnel : $\overrightarrow{u}\,(u,0,0)$

Ainsi,l'équation de continuité est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0$$

et les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$0 \;=\; -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} - g$$

Comme l'écoulement est permanent on a $\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; 0$

Ce qui nous donne finalement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial p}{\partial x} & = & \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & = & -\rho\,g \end{array}\right.$$

Or comme l'écoulement est uniforme, u est indépendant de x, on peut donc intégrer par rapport à y.
En ajoutant les conditions aux bords $u(-e) \;=\; u(e) \;=\; 0$, on obtient un profil de vitesse de la forme :

$$u(y) \;=\; \frac{K}{\mu}\,(y^2 - e^2)$$

Avec e la largeur de l'écoulement (cela correspond au y(x) du paragraphe précédent) et K une constante.

Or la vitesse moyenne est définie de la façon suivante :

$$U_{moy} \;=\; \frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} u(y)\,dy \;=\; -\frac{2}{3}\,\frac{K}{\mu}\,e^2$$

Donc

$$u(y) \;=\; \frac{3}{2}\,U_{moy}\left(1-\left(\frac{y}{e}\right)^2\right)$$

Soit en remplacant dans (A.12) :

$$j \;=\; \frac{\mu}{\rho\,g\,e}\left(\frac{3}{2}\,U_{moy}\left(\frac{2y}{e^2}\right)_{y=-e}\right) \;=\; \frac{\mu}{\rho\,g\,e}\left(\frac{3\,U_{moy}}{e}\right) \;=\; \frac{3\,\mu\,U_{moy}}{\rho\,g\,e^2}$$

Comme il n'y a plus d'ambiguité, on peut désormais appeler la hauteur de fluide y, ce qui nous donne :

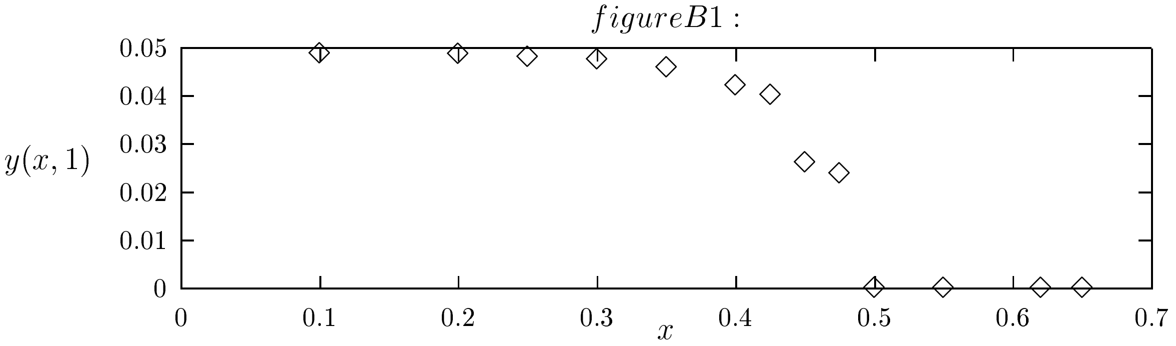
$$j \;=\; \frac{3\,\mu\,U_{moy}}{\rho\,g\,y^2} \tag{A.17}$$

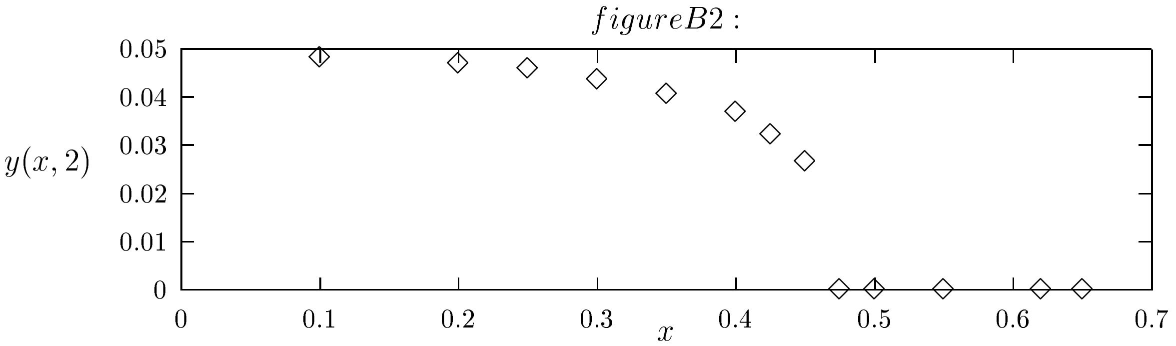
Annexe B

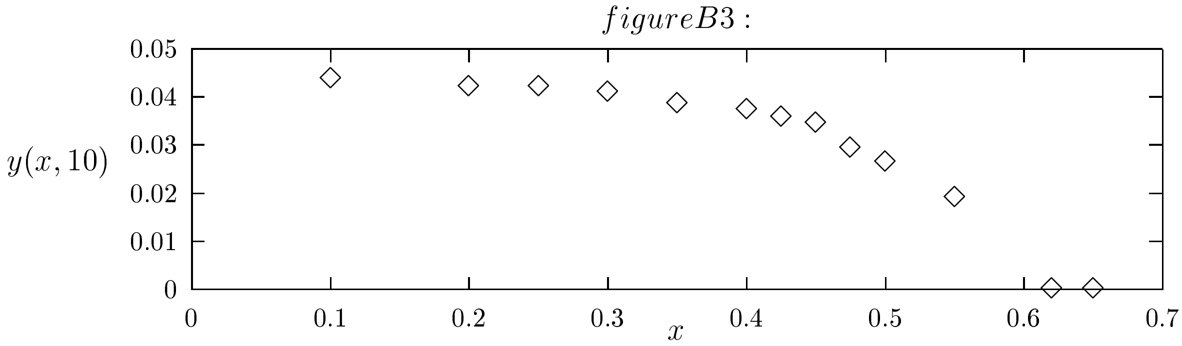
B.1 Choix des conditions initiales

Représentation des profils de la surface libre obtenus expérimentalement et ce à différents instants.

On constate que la pente est presque nulle en amont du réservoir, c'est pourquoi nous pris une condition de Neuman homogène à cette extrémité







Annexe C

C.1 Estimation de l'erreur

A l'instant $t = 0$, le fluide se trouve dans le réservoir. Après la rupture du barrage, il s'écoule, mais il y a conservation de la masse, donc de la quantité de fluide. c'est pourquoi, à tout instant t, la quantité de fluide se trouvant en aval du barrage doit être égale à la quantité perdue en amont.
Les aires A1 et A2 représentées sur la figure C.1 doivent donc être égales.

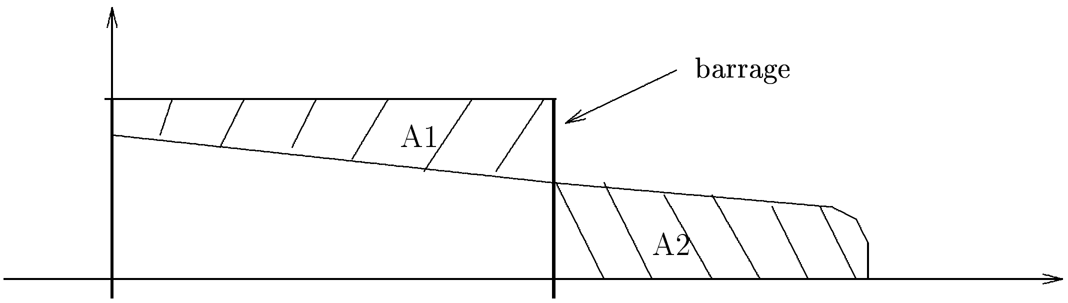


Figure C.1: Représentation des aires

C.1.1 Calcul de l'aire

Nous disposons comme résultats de valeurs discrètes, à savoir les valeurs de $y(x,t)$ en chaque noeuds, soit à t fixé $y(x)$. Nous avons donc calculé ces surfaces de la manière suivante :

$$A1 = \sum_{i=0}^{n1-1} \left(1 - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) h$$

$$A2 = \sum_{i=n1-1}^{N-1} \left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) h$$

Finalement, nous calculons la différence relative de ces aires :

$$E_h = \left| \frac{A1 + A2}{L} - 1 \right|$$

Celle-ci est proportionnelle à h/10.

C.1.2 Résultats

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

h	E_h
0.1	1.10^{-2}
0.01	1.10^{-3}
0.001	1.10^{-4}
0.0001	1.10^{-5}

Annexe D

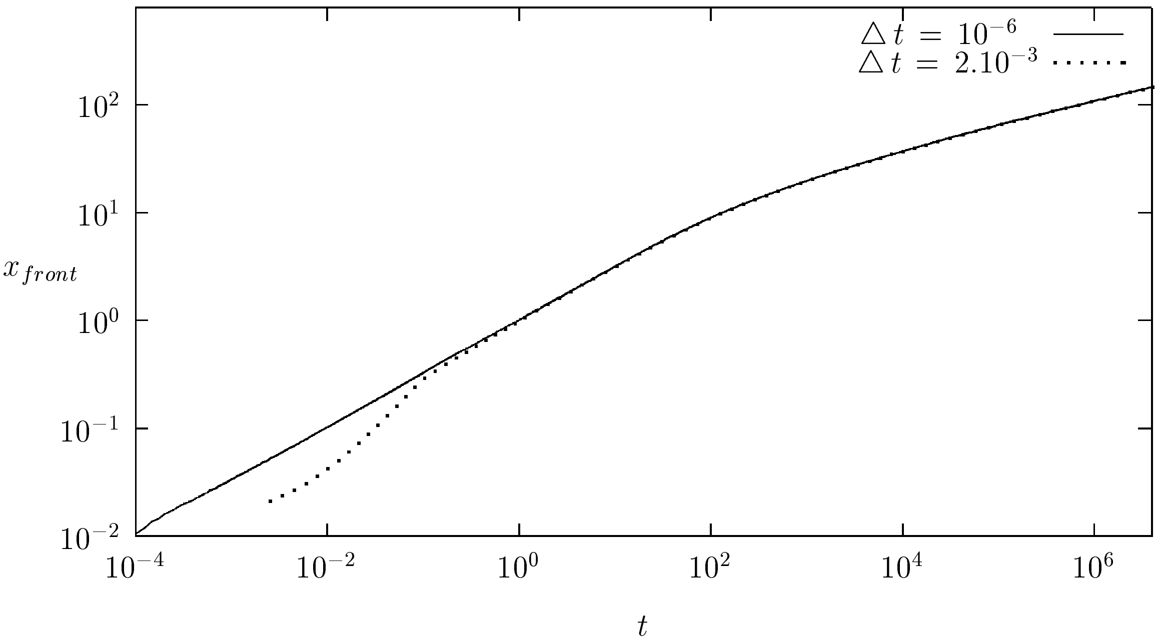
D.1 Influence de la finesse du maillage

Pour des durées d'écoulement supérieures à 1, les valeurs de dt et de h obtenues au paragraphe 1.3.1 donne une préçision de calcul largement suffisante. Mais il n'en est plus de même lorsque l'on s'intéresse à des instants beaucoup plus petits, de l'ordre de 10^{-2} et en deça.

Ainsi pour le calcul de la position du front en fonction du temps, les résultats obtenus pour $t < 0.1$ en prenant comme pas de temps $dt = 2.10^{-3}$ sont faux, l'erreur numérique étant proche de 100%.

Pour obtenir les valeurs de la position du front x_{front} avec préçision jusqu'à $t = 10^{-4}$ comme sur la figure D.1, nous avons dû prendre $dt = 10^{-6}$ et $h = 2.10^{-4}$ soit soit pour $L = 100$ un maillage de 500000 points.

figure D.1



Liste des figures

Bibliographie

[1] Jean-Michel PIAU *Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on a inclined plane.*
J.Rheol. 40(4), 711-723 (1996)

[2] E. SAATDJIAN *Phénomènes de transports et leur résolutions numériques.*
Polytechnica (1993)

[3] C. CUVELIER, J. DESCLOUX, J. RAPPAZ, C. STUART, B. ZWAHLEN *Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs.*
Volume 2, Presses Polytechniques Romandes (1992)

[4] M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX *Numerical methods for the Navier-Stokes equations, application to the simulation of compressible and incompressible viscous flow.*
Computational Physics (1987)

[5] J.A. CUNGE *Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux.*
Rapport ENSHMG, INPG (1991)

[6] C.A.J. FLETCHER *Computational techniques for fluid dynamics - vol. 2 : specific techniques for different flow categories.*
Springer (1991)

[7] G. MARTINET *Contribution à la modélisation numérique des avalanches de neige dense et des laves torrentielles.*
Ph.D thesis, UJF Grenoble (1992)

[8] R. PEYRET, T. TAYLOR *Computational methods for fluid flow.*
Springer (1986)

[9] A. QUARTERONI, A. VALLI *Numerical Approximation of partial differential equations.*
Springer (1994)

[10] G. SEWELL *The numerical solution of ordinary and partial differential equations.*
Academic Press (1988)